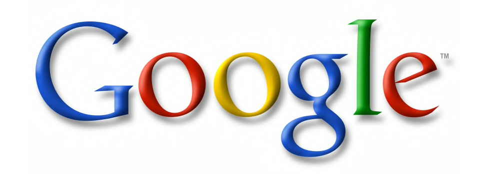





Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Siebenter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1846.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des siebenten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die Ursache der Oscillationen der Luftblase einer Libelle oder eines Niveaus.

(M. s. Archiv. Thl. VI. Nr. XLVIII. S. 400.)

Société Philomatique de Paris.

(Extraits inédits des procès-verbaux.)

Suite de la séance du 19 avril 1845.

Physique. — M. Ath. Peltier lit la note suivante sur la cause des oscillations du niveau à bulle d'air:

„M. Liagre, lieutenant du génie belge, a présenté à l'Académie des sciences de Bruxelles un mémoire sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les moyens de remédier à cette cause d'erreur. Cet officier formule le résultat de ses observations et de ses expériences dans les termes suivants: „Un niveau à bulle d'air très bon et très sensible étant calé sur un plan invariable, si l'une des extrémités de sa bulle vient à se trouver en présence d'une température supérieure à celle de l'autre extrémité, la bulle tout entière marche du côté d'où émane la chaleur."

„Après avoir décrit les expériences propres à constater le fait et après avoir fait remarquer combien ce déplacement de la bulle d'air a dû occasioner d'écarts dans les observations, écarts que l'on attribuait tantôt aux dilatations inégales de la monture de tout l'appareil, tantôt à quelque infidélité de la construction, M. Liagre avoue que c'est en vain qu'il a cherché une explication satisfaisante du phénomène, et qu'il a dû se borner à l'indication du moyen qui lui a paru le plus propre pour éviter cette cause d'erreur. (Voyez le rapport de M. Quetelet communiqué à l'Académie en 1844.)

„La cause du déplacement de la bulle d'air d'un niveau me parait facile à expliquer par l'application de principes connus et

au moyen de quelques expériences spéciales. A l'état d'équilibre, la pression est égale dans toute la masse d'un fluide, quelle que soit la différence de la température de ses diverses parties; conséquemment, ce n'est point dans le fluide seul qu'il fallait chercher la cause de ces variations, mais dans l'addition d'une résistance étrangère. Cette résistance est le produit de l'attraction capillaire du verre pour l'eau ou pour l'alcool, résistance qui est égale sur toute la paroi du tube, lorsque ce dernier possède la même température en tous ses points, mais qui s'affaiblit inégalement lorsque la température n'est point uniforme. Lors donc que le liquide renfermé dans ce tube varie de température d'une manière inégale, lorsqu'une des extrémités du niveau est plus échauffée que l'autre, la force capillaire y est affaiblie, ainsi que la résistance au déplacement de la bulle d'air: cette dernière, placée entre deux forces dissemblables, s'avance vers la portion chauffée, jusqu'au nouvel équilibre qui s'établit entre la moindre résistance d'une part et la pesanteur croissante de l'autre.

„Une expérience très simple démontre combien cette résistance capillaire est puissante dans le déplacement de la bulle d'air. J'ai fait entrer deux cylindres d'eau, distants de 5 à 10 centimètres, dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts, afin de leur laisser toute la liberté de leur mouvement. On pose le tube horizontalement, et lorsque le tout est équilibré, on chauffe l'un des cylindres d'eau. La bulle marche d'abord quelque peu vers le côté chauffé, mais bientôt, en s'échauffant par son contact avec le cylindre chaud ou par la flamme de la lampe que l'on passe au-dessous du tube, elle s'agrandit en s'étalant d'un seul côté, du côté où l'on a diminué la résistance capillaire par l'élévation de la température: l'autre cylindre d'eau reste stable à la même place. Si la différence des températures est faible, le côté froid recule lorsqu'on chauffe la bulle d'air, mais toujours moins que le côté chaud et dans la proportion de leur différence. Dans le niveau d'eau, la bulle d'air soumise, comme dans l'expérience précédente, à deux résistances inégales, s'allonge ou se déplace en raison de leur différence et cause des erreurs d'observation parce que l'on rectifie l'instrument d'après la nouvelle position qu'elle a prise.

„Lorsque l'on emploie le mercure au lieu d'eau ou d'alcool, la cause d'erreur que nous venons de rappeler existe également, mais la marche de la bulle d'air est en sens inverse. Sa progression ou son extension se fait du côté froid. La raison de cette inversion est facile à démontrer. Dans un tube de verre, le mercure n'est pas en contact avec la substance même du tube, mais avec la couche de vapeur d'eau qui est toujours attenante aux parois. Le mercure et le verre ont une grande affinité d'adhésion l'un pour l'autre, comme le prouve l'étamage des tubes barométriques dans lesquels on fait bouillir trop longtemps le mercure. Dans l'état ordinaire, il y a une couche de vapeur d'eau, interposée entre le verre et le mercure, qui s'oppose à leur adhésion. En chauffant l'un des cylindres de mercure, on diminue d'une part la force capillaire du verre pour la vapeur et d'autre part on amincit cette même couche séparatrice. Il en résulte que l'attraction du tube pour le mercure croît à mesure qu'on détruit l'obstacle qui les séparait, et en même temps la résistance au déplacement:

lors donc que l'on chauffe la bulle d'air, la résistance du côté chauffé étant devenue supérieure à celle du côté froid, c'est ce dernier qui recule et le côté chaud reste en repos ou se déplace moins que l'autre. Voilà, suivant nous, la cause du déplacement de la bulle d'air dans les niveaux d'eau ou d'alcool.

II.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände, als Fortsetzung des Aufsatzes X. in Thl. V. Heft 2.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

Es scheint mir nöthig, dass ich einige Worte über den Gesichtspunkt vorausschicke, aus welchem man diese und die etwa noch folgenden Abhandlungen ähnlichen Inhaltes zu betrachten habe. Als ich mich in dem Aufsatze XXV. (Theil IV.) zum ersten Male gegen die gegenwärtig von vielen Mathematikern verfolgte Richtung in der Analysis erklärte, kam es mir zunächst nur darauf an, die Grundlosigkeit der gegen die älteren Theorien gerichteten Vorwürfe an eben den Beispielen nachzuweisen, von welchen die Gegner, im Vertrauen auf eine scheinbar strenge Rechnung, ihre Beweisgründe entnehmen. Beispiele der Art liessen sich zu Hunderten vermehren und auf eine ganz ähnliche Weise behandeln; allein da dieser Weg auf Wissenschaftlichkeit kaum einige Ansprüche machen dürfte, und leicht zu fruchtlosem Hin- und Herreden führt, so verliess ich ihn sogleich wieder und suchte vielmehr die wichtigsten Momente der Theorie und die dabei obwaltenden Schwierigkeiten in einem mehr systematischen Zusammenhange zu erörtern. Die Abhandlung X. in Theil V. soll der Anfang dieser Erörterungen sein, und vielleicht darf ich hoffen, nicht nur über die hier in Rede stehenden Grundgedanken einiges Licht verbreitet, sondern auch die echte Grundlage der binomischen, der exponentiellen und der logarithmischen Entwikkelungen nachgewiesen und dieselben in ihr richtiges Verhältniss zur Elementararithmetik, wie diese bis jetzt sich gebildet hat, gesetzt zu haben. Die letzte Grundlage dieser Entwickelungen ist

der arithmetische Satz von der Multiplication der Summe, wie nämlich das Totalproduct als eine Summe von Partialproducten der Glieder erscheint, die sich in besondern Fällen nach gewissen Gesetzen zusammenstellen lassen. Dabei meine ich durchaus nicht, Neues vorgetragen zu haben; das Wesentliche ist schon oft, und namentlich in der mathematischen Naturphilosophie von Fries gelehrt worden.

§. 2.

Meine nächste Absicht ist nun die, dass ich, dem gewöhnlichen Gange zu Folge, an die Exponentialreihen die trigonometrischen Entwickelungen anschliesse und deren Fundamente erkläre. Hierbei stösst man allerdings auf einige Schwierigkeiten, deren Lösung die neuere Analysis, indem sie nur convergirende Reihen zulassen will, bei Seite schiebt, freilich ohne zu beachten, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihen mit diesen Schwierigkeiten nicht die entfernteste Verwandtschaft hat. — Der wichtigste Schritt in dieser Lehre ist dann geschehen, wenn die Relation zwischen dem Bogen und seinen trigonometrischen Functionen gefunden ist und hierfür habe ich den Grundgedanken schon früher ausgesprochen. Gewöhnlich gründet man die Entwickelungen auf die Reihen:

$$\sin mx = m_1 \cos x^{m-1} \sin x - m_3 \cos x^{m-3} \sin x^3 + \ldots,$$

$$\cos mx = \cos x^m - m_2 \cos x^{m-2} \sin x^2 + m_4 \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots$$

wo, wie bekannt, m_1, m_2, u. s. w. die Binomialcoefficienten für den Exponenten m bedeuten. In der That empfehlen sich dieselben durch ihre Einfachheit für den besagten Zweck besser als andere zusammengesetztere, besonders da sie für ein ganzes absolutes m auf einem sehr elementaren Wege gefunden werden können. Für andere Werthe von m muss man die nach Moivre benannten Formeln zu Hülfe nehmen; dieselben verursachen jedoch bei gebrochenen Exponenten, wegen der Vieldeutigkeit der Wurzeln, einige Schwierigkeiten, die vielleicht bis jetzt noch nicht genügend gelöst sind. Ja es scheint, als ob einige Mathematiker ein Misstrauen in den Gebrauch der imaginären Grössen setzten; andere glauben wenigstens der Wissenschaft einen Dienst zu thun, wenn sie die Betrachtung des Imaginären so viel als möglich beseitigen und dasselbe in ein höheres Gebiet der Analysis verweisen, gleichsam als ob dazu eine höhere mathematische Einsicht gehöre, wo man dann freilich fragen möchte, was elementarer sei als diejenigen Formen, auf welche uns schon die Auflösung quadratischer Gleichungen hinweist.

Einen grossen Mangel fühlt man freilich bei allen bisherigen Darstellungen der Moivreschen Formeln dadurch, dass man über den Zweck und die Bedeutung der Form $i = \sqrt{-1}$ gar keine Auskunft findet, und ich möchte gar fragen, ob irgend ein Schriftsteller darüber im Klaren gewesen sei. Wenigstens beruht jener unglückselige Streit über die Eulersche Reihe

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a + \ldots.$$

lediglich auf einem Missverständnisse der Bedeutung von i in den Moivreschen Formeln. Ich will daher dieselben nach meinen Kräften erläutern und bei ihrer Feststellung mich des allgemeineren Zeichens $\sqrt{k-1}$ statt $\sqrt{-1}$ bedienen.

§. 3.

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke

$$p_1 = \cos a_1 + \sqrt{k-1}.\sin a_1,$$
$$p_2 = \cos a_2 + \sqrt{k-1}.\sin a_2$$

mit einander, so findet man leicht

$$p_1 p_2 = \cos(a_1 + a_2) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1 + a_2) + k \sin a_1 \sin a_2.$$

Multiplicirt man nochmals mit

$$p_3 = \cos a_3 + \sqrt{k-1}.\sin a_3,$$

so findet sich

$$p_1 p_2 p_3 = \cos(a_1 + a_2 + a_3) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1 + a_2 + a_3)$$
$$+ k(\sin(a_1 + a_2)\sin a_3 + p_3 \sin a_1 \sin a_2),$$

und wenn noch ein vierter Factor

$$p_4 = \cos a_4 + \sqrt{k-1}.\sin a_4$$

hinzukommt:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \cos(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$
$$+ k(\sin(a_1 + a_2 + a_3)\sin a_4 + p_4 \sin(a_1 + a_2)\sin a_3 + p_3 p_4 \sin a_1 \sin a_2).$$

Man kann hieraus schon das Bildungsgesetz für beliebig viele Factoren abnehmen, denn man findet:

$$\text{I)}\quad p_1 p_2 p_3 \ldots p_m = \cos(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m)$$
$$+ \sqrt{k-1}.\sin(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m)$$
$$+ k \left\{ \begin{array}{l} \sin(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{m-1}) \sin a_m \\ + \sin(a_1 + a_2 + \ldots a_{m-2}) \sin a_{m-1} . p_m \\ + \sin(a_1 + a_2 + \ldots a_{m-3}) \sin a_{m-2} . p_{m-1} p_m \\ + \sin(a_1 + a_2 + \ldots a_{m-4}) \sin a_{m-3} . p_{m-2} p_{m-1} p_m \\ \quad \text{u. s. w.} \\ + \sin(a_1 + a_2 + \ldots a_{m-r}) \sin a_{m-r-1} . p_{m-r-2} \ldots p_m \\ \quad \text{u. s. w.} \\ + \sin a_1 \sin a_2 . p_3 p_4 p_5 \ldots p_m. \end{array} \right\}$$

Nehmen wir nun alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält die besondere Gleichung

$$\text{II)}\quad p^m = \cos ma + \sqrt{k-1}.\sin ma$$
$$+ k \sin a \left\{ \begin{array}{l} \sin(m-1)a + p\sin(m-2)a + p^2\sin(m-3)a \\ + p^3 \sin(m-4)a + \ldots\ldots p^{m-2}\sin a \end{array} \right\}$$

und diese beiden Ausdrücke sollen den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen. $\sqrt{k-1}$ kann sowohl eine positive als auch eine negative Grösse vorstellen.

§. 4.

Die Gleichung II) enthält zunächst das Mittel zur Summirung der Reihen:

$$\Sigma(v^m \sin ma) = v\sin a + v^2 \sin 2a \ldots\ldots + v^m \sin ma,$$
$$\Sigma(v^m \sin ma) = 1 + v\cos a + v^2\cos 2a \ldots\ldots + v^m \cos ma.$$

Obgleich dieselben einem jeden bekannt sind, so darf ich sie hier doch nicht ganz mit Stillschweigen übergehen, da sie in speciellen Fällen einige Schwierigkeiten darbieten, welche die Anhänger der neueren Ansichten gern zu ihrem Vortheil auslegen möchten. Da in der Gleichung II) k jede beliebige Grösse sein darf, so kann man $p = \cos a + \sqrt{k-1}.\sin a$ als unabhängig von a ansehen, wenn dann nur k aus p und a bestimmt wird. Man hat zunächst:

$$\frac{p^m - \cos ma - \sqrt{k-1}.\sin ma}{k \sin a} = \sin a.p^{m-2} + \sin 2a.p^{m-3}\ldots\ldots$$
$$+ \sin(m-2)a.p + \sin(m-1)a,$$

und dann

$$\sqrt{k-1} = \frac{p-\cos a}{\sin a}, \quad k = \frac{1-2p\cos a + p^2}{\sin a^2}.$$

Werden diese Werthe in die letzte Gleichung gesetzt und dividirt man zugleich beiderseits mit p^{m-1}, so findet man

$$\frac{p^m \sin a + \sin(m-1)a - p\sin ma}{(1-2p\cos a+p^2)p^{m-1}}$$
$$= \frac{\sin a}{p} + \frac{\sin 2a}{p^2} + \ldots + \frac{\sin(m-1)a}{p^{m-1}}.$$

Setzt man aber $\frac{1}{p} = v$ und m statt $m-1$, so erhält man sogleich:

$$\text{III)}\quad v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a \ldots\ldots + v^m \sin ma$$
$$= \frac{v\sin a + v^{m+2}\sin ma - v^{m+1}\sin(m+1)a}{1-2v\cos a + v^2}.$$

Multiplicirt man nun von den Gleichungen:

$$\Sigma(v^m \sin ma) = v\sin a + v^2 \sin 2a + \ldots . v^m \sin ma,$$
$$\Sigma(v^m \cos ma) = 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + \ldots v^m \cos ma$$

die erste mit $v\cos a$, die zweite mit $v\sin a$ und addirt die Producte, so erhält man

$$v\cos a\,.\,\Sigma(v^m \sin ma) + v\sin a\,.\,\Sigma(v^m \cos ma)$$
$$= v\sin a + v^2\sin 2a \ldots . + v^{m+1}\sin(m+1)a = \Sigma(v^{m+1}\sin(m+1)a);$$

also, wenn man die Formel III) zu Hilfe nimmt:

$$\text{IV)}\quad 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + \ldots\ldots v^m \cos ma$$
$$= \frac{1 - v\cos a + v^{m+2}\cos ma - v^{m+1}\cos(m+1)a}{1-2v\cos a + v^2}.$$

Die Reihen in III) und IV) stellen blosse Summen und keine Entwickelungen vor. Einen grossen Irrthum begeht man aber, wenn man die Summe dadurch in eine Entwickelung zu verwandeln glaubt, dass man den Zeiger des allgemeinen Gliedes unendlich nimmt. Doch hiervon ist schon die Rede gewesen. Will man die Functionen haben, aus welchen die ins Unbestimmte fortgesetzten Reihen

$$v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a + \ldots\ldots ,$$
$$1 + v\cos a + v^2\cos 2a + v^3\cos 3a + \ldots\ldots$$

entwickelt werden können, so muss man Alles, was in den Summenformeln noch vom Stellenzeiger m abhängt, weglassen. Man erhält dadurch:

$$\text{V)}\quad v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a + \ldots\ldots = \frac{v\sin a}{1-2v\cos a + v^2},$$

$$\text{VI)}\quad 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + v^3\cos 3a + \ldots\ldots = \frac{1 - v\cos a}{1-2v\cos a + v^2}.$$

Denn man hat z. B. aus III):

$$\frac{v\sin a}{1-2v\cos a + v^2} = v\sin a + v^2\sin 2a + \ldots . v^m \sin ma$$
$$- \frac{v\sin ma - \sin(m+1)a}{1-2v\cos a + v^2}\, v^{m+1},$$

und da dieses nun für jeden Werth von m gilt, so folgt eben, dass die Entwickelung in V) richtig ist. Zugleich folgt hieraus, dass

$-\frac{v\sin ma-\sin(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}v^{m+1}$ die Entwickelung von $v^{m+1}\sin(m+1)a$ $+v^{m+2}\sin(m+2)a+\ldots$ sein muss. Diejenigen, welche nur convergirende Reihen zulassen wollen, kommen der Hauptsache nach auf dasselbe zurück; sie verwandeln die Summe durch Weglassung eines Theiles der Summenformel in eine Entwickelung, beurtheilen aber das, was man weglassen muss, danach, ob es für den unendlich grossen Stellenzeiger m verschwindet, wobei sie denn den Werth der allgemeinen Grösse in der Entwickelung in gewisse Grenzen einschliessen müssen.

Setzt man in V) und VI) $v=1$, so findet sich

$$\text{VII)}\ \sin a+\sin 2a+\sin 3a\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a,$$

$$\text{VIII)}\ 1+\cos a+\cos 2a+\cos 3a\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}.$$

Diese Ausdrücke haben in den Fällen, wo $a=0$ oder $=\pm 2n\pi$ ist, ihre Schwierigkeiten, die ich nun gründlich beseitigen will. Schon früher habe ich die Frage aufgeworfen, welchen Werth der Ausdruck $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ habe, wenn $v=1$ und $a=0$ genommen wird. Nimmt man erst $a=0$, so hat man $\frac{1-v}{(1-v)^2}=\frac{1}{1-v}$, welches denn für $v=1$ unendlich wird. Wird aber erst $v=1$ gesetzt, so wird jener Ausdruck von a ganz unabhängig und $=\frac{1}{2}$. Diese beiden Werthe müssen dem Ausdrucke $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ in dem genannten Falle doch wohl zukommen, und folglich stellt auch die Entwickelung eben diese beiden Werthe dar. Die Entwickelung $1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ hat nämlich allerdings den Werth $\frac{1}{2}$ für $a=0$, der ihr für alle übrigen a zukommt; allein sie wird in diesem Falle zugleich auch identisch mit anderen Entwickelungen, denen der Werth ∞ zukommt. Sucht man dieselbe auf einem anderen Wege, als dem obigen, so wird sich die Unbestimmtheit für $a=0$ allemal offenbaren.

Wenn ich nun mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2}=1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ rechne, so muss ich Acht haben, ob $a=0$ wird oder nicht. Im ersten Falle rechne ich mit einem nicht allgemein richtigen Werthe der Entwickelung und erhalte, wenn auch nicht gerade falsche, doch wenigstens einseitige Resultate. Dann muss man zu der allgemeineren Formel in VI) zurückgehen, und um dieses durch ein Beispiel zu erklären, wähle ich ein schon früher besprochenes.

Herr Doctor Schlömilch sagt in seiner Abhandlung (Thl. III. Seite 277.), wenn man die (unrichtige) Gleichung

$$\cos x+\cos 2x+\ldots.=-\tfrac{1}{2}$$

mit $f(x).dx$ multiplicire und zwischen den Grenzen 0 und a integrire, so erhalte man:

$$A)\ \int_0^a f(x)dx+2\left[\int_0^a f(x)\cos x\,dx+\int_0^a f(x)\cos 2x\,dx+\ldots.\right]=0.$$

Weil aber eigentlich

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

sei, so folge, dass der Ausdruck in A) nicht $=0$ sein könne, sondern derselbe sei vielmehr

$$= \mathrm{Lim} \int_0^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)\,dx$$

für wachsende n, worüber man in Thl. I. Seite 417. nachlesen könne, wo jener mit Lim. bezeichnete Ausdruck $=\pi f(0)$ gefunden wird. Aber es ist doch

$$\mathrm{Lim} \int_b^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)dx = 0,$$

und nur wenn $b=0$ ist, findet die Ausnahme statt. Man subtrahire nun in VI) beiderseits $\frac{1}{2}$, so wird

$$\tfrac{1}{2} + v\cos x + v^2\cos 2x + \ldots = \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{1-2v\cos a+v^2},$$

also

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx + 2\left[v\int_0^a \cos x\varphi(x)dx + v^2\int_0^a \cos 2x\,\varphi(x)\,dx + \ldots\right]$$
$$= J = (1-v^2)\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{1-2v\cos x+v^2}.$$

Damit ich hier nicht zu weit von meinem Zwecke abkomme, will ich $\varphi(x)$ constant $=\beta$ setzen. Dann ist das allgemeine Integral $J=\beta.\mathrm{arc}\cos\dfrac{-2v+(1+v^2)\cos x}{1-v\cos x+v^2} + \mathrm{Const}$, also J zwischen den Grenzen $\pm 2n\pi$ und $a = \beta.\mathrm{arc.}\cos\dfrac{-2v+(1+v^2)\cos a}{1-v\cos a+v^2} - \beta\,\mathrm{arc.}\cos(1)$. Dieses verwandelt sich für $v=1$ in $\beta\,\mathrm{arc.}\cos(-1) - \beta\,\mathrm{arc.}\cos(1)$, worin der Ausdruck $\pi\beta$ enthalten ist. Zwischen den Grenzen $\pm n\pi$ und $\pm m\pi$ verwandelt sich der allgemeine Ausdruck J in $\beta\,\mathrm{arc.}\cos(1) - \beta\,\mathrm{arc.}\cos(1)$.

Wenn man aber in dem allgemeinen Integral J von vorn herein $v=1$ nimmt, so erhält man zwischen zwei beliebigen Grenzen $J = \mathrm{arc.}\cos(-1) - \mathrm{arc.}\cos(-1)$, worin der Werth 0 begriffen ist. Die morderenen Demonstrationen stellen noch die Bedingung, dass a nicht $>\frac{1}{2}\pi$ oder wenigstens nicht grösser als π sein solle, was aber nach Obigem offenbar unrichtig ist. Ueberhaupt bin ich der Meinung, dass die Sache durch die jüngst betretenen Wege am wenigsten erledigt ist und dass wir uns, in Folge obiger Darstellung, veranlasst fühlen sollten, tiefere Untersuchungen über die nach La Grange und Fourier benannten Formeln anzustellen, und

dabei auf Gründe zu fussen, welche uns tiefer in die Natur der Sache eindringen lassen, als die Con- und Divergenz. Doch mehr zu sagen, ist hier die Stelle nicht.

Gleicher Behandlung, wie die Reihe in VIII), unterliegt auch die in VII). Dieselbe giebt uns für $a=0$ das paradoxe Resultat $0+0+0+\ldots\ldots=\infty$. Dieses Paradoxon lässt sich freilich durch den Rest der Reihe erklären; allein wenn man in dem allgemeineren Ausdrucke V) $a=0$ nimmt, so erhält man wieder $0+0+\ldots\ldots=0$. Indem man solche Unbestimmtheiten endlicher Formeln bloss an ihren Entwickelungen bemerkt, kann man freilich zu dem Fehlschlusse gelangen, dass der Grund aller Irrungen in der Divergenz liege.

Zuletzt will ich noch an einem Beispiele zeigen, wie klar die analytische Sprache der Reihe VII) sei, ungeachtet ihrer Unbestimmtheit für $a=0$. Setzt man für $\sin a$ die Reihe $a-\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots$ und so auch für $\sin 2a$ u. s. w., so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a=(1+2+3+\ldots.)a-(1^3+2^3+3^3\ldots.)\frac{a^3}{1.2.3}\ldots.$$

Nun ist $1+2+3\ldots.$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x=1$, $1^3+2^3+3^3\ldots$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$ für $x=1$ u. s. w. Also hätten wir $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a=\infty a-\frac{\infty^4 a^3}{1.2.3}+\ldots.$ Da nun bekanntlich eine Function nicht nach lauter positiven Potenzen der Hauptgrösse entwickelt werden kann, wenn die Coefficienten der Reihe unendlich werden, so sagt die Formel VII), dass man die Cotangente nicht nach lauter positiven Potenzen des Bogens entwickeln könne. Doch so etwas wird benutzt, um die Richtigkeit der divergirenden Reihen in Zweifel zu ziehen.

§. 5.

Doch ich komme nun zum Hauptzwecke, nämlich zur Feststellung der Moivreschen Formeln. Wir kehren deshalb zu den Formeln in I) und II) zurück. In I), in dem mit k multiplicirten Theile, behalten die Coefficienten aller Producte aus den verschiedenen p einerlei Grösse und Vorzeichen, wenn man sämmtliche a negativ nimmt. Da aber dadurch der Factor p_m aus $\cos a_m+\sqrt{k-1}.\sin a_m$ in $\cos a_m-\sqrt{k-1}.\sin a_m$ sich verwandelt, und dieses eben auch geschieht, wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, so ist es in der Gleichung I) einerlei, ob man alle a, oder ob man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt.

Denkt man sich nun in dem mit k multiplicirten Theile die Producte der p nach dem gewöhnlichen Multiplicationsgesetz aufgelöst, so werden sich sämmtliche Glieder in zwei Klassen abtheilen lassen, in solche, welche gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ enthalten und folglich rational sind, und dann in solche, welche

ungerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ haben und folglich irrational bleiben. Indem man in der ersten Klasse die Potenzen von $k-1$ auflöst, erhält man eine Reihe $Ak+Bk^2+Ck^3\ldots.$, welche für ein gerades m (=Anzahl aller a) bis zu $k^{\frac{m}{2}}$ und für ein ungerades bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ aufsteigt. Sondert man aus den Gliedern der zweiten Klasse den Factor $\sqrt{k-1}$, so behalten sie nur gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ und geben daher eine Reihe $\sqrt{k-1}\,(A'k+B'k^2+C'k^3+\ldots.)$, welche bis zu $k^{\frac{m}{2}-1}$ bei geradem und bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ bei ungeradem m aufsteigt.

Man hat also

$$\text{IX)}\quad p_1p_2\ldots.p_m=\cos(a_1+a_2+\ldots.a_m)+Ak+Bk^2+\ldots.\\+(\sin(a_1+a_2+\ldots.a_m)+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1},$$

und es ist nicht weiter nöthig, dass man das Bildungsgesetz von $A, B\ldots.A', B'\ldots.$ kenne.

Nehmen wir nun zuerst alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält

$$\text{X)}\quad p^m=(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots.\\+(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1}.$$

Wird aber die Quadratwurzel negativ genommen, oder nimmt man, was nach dem Vorigen dasselbe ist, a negativ, so wird:

$$(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots.\\-(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1}.$$

Daraus folgt nun sogleich

$$\text{XI)}\quad\begin{cases}\dfrac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m+(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2}\\=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots.\\\text{und}\\\dfrac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m-(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2\sqrt{k-1}}\\=\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.\end{cases}$$

Man sieht nun deutlich, welche Vortheile man durch den Gebrauch des Imaginären hier erlangt, indem durch dasselbe alle Glieder, welche noch den Factor k haben, sogleich beseitigt werden. Hierfür kann man Folgendes bemerken. Das Product $p_1p_2p_3\ldots.p_m$ lässt sich immer so entwickeln, dass man zwei Theile erhält, von denen der eine rational ist, der andere mit dem Factor $\sqrt{k-1}$ behaftet bleibt. Gelingt es nun, den beiden Theilen der Entwickelung verschiedene Formen zu geben, dass man also $P+Q\sqrt{k-1}$ das eine Mal und $P'+Q'\sqrt{k-1}$ das andere Mal erhält, so müssen wir schliessen, dass $P=P'$ und $Q=Q'$ sei. Denn wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, erhält man $P-Q\sqrt{k-1}=P'-Q'\sqrt{k-1}$, und wenn diese Gleichung mit der vorigen $P+Q\sqrt{k-1}=P'+Q'\sqrt{k-1}$ verbunden wird, so folgt sogleich $P=P'$, $Q=Q'$. Man kann also die Elimination von $\sqrt{k-1}$ ganz

umgehen und dafür sagen, dass in der Gleichung $P+Q\sqrt{k-1}$ $=P'+Q'\sqrt{k-1}$ der rationale Theil nur dem rationalen, der irrationale nur dem irrationalen gleich sein könne.

Aber hierbei fällt sogleich in die Augen, dass die Betrachtung gar nicht an einen besondern Werth von k geknüpft und dass daher auch die Giltigkeit der Resultate nicht auf bestimmte Werthe von k beschränkt ist. Wer indessen im Anfange der Betrachtung durchaus nur reelle Werthe für $\sqrt{k-1}$ zulassen wollte, müsste dann überlegen, dass z. B. P und P' Functionen bloss von k und nicht mehr von $\sqrt{k-1}$ sind, die für $k \geq 1$ immer gleiche Werthe haben, und hieraus müsste die Gleichheit von P und P' auch in allen anderen Fällen nachgewiesen werden. Da dieses keine Schwierigkeiten hat, so will ich nicht länger dabei verweilen.

Die Gleichungen IX), X) und XI) gelten also auch für $k=0$, so dass, wenn nun $p_r = \cos a_r + i \sin a_r$ ist:

$$\text{XII)} \quad p_1 p_2 p_3 \ldots . p_m = \cos(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_m) + i \sin(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_m),$$

$$\text{XIII)} \quad (\cos a + i \sin a)^m = \cos ma + i \sin ma,$$

$$\text{XIV)} \begin{cases} \cos ma = \dfrac{(\cos a + i \sin a)^m + (\cos a - i \sin a)^m}{2}, \\[2ex] \sin ma = \dfrac{(\cos a + i \sin a)^m - (\cos a - i \sin a)^m}{2i}; \end{cases}$$

und wenn man noch das Binom $(\cos a \pm i \sin a)^m$ auflöst:

$$\text{XV)} \begin{cases} \cos ma = \cos a^m - m_2 \cos a^{m-2} \sin a^2 + m_4 \cos a^{m-4} \sin a^4 \ldots ., \\ \sin ma = m_1 \cos a^{m-1} \sin a - m_3 \cos a^{m-3} \sin a^3 + m_5 \cos a^{m-5} \sin a^5 \ldots \end{cases}$$

Alle diese Formeln sollen zunächst nur für ganze positive Werthe von m gelten, doch reichen sie noch für die goniometrische Darstellung der m Werthe von $\sqrt[m]{\pm 1}$ aus. Aus XIII) folgt nämlich, wenn man $\frac{a}{m}$ statt a setzt:

$$\cos \frac{a}{m} + i \sin \frac{a}{m} = (\cos a + i \sin a)^{\frac{1}{m}},$$

sofern man an diese Form noch keine andere Forderung stellt, als dass die Entwickelung ihrer $m$ten Potenz $= \cos a + i \sin a$ werden soll. Nimmt man nun $a = 2\mu\pi$ oder $= (2\mu + 1)\pi$, so wird $\cos a + i \sin a = +1$ oder $= -1$, und man hat

$$\text{XVI)} \begin{cases} \sqrt[m]{+1} = \cos \dfrac{2\mu\pi}{m} + i \sin \dfrac{2\mu\pi}{m}, \\[2ex] \sqrt[m]{-1} = \cos \dfrac{2\mu\pi}{m} - i \sin \dfrac{2\mu\pi}{m}. \end{cases}$$

§. 6.

Ich komme nun zur Erörterung des Falles, wo in den Moivreschen Formeln der Exponent ein Bruch ist. Hier lassen sich nun zwar die Rechnungen mit dem allgemeineren Zeichen $\sqrt{k-1}$ fortführen; da indessen die Formeln IX) und X) des vorigen §. allgemein für jeden Werth von k gelten, so kann man der weitläufigeren Rechnung durch den Gebrauch des Imaginären überhoben sein. Hierbei darf man aber die daselbst gestellte Bemerkung nicht übersehen, dass, wenn für dieselbe Form zwei Entwickelungen $P+iQ$ und $P'+iQ'$ gefunden worden sind, $P=P'$ und $Q=Q'$ sein muss. Dieser Schluss ist unfehlbar, und mit ihm gleichbedeutend ist das Eliminationsverfahren durch eine zweite Gleichung, die man erhält, wenn man i negativ nimmt; aber man hat hier oft ein Eliminationsverfahren in Anwendung gebracht, das zwar beim ersten Anblick tadellos erscheint, aber demungeachtet sich als ein sehr gefahrvolles erweist.

Aus XIII) lässt sich auf eine leichte Weise folgern, dass

$$\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a=\sqrt[n]{(\cos a+i\sin a)^m}$$
$$=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

sein muss. Da aber dieser Ausdruck wegen der Vieldeutigkeit der zu $\cos a$ und $\sin a$ gehörigen Bögen ein vieldeutiger ist, so pflegt man gewöhnlich die Vieldeutigkeit durch Hinzufügung des Factors $1^{\frac{m}{n}}$ zu erklären, ohne weitere Rücksicht darauf zu nehmen, dass es doch eines Beweises bedürfte, dass die Vieldeutigkeit jenes Ausdrucks durch den Factor $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt werde. Doch wenn wir auch hiervon absehen, so schloss man ferner auf die Gleichung

$$\cos\frac{m}{n}a-i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

von jener ersten dadurch, dass man a negativ nahm und meinte dann weiter die Gleichungen

$$2\cos\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}+(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u+v,$$

$$2i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}-(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u-v$$

begründet zu haben. Aber auf solche Art ist das Imaginäre nur bei Bögen des ersten Quadranten eliminirt; man muss bei grösseren Bögenwerthen die conjugirten Formeln $(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ und $(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ nicht dadurch aus einander herleiten, dass man a negativ nimmt, sondern man muss i negativ werden lassen, damit

auch das i in dem Factor $1^{\frac{m}{n}}$ an der Veränderung mit Theil nimmt. Dabei wird es denn freilich nothwendig, dass man vorher die Formel $\cos a \pm i \sin a$ auf Bögen des ersten Quadranten reducire. Statt dessen setzte man aber immer obiges $u+v$ satt $2\cos\frac{m}{n}a$ und $u-v$ statt $2i\sin\frac{m}{n}a$ und umgekehrt, ohne den bestimmten Ausdruck für die Vieldeutigkeit jener Formeln in Rechnung zu nehmen, verlor dadurch auch am Ende alle Vieldeutigkeit und hatte nur für Bögen des ersten Quadranten giltige Resultate. Aber, was noch schlimmer war, man nahm auf etwaige Factoren $=i$, die ausser dem i der Moivreschen Formeln in die Rechnung sich einschlichen, gar keine Rücksicht und eliminirte daher ganz falsch, erhielt folglich auch falsche Resultate, und während nun die früheren Mathematiker allen Scharfsinn aufboten, um den Irrthum zu finden, so haben viele Neuere dagegen die Schuld des Irrthumes dahin geschoben, wo alles weitere Ergründen aufhören musste, nämlich auf die Divergenz der Reihen. Darum geben sie sich auch nicht die Mühe nachzuweisen, wie die Divergenz der Reihen Ursache zu Fehlern wird, sondern glauben genug zu thun, wenn sie zeigen, dass man bei Vermeidung divergirender Reihen nichts Falsches, wenn auch nichts Allgemeines, erhält.

§. 7.

Aus dem im vorigen §. Gesagten geht zur Genüge hervor, dass man bei der Feststellung der Moivreschen Formeln für gebrochene Exponenten die Vieldeutigkeit der Wurzeln Anfangs ganz vermeiden muss. Es sei a ein (positiver oder negativer) Bogen des ersten Quadranten und $x=\cos a$, $y=\sin a$, so wird x immer eine positive Zahl sein. Man hat dann

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=(x+\sqrt{k-1}.y)^{\frac{m}{n}}$$

$$=x^{\frac{m}{n}}+\left(\frac{m}{n}\right)_1 x^{\frac{m}{n}-1}y\sqrt{k-1}+\left(\frac{m}{n}\right)_2 x^{\frac{m}{n}-2}y^2(k-1)$$

$$+\left(\frac{m}{n}\right)_3 x^{\frac{m}{n}-3}y^3(k-1)^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

was wir mit $R+S\sqrt{k-1}$ bezeichnen können, so dass R und S nur noch von k, nicht aber von $\sqrt{k-1}$ abhängen. Man hat also

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R+S\sqrt{k-1}.$$

Man setze $R=q\cos\varphi$ und $S=q\sin\varphi$, also $tg\,\varphi=\frac{S}{R}$, so wird $q=\sqrt{R^2+S^2}$. Daher

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=q(\cos\varphi+\sqrt{k-1}.\sin\varphi),$$

und folglich

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m=q^n(\cos\varphi+\sqrt{k-1}.\sin\varphi)^n,$$

oder nach §. 5:

$$\left.\begin{array}{l}\cos ma+Ak+Bk^2\ldots\\+(\sin ma+A'k+B'k^2\ldots)\sqrt{k-1}\end{array}\right\}=q^n\left\{\begin{array}{l}\cos n\varphi+\mathfrak{A}k+\mathfrak{B}k^2+\ldots\\+(\sin n\varphi+\mathfrak{A}'k+\mathfrak{B}'k^2\\\quad+\ldots)\sqrt{k-1}\end{array}\right.$$

woraus nun folgt:

$$\cos ma+Ak+Bk^2\ldots=q^n(\cos n\varphi+\mathfrak{A}k+\mathfrak{B}k^2\ldots),$$
$$\sin ma+A'k+B'k^2\ldots=q^n(\sin n\varphi+\mathfrak{A}'k+\mathfrak{B}'k^2\ldots).$$

Diese Gleichungen sind richtig für jedes $k\geq 1$, sie sind daher für alle Werthe von k richtig, und wenn man nun $k=0$ setzt, so findet man:

$$\cos ma=q^n\cos n\varphi,\ \sin ma=q^n\sin n\varphi.$$

Um den Werth von $q=\sqrt{R^2+S^2}$ für $k=0$ zu erhalten, multiplicire man die Gleichung

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R+S\sqrt{k-1}$$

mit

$$(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R-S\sqrt{k-1},$$

so erhält man

$$(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}=R^2+S^2-S^2k.$$

Setzt man hier $k=0$, so folgt $q^2=R^2+S^2=1$, $q=1$, und folglich $\cos ma=\cos n\varphi$, $\sin ma=\sin n\varphi$, daher

$$\varphi=\frac{m}{n}a.$$

Nimmt man nun die Werthe, in welche die Reihen R und S für $k=0$ sich verwandeln, so erhält man:

$$\text{XVII)}\ \cos\frac{m}{n}a=\cos a^{\frac{m}{n}}-\left(\frac{m}{n}\right)_2\cos a^{\frac{m}{n}-2}\sin a^2+\left(\frac{m}{n}\right)_4\cos a^{\frac{m}{n}-4}\sin a^4\ldots,$$

$$\sin\frac{m}{n}a=\left(\frac{m}{n}\right)_1\cos a^{\frac{m}{n}-1}\sin a-\left(\frac{m}{n}\right)_3\cos a^{\frac{m}{n}-3}\sin a^3+\left(\frac{m}{n}\right)_5\cos a^{\frac{m}{n}-5}\sin a^5\ldots\ldots$$

Dieses gilt jedoch nur, wenn der Bogen a im ersten Quadranten liegt, wie man sich auf folgende Weise überzeugen kann. Aus

den Gleichungen $\cos ma = \cos n\varphi$ und $\sin ma = \sin n\varphi$ liesse sich allerdings $n\varphi = 2\mu\pi + ma$ folgern, wo μ eine ganze positive oder negative Zahl sein kann. Dieses gäbe $\varphi = \frac{2\mu\pi + ma}{n}$, so dass also die erste der obigen Reihen $= \cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ wäre. Allein dieselbe kann nur einen von den in $\cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ enthaltenen Werthen vorstellen, und da sie für $a = 0$ den Werth 1 hat, so muss auch $\cos\frac{2\mu\pi}{n} = 1$, und folglich $\mu = 0$ sein.

Daher giebt jene erste Reihe den $\cos\frac{m}{n}a$, wenn a spitz ist, und dann kann sie nicht zugleich zur Darstellung von $\cos\frac{m}{n}(2\mu\pi + a)$ dienen. Auch gilt sie nicht mehr für solche Werthe von a, für welche $\cos a$ negativ ist, weil die ganze Rechnung darauf ruht, dass $\cos a$ positiv sei.

§. 8.

Will man nun für die Vieldeutigkeit der Moivreschen Formeln bei gebrochenem Exponenten einen klaren Ausdruck erhalten, so wird man sämmtliche Wurzeln auf eine primitive zurückführen müssen. Es sei x die absolute Grösse des Cosinus eines Winkels A und y bedeute den (positiven oder negativen) Sinus desselben Winkels, so wollen wir die Zurückführung auf diejenige Wurzel des Binoms $(x + iy)^{\frac{m}{n}}$ machen, welche durch

$$x^{\frac{m}{n}} - \left(\frac{m}{n}\right)_1 x^{\frac{m}{n}-2} y^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^{\frac{m}{n}-4} y^4 - \ldots\ldots$$
$$+ i\left(\left(\frac{m}{n}\right)_1 x^{\frac{m}{n}-1} y - \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^{\frac{m}{n}-3} y^3 + \ldots\ldots\right)$$

ausgedrückt wird, wenn man für die gebrochenen Potenzen $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur ihre absoluten Werthe nimmt. Ist a der (positive oder negative) spitze Bogen, der zu x als Cosinus und zu y als Sinus gehört, so ist diese Wurzel nach §. 7. $= \cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a$.

Ferner ist klar, dass für jeden Werth von b

$$(\cos b + i\sin b)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}b + i\sin\frac{m}{n}b,$$

wenn man an den Ausdruck zur Linken nur die Forderung stellt, dass seine $n$te Potenz $= (\cos b + i\sin b)^m$ werden soll. Auch fällt

alle Vieldeutigkeit dieses Ausdruckes hinweg, wenn man nicht bloss die Werthe von $\cos b$ und $\sin b$ im Auge hat, sondern den Werth des Bogens b selbst als einen bestimmten voraussetzt. Denn dann würde zwar die $m$te Potenz von

$$\cos\frac{2\mu\pi+mb}{n}+i\sin\frac{2\mu\pi+mb}{n}$$

immer noch dieselben Werthe von $\cos b$ und $\sin b$, aber verschiedene Werthe von b liefern.

Nun hat man

$$\cos(b+a)+i\sin(b+a)=(\cos b+i\sin b)(\cos a+i\sin a),$$

und wenn man dieses zur Potenz vom Grade $\frac{m}{n}$ erhebt:

$$\text{XVIII)}\quad (\cos(b+a)+i\sin(b+a))^{\frac{m}{n}}$$

$$=(\cos\frac{m}{n}b+i\sin\frac{m}{n}b)\,(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}.$$

Ist aber hier a ein spitzer Bogen, dessen Cosinus $=x$ und dessen Sinus $=y$ ist, und nimmt man $b=2\mu\pi$, so wird zu $2\mu\pi+a$ doch noch x als Cosinus und y als Sinus gehören, und wenn man also $2\mu\pi+a$ mit A bezeichnet, so hat man:

$$\text{XIX)}\quad (\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=(\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n})(x+iy)^{\frac{m}{n}}.$$

So ist der Ausdruck zur Linken in XIX) im Allgemeinen n verschiedener Werthe fähig, so fern man nämlich nur die Werthe von $\cos A$ und $\sin A$, nicht aber zugleich auch den von A berücksichtigt. Geschieht das letztere, so verschwindet natürlich auch die Vieldeutigkeit, und man muss $\mu=0, =1, =2$, u. s. w. nehmen, je nachdem A im $4.0+1$sten, $4.1+1$sten, $4.2+1$sten, u. s. w. Quadranten liegt. Diese Bemerkung ist für den Gebrauch der Formel XIX) nicht ohne Wichtigkeit.

Da aber $\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n}$ die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ vorstellt, so verwandelt sich der Ausdruck XIX) in

$$(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=1^{\frac{m}{n}}(x+y)^{\frac{m}{n}},$$

so dass die Vieldeutigkeit von $(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt wird.

Und weil $(x+iy)^{\frac{m}{n}}=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a$, so verwandelt sich XIX) in

$$(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2m\mu\pi + ma}{n} + i \sin \frac{2m\mu\pi + ma}{n}$$
$$= \cos \frac{m}{n} A + i \sin \frac{m}{n} A,$$

so dass also die allgemeine Giltigkeit der Moivreschen Formeln, die Manche in Zweifel gezogen haben, für diesen Fall gerechtfertigt ist.

Nimmt man nun hierin A oder i negativ, so erhält man

$$(\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n} A - i \sin \frac{m}{n} A,$$

und aus dieser Gleichung endlich mit der vorigen:

$$\cos \frac{m}{n} A = \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2},$$

$$\sin \frac{m}{n} A = \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i};$$

und auch diese Formeln lassen sich noch rechtfertigen, wenn man nur eine solche Verbindung der Wurzeln nimmt, dass das Imaginäre sich hebt. *Sobald man also mit den Ausdrücken*

$$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

$$\text{und } \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

die Bedingung verbindet oder verbinden muss, dass das Imaginäre sich heben soll, so wird man auch den ersten $= \cos ma$, den andern $= \sin ma$ zu setzen haben. *Aber man darf nicht glauben, dass diese Bedingung immer mit jenen Ausdrücken zu verbinden sei;* dieselben sind vielmehr die Stellvertreter noch einer anderen imaginären Form, und wenn uns der Verlauf einer Rechnung auf sie hinführt, so müssen wir uns hüthen, die genannte Bedingung mit ihnen voreilig zu verbinden. Nur wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, oder wenn bei gebrochenem Werthe von $\frac{m}{n}$ der Bogen a im ersten Quadranten liegt, ist der erste jener Ausdrücke allemal unbedingt $= \cos \frac{m}{n} a$, der andere $= \sin \frac{m}{n} a$, denn dann ist mit den

oben genannten Urwerthen von $(\cos A \pm i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ kein anderer Werth von $1^{\frac{m}{n}}$ zu verbinden als die 1.

Die Gleichung XIX) gilt aber nur, wenn $\cos A$ eine positive Grösse ist. Ist $\cos A$ negativ, so wird A im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. positiven oder negativen Quadranten liegen. Man nehme dann in XVIII) $b = (2\mu + 1)\pi$ und setze $(2\mu + 1)\pi + a = A$, so wird immer $\cos A = -x$ und $\sin A = -y$ sein, und man erhält:

$$\text{XX)}\ (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$$

$$= (\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n})\ (x+iy)^{\frac{m}{n}},$$

wo nun $\mu = 0, = 1, = 2$, u. s. w. zu nehmen ist, je nachdem A im $4.0+3$, $4.1+3$, $4.2+3$, u. s. w. Quadranten liegt. Man sieht also, dass wenn die Zurückführung auf die oben bezeichnete Urwurzel von $(x+iy)^{\frac{m}{n}}$ gemacht werden soll, die Verschiedenheit aller n Werthe von $(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch den Factor $\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{m}{n}}$ dargestellt wird. Auch folgt auf gleiche Weise wie oben

$$\cos \frac{m}{n} A + i \sin \frac{m}{n} A = (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}},$$

und zugleich erhellet auch, dass die Ausdrücke

$$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2} = \tfrac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{und}\ \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i} = \frac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$$

nichts anderes als $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ bedeuten, wenn noch die Bedingung hinzugedacht wird, dass in den Wurzelverbindungen das Imaginäre sich heben soll. Ohne diese Bedingung aber giebt es jetzt, wo $\cos A$ negativ ist, ausser für ganze Werthe von $\frac{m}{n}$, keinen Fall, wo man jene Ausdrücke unbedingt mit $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ zu vertauschen sich erlauben dürfte.

Es ist jetzt nur noch nöthig, dass ich die imaginäre Bedeutung der Ausdrücke $\tfrac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$ und $\frac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$ angebe. Zu dem Ende bezeichne man $(\pm 1)^{\frac{m}{n}}$ durch $\eta + i\vartheta$, so hat man

$$U^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(x+iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(\cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a).$$

Wird aber der Bogen A negativ genommen, so wird auch y negativ, und es verwandelt sich U in V. Daher

$$V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(x-iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(\cos\frac{m}{n}a - i\sin\frac{m}{n}a).$$

Daher

$$\tfrac{1}{2}U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2}V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\cos\frac{m}{n}a,$$

$$\frac{1}{2i}U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i}V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\sin\frac{m}{n}a.$$

§. 9.

Ueber die Moivreschen Formeln mit negativem Exponenten ist nur wenig zu sagen übrig. Die Betrachtung lässt sich auch hier mit der allgemeineren Grösse $\sqrt{k-1}$ statt des i beginnen und, man erhält zuletzt ähnliche Resultate, wie bei positiven Exponenten. Denn wenn zuerst m eine ganze Zahl ist, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^m(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}$$
$$= \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(1-k\sin a^2)^m},$$

welches sich nach §. 5. in

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m}$$
$$= \left\{\begin{matrix} \cos ma + Ak + Bk^2 + \ldots. \\ -(\sin ma + A'k + B'k^2 + \ldots.)\sqrt{k-1} \end{matrix}\right\} : (1-k\sin a^2)^m$$

verwandelt, woraus sich alsbald alles Weitere ergiebt.

Ist aber der Exponent ein Bruch $=\frac{m}{n}$, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}.$$

Hier lassen wir nun den Bogen a zuerst im ersten Quadranten liegen und lösen $(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}}$ auf in

$$\cos a^{-\frac{m}{n}} + \left(-\frac{m}{n}\right)_2 \cos a^{-\frac{m}{n}-2}\sin a^2.(k-1) + \ldots.$$

$$+\left\{\begin{matrix}\left(-\frac{m}{n}\right)_1 \cos a^{-\frac{m}{n}-1} \sin a \\ +\left(-\frac{m}{n}\right)_3 \cos a^{-\frac{m}{n}-3} \sin a^3.(k-1\ldots.\end{matrix}\right\}\sqrt{k-1}$$
$$=R'+S'\sqrt{k-1}.$$

Nach §. 7. lässt sich aber $(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}$ in $R-S\sqrt{k-1}$ verwandeln, so dass man also

$$R'=\frac{R}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}},\quad S'=\frac{-S}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}$$

erhält. Daher für $k=0$

$$R'=R=\cos\frac{m}{n}a=\cos(-\frac{m}{n}a),$$

$$S'=-S=-\sin\frac{m}{n}a=\sin(-\frac{m}{n}a).$$

Man sieht hieraus, dass die Reihen in XV) für jeden Werth von m gelten, wenn der positive oder negative Bogen a nur im ersten Quadranten liegt.

Bei $(\cos A+i\sin A)^{-\frac{m}{n}}$ muss man ebenfalls die Reduction auf das Binom $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ machen, wo x die absolute Grösse von $\cos A$ und $y=\sin A$ ist. Man wird da

$$(\cos A+i\sin A)^{-\frac{m}{n}}=(\cos\frac{2m\mu\pi}{n}-i\sin\frac{2m\mu\pi}{n})(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ positiv ist, und

$$(\cos A+i\sin A)^{-\frac{m}{n}}$$
$$=(\cos\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}-i\sin\frac{(2\mu+1)m\pi}{n})(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ negativ ist, erhalten. Unter $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ ist diejenige Wurzel zu verstehen, welche durch

$$x^{-\frac{m}{n}}-\left(-\frac{m}{n}\right)_2 x^{-\frac{m}{n}-2}y^2+\left(-\frac{m}{n}\right)_4 x^{-\frac{m}{n}-4}y^4\ldots.$$

$$+i\left[\left(-\frac{m}{n}\right)_1 x^{-\frac{m}{n}-1}y-\left(-\frac{m}{n}\right)_3 x^{-\frac{m}{n}-3}y^3+\ldots.\right]$$

berechnet wird, indem man für $x^{-\frac{m}{n}}$, $x^{-\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur die

absoluten Zahlenwerthe setzt. Hieraus ist aber klar, dass d
Ausdrücke XIX) und XX) auch für negative Werthe von $\frac{m}{n}$ gel

§. 10.

Zuletzt will ich noch die Anwendung der bisherigen Th
an einem Beispiele zeigen, und zu dem Ende die berüchtigte R

$$U = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a \ldots.$$

wählen, welche Euler als die Entwickelung von $2^n \cos a^n$ gefun
hatte und die nach ihm für alle Werthe von n und a gelten soll
Aber Poisson entdeckte nachher, dass diese Reihe für $n = \frac{1}{3}$
$x = \pi$ nicht mehr richtig sei, und seitdem ist sehr viel über di
Sache verhandelt worden. Mir scheint in der hier gegeb
Theorie die allereinfachste Auflösung der Verwickelung zu lieg

Es sei n überhaupt ein positiver oder negativer Bruch $\frac{p}{q}$ und zuer
$\cos a$ positiv. Der spitze Bogenwerth zu $\cos a$ sei φ, so ist al
gemein, wenn k eine ganze Zahl bedeutet:

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi + i \sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi - i \sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} + i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} - i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$\cos\frac{2p\mu\pi}{q} \pm i\sin\frac{2p\mu\pi}{q} = \binom{R}{R'},$$

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = \binom{P}{P'};$$

und erhalten

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a = RP^{\frac{p}{q} - 2k} + R'P'^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Dadurch verwandelt sich die Reihe

$$U = \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2 \cos\left(\frac{p}{q} - 4\right)a + .$$

$$U=\tfrac{1}{2}R\left(P^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P^{\frac{p}{q}-4}+\ldots\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}R'\left(P'^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P'^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P'^{\frac{p}{q}-4}+\ldots\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}R(P+\tfrac{1}{P})^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'(P'+\tfrac{1}{P'})^{\frac{p}{q}}.$$

Aber man hat

$$P+\tfrac{1}{P}=\cos\varphi+i\sin\varphi+\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}$$

$$=\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos\varphi-i\sin\varphi=2\cos\varphi,$$

und eben so

$$P'+\tfrac{1}{P'}=2\cos\varphi.$$

Unsere Reihe wird also

$$U=\tfrac{1}{2}R(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}=\tfrac{1}{2}(R+R')\,2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

$$\text{d. h. } U=\cos\frac{2p\mu\pi}{q}\,.\,2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

Daher ist allgemein

$$\text{XXI)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{2p\mu\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\cos\frac{p}{q}a+\left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a+\left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a+\ldots$$

und dabei ist $\cos\varphi=\cos a$, und man muss nach §. 8. $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. setzen, je nachdem a im 1sten, 5ten, 9ten, u. s. w. Quadranten liegt. Ist $q=1$, also $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl n, so wird $\cos\frac{2p\mu\pi}{q}=1$, und man erhält die gemeine Reihe

$$2^n\cos a^n=\cos na+n_1\cos(n-2)a+n_2\cos(n-4)a+\ldots,$$

die für positive und negative ganze n allgemein gilt.

Ist nun zum Zweiten $\cos a$ negativ, so wird man setzen müssen.

$$\cos\left(\frac{p}{q}-2k\right)a$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q}-2k\right)(2\mu+1)\pi+i\sin\left(\frac{p}{q}-2k\right)(2\mu+1)a\right](\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q}-2k\right)(2\mu+1)\pi-i\sin\left(\frac{p}{q}-2k\right)(2\mu+1)a\right](\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}+i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}-i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k},$$

unter φ immer denjenigen spitzen Bogen verstanden, der zu $\cos\alpha$ als blosser Zahl gehört. Dadurch erhält man auf gleiche Weise wie vorhin:

$$\text{XXII)}\ 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\cos\frac{p}{q}a+\left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a+\left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a+\ldots.$$

und man muss $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. nehmen, je nachdem a im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. Quadranten liegt. Unter $2^{\frac{p}{q}}$ und $(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ sind immer nur absolute Zahlen zu verstehen.

Nehmen wir nun hier mit Poisson $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$, $a=\pi$, so ist $\cos\varphi=1$, und man erhält, weil $a=\pi$ im 3ten Quadranten liegt und folglich $\mu=0$ ist:

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).1^{\frac{1}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(1+(\tfrac{1}{3})_1+(\tfrac{1}{3})_2+\ldots)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(1+1)^{\frac{1}{3}},$$

welches nun nicht mehr unrichtig ist.

Wird in XXII) $q=1$ genommen, so erhält man abermals die gewöhnliche Reihe. Denn $\cos\varphi^{\frac{p}{q}}$ wird der Grösse nach doch immer $=\cos a^{\frac{p}{q}}$, aber $=+\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei geradem und $=-\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei ungeradem Exponenten. Dagegen wird $\cos\frac{p}{q}(2\mu+1)\pi=-1$ bei ungeradem und $=+1$ bei geradem $\frac{p}{q}$; daher der Werth von XXII) immer $=2^{\frac{p}{q}}\cos a^{\frac{p}{q}}$.

Hätte ich aber anfangs

$$\cos\left(\frac{p}{q}-2k\right)a=\tfrac{1}{2}(\cos a+i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\cos a-i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$

gesetzt und mit diesem Ausdrucke die Rechnung gemacht, ohne mich weiter um die Vieldeutigkeit der Wurzeln zu kümmern, so hätte ich ein nur für Werthe von a im ersten Quadranten passendes Resultat erhalten, eben weil jene Voraussetzung nur für solche Werthe von a passt.

Indessen ist die Formel

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos (n-2) a + n_2 \cos (n-4) a \ldots$$

anfangs, wenn ich nicht irre, auf einem anderen Wege gefunden worden, bei welchem man die klare Uebersicht über die Rechnung verlor. Man setzte

$$u = \cos a + i \sin a,$$
$$v = \cos a - i \sin a,$$

so dass $2 \cos a = u + v$ wird. Dadurch erhielt man

$$2^n \cos a^n = (u+v)^n = u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots,$$

welches sich, weil $uv = 1$ ist, in

$$2^n \cos a^n = u^n + n_1 u^{n-2} + n_2 u^{n-4} + \ldots$$

verwandelt. Weil es aber einerlei ist, ob man $u+v$ oder $v+u$ schreibt, so hat man auf gleiche Weise

$$2^n \cos a^n = v^n + n_1 v^{n-2} + n_2 v^{n-4} + \ldots,$$

und wenn man beide Reihen für $2^n \cos a^n$ addirt:

$$2^n \cos a^n = \frac{v^n + u^n}{2} + n_1 \left(\frac{v^{n-2} + u^{n-2}}{2}\right) + n_2 \left(\frac{v^{n-4} + u^{n-4}}{2}\right) + \ldots$$

Bis hierher ist die Rechnung ohne Tadel und der Ausdruck für jeden Werth von n und a richtig. Nun setzte man aber:

$$\frac{u^n + v^n}{2} = \frac{(\cos a + i \sin a)^n + (\cos a - i \sin a)^n}{2} = \cos na,$$

und beging hier die Unvorsichtigkeit. Wenn n eine ganze positive oder negative Zahl ist, so kann man nur $\cos na$ statt $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, desgleichen auch nur, wenn bei gebrochenem n der Bogen a im ersten Quadranten liegt. Aber wenn im letzteren Falle a den ersten Quadranten überschreitet, so kann man noch etwas Anderes für $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, und womit will man denn beweisen, dass gerade hier in $\frac{u^n + v^n}{2}$ das Imaginäre bei aller Vieldeutigkeit der Wurzeln sich heben müsse (§. 8.). Hiermit aber hat der Streit alle Bedeutung verloren und die analytische Allgemeinheit der Binomialreihe ist auch hier gerechtfertigt.

Doch ich fürchte, dass dieser Aufsatz schon zu lang geworden und schliesse für dies Mal mit folgenden Bemerkungen. Hat man sich denn in diesem Streite wirklich gefragt, was man unter dem Ausdrucke $2^n \cos a^n$ bei gebrochenen Exponenten denken wolle? Wollte man die verschiedenen Werthe von $\cos a^n$ bei gebrochenem n darstellen, so entsprach die Rechnung der Voraussetzung nicht. Setzen wir $\frac{p}{q}$ statt n und bezeichnen $(\pm 1)^{\frac{p}{q}}$ durch $\eta + i\vartheta$. Sei fer-

ner φ der zu $\cos a$ als Zahl gehörige spitze Bogenwerth, so ist $u^{\frac{p}{q}-2k} = (\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$, und wir haben $2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$. Nehmen wir aber a negativ, so wird auch $\sin\varphi$ negativ und man findet

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + ..\right]$$

und wenn man nun beide Reihen addirt, so erhält man, da, wegen des spitzen Werthes von φ, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anderes als $\cos\frac{p}{q}\varphi$ sein kann:

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[\cos\frac{p}{q}\varphi + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)\varphi + \ldots\right],$$

welches eben nichts weiter sagt, als

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = 2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

War der Sinn der oben angegebene, so durfte das Imaginäre aus der Reihe nicht verschwinden.

Wollte man aber die Ausdrücke in XXI) und XXII) erhalten, so hätte man bedenken müssen, dass in $(\cos a)^{\frac{p}{q}}$ selbst noch das Imaginäre steckt, das man aber ganz unberücksichtigt liess und somit gegen den Sinn von i verstiess (§. 5. u. §. 6.), das man fälschlich für eliminirt hielt. Man hätte dann statt der eben angeführten Gleichung

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + ..\right]$$

vielmehr

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

setzen sollen. Wird hier i negativ genommen, so findet sich

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta - i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= (\eta - i\vartheta)\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

und indem man nun beide Reihen addirt, erhält man, da nach §. 8. $(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + (\eta - i\vartheta)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anders als $2\cos\frac{p}{q}a$ ist,

$$2^{\frac{p}{q}}\eta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}=\cos\frac{p}{q}\alpha+\left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)\alpha+\ldots,$$

welches die Ausdrücke in XXI) und XXII) darstellt. Subtrahirt man dieselben Reihen, so erhält man noch

$$\text{XXIII)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\vartheta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\sin\frac{p}{q}\alpha+\left(\frac{p}{q}\right)_1\sin\left(\frac{p}{q}-2\right)\alpha+\left(\frac{p}{q}\right)_2\sin\left(\frac{p}{q}-4\right)\alpha+\ldots,$$

wo nun $\vartheta=\sin\frac{2\mu p\pi}{q}$ oder $=\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}$ gesetzt werden muss, je nachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist.

III.

Ueber eine gewisse Gattung von Aufgaben für Prüfungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den mathematischen Aufgaben, welche sowohl hier als anderwärts zum Gebrauch für Schulen vorgelegt werden, vermisse ich eine gewisse Gattung, die mir namentlich zum Behufe von schriftlichen Prüfungen besondere Vorzüge zu besitzen scheint. Es ist bekannt, wie wenig solche Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen entsprechen, deren Lösung einen besonderen Kunstgriff, einen glücklichen Einfall erfordert, bei dessen Aufsuchung die Schüler vielleicht Stunden zubringen können, ohne ihn dennoch zu finden. So darf man z. B., wenn man etwa bei einer Abiturienten-Prüfung den Ptolemäischen Lehrsatz zum Beweisen vorlegt, — vorausgesetzt, dass dieser im Laufe des Unterrichts selbst nicht vorgekommen ist, — zuverlässig erwarten, dass kaum Einer auf die dazu nöthige Hülfslinie verfallen wird, so dass mithin allen denen, welche sich vergebens darüber abgemühet haben (und diese pflegen gerade die besseren zu sein), die Gelegenheit, den wirk-

lichen Bestand ihrer Kenntnisse zu zeigen, abgeschnitten ist. Von der anderen Seite können aber auch diejenigen Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen nur theilweise genügen, welche im Laufe des Unterrichts wirklich vorgekommen sind; denn hier wird die Lösung zu sehr Gedächtnisssache, und kann zu keinem Urtheil über die gewonnenen Fähigkeiten des Schülers führen.

Von beiden Uebelständen frei scheint mir diejenige Gattung von Aufgaben zu sein, welche ich hiermit in Anregung bringen will. Das Charakteristische dieser Aufgaben besteht darin, dass in ihnen der Zusammenhang zwischen zwei als veränderlich angesehenen Grössen aus einer dem Schüler bekannten Sphäre gegeben, und dabei gefordert wird, während die eine dieser beiden Grössen alle Werthe innerhalb eines gewissen Intervalls durchläuft, die zugehörigen Werthe der andern Grösse anzugeben. Die Lösung dieser Aufgaben erfordert keine besondere Erfindungsgabe von Seiten des Schülers, und dennoch verlangt sie mehr als eine todte Wiederholung vorgetragener Lehren; sie eignet sich demnach in gleicher Weise für den fähigen, wie für den schwachen Schüler, und liefert deshalb auch den besten Massstab zu einer vergleichenden Beurtheilung beider. Ich will einige Aufgaben hersetzen, die sich für schriftliche Abiturienten-Prüfungen eignen möchten, zu welchem Zwecke ich sie theilweise bereits angewandt habe. Dass sie nicht zu leicht sind, darüber glaube ich die Erfahrung aller denkenden Lehrer für mich zu haben. Die Zahl derselben wird jeder Lehrer ohne Mühe vermehren können.

1. Anzugeben, welche Werthe die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2-7x+m=0$ successiv durchlaufen, wenn man m alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen lässt.

2. In derselben Gleichung alle (positiven und negativen) Werthe anzugeben, welche m durchlaufen darf, damit die Wurzeln der Gleichung nicht imaginär werden.

Eine dieser beiden Aufgaben möchte völlig hinreichen, um sich darüber zu versichern, wie ein Schüler die Theorie der quadratischen Gleichungen verstanden hat. Dasselbe gilt von der folgenden dritten Aufgabe in Bezug auf die Begriffe der trigonometrischen Functionen.

3. Anzugeben, welche Werthe der Winkel ψ in der Formel $\tan \psi = 1 + \sin\alpha - \cos\alpha$ allmälig durchläuft, wenn man α allmälig alle Werthe von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt.

4. Anzugeben, was aus den übrigen Bestandtheilen eines Dreiecks wird, wenn man eine Seite und einen ihr anliegenden Winkel ungeändert beibehält, aber den gegenüberliegenden Winkel alle Werthe durchlaufen lässt, deren er fähig ist.

Diese Aufgabe, der sich noch viele andere zur Seite stellen lassen, kann sowohl zu geometrischer als zu trigonometrischer Behandlung vorgelegt werden.

5. **Anzugeben, für welche Werthe von x der Ausdruck $\log \frac{1+x}{1-x}$ im briggischen Systeme successiv die Werthe 0, 1, 2, 3.... bis ∞, sowie -1, -2, -3.... bis $-\infty$ annimmt.**

Auch physikalische Aufgaben lassen sich so behandeln, z. B.

6. **Die Lage des Spiegelbildes von einem gegebenen Objecte in einem sphärischen Convexspiegel anzugeben, bei allen möglichen Entfernungen vom Spiegel, die das Object successiv annehmen kann.**

Ich füge hinzu, dass sich diesen Aufgaben, wenn man sie in den Unterricht selbst hineinziehen will, bequem die Betrachtung von Maximis und Minimis anknüpfen lässt, und darf sie schliesslich allen Lehrern zum Versuche empfehlen.

IV.

Nochmalige Einreden gegen Herrn Doctor Schlömilch.

Von dem

Herrn Doctor **Barfuss** zu Weimar.

---

§. 1.

In dem Aufsatze, in welchem ich die **Moivre**'schen Formeln festzustellen bemüht bin, habe ich zwar die Erklärung abgegeben, dass ich den Weg der Streitschriften verlassen und dagegen die wichtigsten Momente der analytischen Theorien lieber unabhängig von zufälligen Einreden anderer in einem mehr geordneten Vortrage erläutern wollte; allein die beiden, von Herrn Dr. **Schlömilch** gegen mich gerichteten Aufsätze in Theil V. Heft 4. dieses Archives sind durchaus von der Art, dass ein gänzliches Schweigen nicht stattfinden kann. Denn abgesehen von allen Persönlichkeiten, so lassen sich aus jenen Aufsätzen doch einige Bemerkungen herholen, welche

für die Beleuchtung der Theorie nicht ohne Wichtigkeit sind. Ich habe mich über Herrn Dr. Schlömilchs Einreden in der That sehr gefreut, um so mehr, als im Eingange Hoffnung vorhanden schien, dass ein Einverständniss bald möglich sein werde; als ich aber diejenigen Ideen, welche die Seele der ganzen Analysis ausmachen: syntaktische Bedeutungen als Hinterthüren, Einheit der Formen als unglückliche Einbildungen bezeichnet sah, da musste ich die gefasste Hoffnung alsbald wieder aufgeben.

Dass ich diesen Streit um die Methode der unbestimmten Coefficienten und die divergirenden Reihen selbstständig und im Interesse der Wissenschaft unternommen habe und dabei kein blinder Nachbeter bin, wie mir Herr Dr. Schlömilch vorwirft, glaube ich genugsam bewiesen zu haben. Steht denn hier Herr Dr. Schlömilch auf seinen Füssen? Dass ich bei meinen Bestrebungen nicht irren könnte, habe ich nie behauptet, aber ich kann von jedem Anhänger der neueren Theorie dieselbe Ruhe und Würde im Vortrage verlangen, die der verehrte Herr Herausgeber dieses Archives für meine Ansichten zur Bedingung macht. Demselben gebührt hier in der That die grösste Hochachtung und Anerkennung, indem er, obschon gegenwärtig den neueren Ansichten sich zuneigend, dennoch seinem Archive nicht bloss eine einseitige und eben desshalb für die Wissenschaft verderbliche Richtung geben mag. Daher kann ich auch nicht glauben, dass er etwa bloss aus dem Grunde der Vertheidigung der älteren Ansichten hinderlich in den Weg treten werde, weil Herr Dr. Schlömilch alle Discussionen hierüber so lange zu verschieben bittet, bis seine kritischen Werke erschienen sind *). Ich bin der Meinung, dass auch ich kritisire, und habe eben begonnen, meine Ansichten in diesem Archive zur Beurtheilung vorzulegen, und wie nun, wenn ich meinen Gegner bäte, alle Discussionen, ja die Herausgabe seiner Werke, so lange einzustellen, bis meine Erörterungen vollständig abgedruckt sind.

Doch ich will nun zur Sache kommen.

---

*) Für dergleichen mich persönlich betreffende wohlmeinende Aeusserungen meiner geehrten Herrn Mitarbeiter bin ich denselben, wie sich von selbst versteht, jederzeit zu dem grössten Danke verpflichtet, und dieselben müssen, wenn ich nicht ganz die menschliche Natur verleugnen will, natürlich wohlthuend für mich sein. Aus einem in meinem Innersten begründeten eigenthümlichen Gefühl, welches es mir überall und jederzeit wünschenswerth macht, so wenig als nur irgend möglich von mir selbst zu reden und reden zu lassen, habe ich dergleichen Stellen bisher in den Aufsätzen jedoch immer gestrichen, wenn es sich irgend thun liess. In dem vorliegenden Falle ging dies indess, ohne den Sinn und den ganzen Zusammenhang wesentlich zu beeinträchtigen, nicht gut an, weshalb die obige mich persönlich betreffende Stelle hat stehen bleiben müssen. — Ich habe bei der Herausgabe des Archivs lediglich die Absicht, der Sache zu nützen, und bin, auch ohne dass es öffentlich ausgesprochen wird, überzeugt, dass alle diejenigen, welche es mit der Sache wahrhaft wohl meinen, mir ihre Anerkennung für mein redlich gemeintes Streben nicht ganz versagen werden.

G.

§. 2.

Herr Dr. Schlömilch bespricht zuerst meinen Gegenaufsatz Nr. XXV. in Theil IV. dieses Archives und verwirft ganz und gar meine Ansichten (ich bitte die Leser, es nicht übel zu deuten, wenn ich manchmal von einer fremden Erfindung als von der meinigen rede) über die Methode der unbestimmten Coefficienten. Auch ich habe damals einiges Unrecht gehabt, aber nur in so fern, als ich den Gegnern viel zu viel zugab. Die Ansicht, dass die Form der Reihe vorher nothwendig begründet sein müsse, ist durchaus ohne Grund, die frühere Meinung, dass es sich von selbst schon herausstellen werde, ob die Form der Reihe passend gewählt worden sei, ist schlechterdings richtig, und nur einige übel verstandene Beispiele, welche eigentlich mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie dieselbe gewöhnlich aufgefasst wird, gar nichts gemein haben, sind die Schuld der von mir hinzugefügten Beschränkung. Eine gründliche genetische Erklärung der analytischen Reihe, welche ich in einem der nächsten Aufsätze versuchen werde, wird hier alle Zweifel lösen. Eine solche ist meines Wissens noch nie gegeben worden und die älteren Mathematiker haben das Richtige oft mehr gefühlt, als klar gedacht. Daher rühren aber auch manche bodenlose Erklärungsversuche.

Was Herr Dr. Schlömilch in der Theorie der unbestimmten Coefficienten gegen mich auszusetzen hat, erklärt er zum Theil selbst für blosse Caprice, theils ist ihm die Sache noch nicht klar, oder er hat meine Worte übel gedeutet. Ich fragte früher, wo wohl der Erklärungsgrund herzunehmen sei, dass für zwei verschiedene Functionen dieselbe in allen ihren Theilen bestimmte Reihe gefunden werden könne. Darauf antwortet mir Herr Doctor Schlömilch, es sei die Reihe

$$1-1+1-1+\ldots.$$

nicht nur die Entwickelung von

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots.,$$

sondern auch von

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=1-x^2+x^3-x^5+\ldots.$$

und allgemein von

$$\frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{m-1}}{1+x+x^2+\ldots.+x^{n-1}}$$
$$=1-x^m+x^n-x^{m+1}+x^{2n}-x^{m+2n}+\ldots.$$

für $x=1$, und darum sei ja $1-1+1-1+\ldots.$ etwas ganz Unbestimmtes $=\frac{m}{n}$. Hier liesse uns auch La Grange im Stiche. — Ich überlasse es nun dem Publikum, zu beurtheilen, ob dieses auf meine Erörterung passt. Die Erklärung von La Grange ist freilich nur aus der Luft gegriffen, ich aber mache die Hinterthür auf und flüchte mich zur analytischen Bedeutung der Reihe.

Was uns Herr Dr. Schlömilch hier sagt, ist uns längst bekannt, aber wir meinen keine divergirende Reihe, die wir so auf das Papier schreiben und mit einer gewissen Selbstgefälligkeit ansehen, sondern eine Reihe mit syntaktischer Bedeutung, und wenn nun die Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die syntaktische Bedeutung von $1-x+x^2-x^3+\ldots.$ hat, so ist ihre Summe $=\frac{1}{2}$ und keine andere. Man muss es Herrn Dr Schlömilch Dank wissen, dass er diese Sache schon jetzt angeregt hat; bei meinen nur langsam vorwärts schreitenden Arbeiten wäre sie viel später zur Sprache gekommen. Da aber hierdurch eben ein grosses Licht über die Frage verbreitet wird, so entschloss ich mich zur Herausgabe dieses Aufsatzes.

Herr Dr. Schlömilch hätte nur etwas weiter gehen sollen, um die grosse Schönheit in der allgemeinen Theorie der Reihen zu begreifen, gegen die er mit diesem Argumente zu Felde zieht. Er würde dann gefunden haben, dass sie kein leeres Spiel sei, sondern weit reichere Früchte tragen könne, als die Reihentheorie mit der gegenwärtigen Beschränkung.

§. 3.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern und um zugleich über den von Herrn Dr. Schlömilch angeregten Zweifel die gehörige Rechenschaft zu geben, wähle ich ein Beispiel aus dem mathematischen Lexicon (Bd. V. Abth. 1. Art. Umformung). Daselbst wird die convergirende Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\ldots.$$

so umgeformt, dass sie convergenter wird. Da

$$a+nb=a+b+(n-1)b=a+2b+(n-2)b=a+3b+(n-3)b$$
u. s. w.,

so folgt leicht

$$\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+nb)}$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\cdot(n-1)b}{a(a+b)(a+nb)}$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\cdot(n-1)b}{a(a+b)(a+2b)}-\frac{nb\cdot(n-1)b\cdot(n-2)b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\ldots$$
$$\pm\frac{nb\cdot(n-1)b\ldots.2b\cdot b}{a(a+b)(a+2b)\ldots.(a+nb)}.$$

Wird nun in der Reihe S statt jedes Gliedes seine Auflösung nach diesem Gesetz substituirt, so erhält man leicht

$$S=\frac{1}{a}$$
$$-\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+b)}$$

$$+\frac{1}{a}-\frac{2b}{a(a+b)}+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b}$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{3b}{a(a+b)}-\frac{2b.3b}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$

u. s. w.

oder

$$S=\frac{1}{a}(1-1+1-1+\ldots)$$

$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2+3-4+5-\ldots)$$

$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3+6-10+\ldots)$$

$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4+10-\ldots)$$

u. s. w.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist nun

$$1-1+1-1+\ldots=\tfrac{1}{2},$$

$$1-2+3-4+\ldots=\tfrac{1}{4},$$

$$1-3+6-10+\ldots=\tfrac{1}{8},$$

u. s. w.

Daher

$$S=\tfrac{1}{2}.\frac{1}{a}+\tfrac{1}{4}.\frac{b}{a(a+b)}+\tfrac{1}{8}.\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$

$$+\frac{1}{16}.\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\ldots$$

Was nun Herr Dr. Schlömilch gegen diese Rechnung einwenden wird, ist leicht zu sehen, aber die Richtigkeit des Resultates wird er nicht läugnen können. Aber eben diese Richtigkeit des Resultates hat doch wohl Gewicht genug, um nicht die divergirenden Reihen für puren Unsinn zu erklären.

Die Reihe $1-1+1-1+\ldots$ hat in obiger Rechnung allerdings keine bestimmte syntaktische Bedeutung und daher auch keine bestimmte Summe. Ist das die Meinung des Herrn Doctor Schlömilch, so sind wir alle einig mit ihm. Weil aber eben jene Reihe keine syntaktische Bedeutung hat, so legte der Urheber dieser Rechnung eine solche hinein, indem er ihr die Bedeutung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots$ gab, so dass $1-1+1-\ldots=\frac{1}{2}$ wird. Aber eben dadurch gab er auch allen übrigen Reihen ihre syntaktischen Bedeutungen und hat dieselben treu bewahrt, so dass die ganze Rechnung richtig werden musste. Denn indem er der Reihe $1-1+1-1+\ldots$ die Bedeu-

tung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots.$ gab, ging er eigentlich von der speciellen Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}\ldots.$$

zu der allgemeineren

$$U=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^4}{a+3b}\ldots.$$

über, deren Summe ganz nach demselben Verfahren so gefunden wird:

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{a}(1-x+x^2-x^3+\ldots.)x\\&+\frac{b}{a(a+b)}(1-2x+3x^2-4x^3\ldots.)x^2\\&+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3x+6x^2-10x^3\ldots.)x^3\\&+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4x+10x^2\ldots.)x^4\end{aligned}$$

u. s. w.,

d. h. nämlich

$$U=\frac{1}{a}.\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{b}{a(a+b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\ldots.$$

woraus zugleich hervorgeht, dass die umgeformte Reihe selbst dann noch brauchbar ist, wenn die Urreihe schon divergirt. Also dadurch, dass der Urheber dieser Rechnung $1-1+1-\ldots.=\frac{1}{2}$ setzte, entstand die Nothwendigkeit $1-2+3-4+\ldots.=\frac{1}{4}$, $1-3+6-10+\ldots.=\frac{1}{8}$ zu nehmen. Dies mag sich Herr Dr. Schlömilch überlegen, um die Hinterthür zu begreifen, welche in der syntaktischen Bedeutung liegt.

Aber derselbe wird sagen, ja wenn ich nun der Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die syntaktische Bedeutung von $1-x^2+x^3-x^5+\ldots = \frac{1+x}{1+x+x^2}$ gegeben und sie $=\frac{2}{3}$ genommen hätte? Das hätte ganz frei gestanden, denn dadurch hätten nun auch die übrigen Reihen eine ganz andere Bedeutung erhalten, $1-2+3-4+\ldots.$ die von $1-2x^2+3x^3-4x^5+\ldots.$ u. s. w., indem dann ein Aufsteigen von der besonderen Reihe S zu der allgemeineren

$$V=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^5}{a+3b}\ldots.$$

statt gefunden hätte. Man hätte dann zwar eine ganz andere Umbildung von S erhalten, aber dieselbe muss immer noch den Werth von S haben. Die Reihe S kann ein specieller Fall von

unzählich vielen verschiedenen Functionen sein, so wie auch jede Zahl in unzähligen Functionsformen enthalten sein kann. Man begreift, wie unendlich viel aus dieser Theorie fliessen kann: Reihenumbildungen der verschiedensten Art, bestimmte Integrale u. s. w.

Also nicht die Convergenz entscheidet über den Werth einer Reihe, sondern allgemeiner die syntaktische Bedeutung, und wo man diese in der Gewalt hat, ist jene ein unnützer Zusatz. Keine specielle Reihe hat aber an sich eine syntaktische Bedeutung, mag sie nun con- oder divergiren, sondern diese Bedeutung erhält sie erst durch eine gewisse Nothwendigkeit der Rechnung oder sie wird, wie im vorigen Beispiele, willkührlich hineingetragen. Die convergirende specielle Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}\ldots.$$

kann ein specieller Fall von

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7\ldots$$

oder von

$$\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x\ldots.$$

und von unzähligen anderen Reihen sein, obschon sie immer nur der besimmten Zahl $\frac{\pi}{4}$ gleich ist.

Hiermit darf man aber die Fälle nicht verwechseln, wo, wie manchmal geschieht, der Werth einer Reihe in derselben syntaktischen Bedeutung zweifelhaft wird. Die Rechnung mit solchen Reihen wird dann nur einseitige Resultate liefern, wenn sie nicht mit Rücksicht auf den Complex aller Werthe geführt wird, wie ich dies bereits schon nachgewiesen habe. Doch für diesmal genug hiervon.

§. 4.

Selbst die einfachsten analytischen Theorien können gefährlich werden, wenn man nicht die gehörige Vorsicht gebraucht. Ich übergehe das, was Herr Dr. Schlömilch in seiner ersten Gegenschrift (Thl. V. Nr. XXX.) weiter vorträgt, weil man dem verehrten Herrn Herausgeber unmöglich zumuthen kann, den Raum mit nutzlosem Gezänk zu verschwenden. Ich unterlasse es auch, den Vorschlag näher zu prüfen, wornach Herr Dr. Schlömilch für divergirende Reihen nicht das Gleichheitszeichen gebrauchen, sondern dafür lieber das astronomische Zeichen des niedersteigenden Knotens schreiben will. Er erkennt damit doch wenigstens eine Beziehung zwischen Urform und Reihe an, wenn gleich die Art, wie er die Beziehung aufzufassen scheint, die Verbindung aller möglichen Reihen mit jeder beliebigen Grösse gestattet. Aber einen Punkt kann ich nicht mit Stillschweigen übergehen, die Philosophie nämlich, mit welcher Herr Dr. Schlömilch für den Ausdruck $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1-x^n}$, und insbesondere auch für $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ einen reellen Werth erzwingen will.

Das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ ist diejenige Function $F(x)$ von x, deren Differential $=f(x)$ wird; das bestimmte Integral $\int_a^b f(x).dx$ ist dann $=F(b)-F(a)$.

Unter dieser Ansicht habe ich $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ für einen arithmetischen Unsinn erklärt, weil es den Logarithmen einer negativen Zahl enthält und also imaginär wird. So ist z. B. $\int \frac{dx}{1-x^3}=$ $\frac{1}{3}\log(1-x)+\frac{1}{6}\log(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, was von $x=0$ bis $x=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log(-1)$ giebt. Hier lehrt mich nun Herr Doctor Schlömilch den imaginären Logarithmen reell zu machen; es sei nämlich $\log(-1)=\frac{1}{2}\log(-1)^2=\frac{1}{2}\log 1=0$, und daher $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Dieses ist ein wahres Universalmittel, das Unmögliche möglich zu machen. Ich weiss nun, dass die Wurzel $1+\sqrt{-1}$ der Gleichung $x^3-2x+2=0$ nicht imaginär ist, denn ich habe $\sqrt{-1}$ $=\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{1}=1$.

Herr Doctor Schlömilch giebt sich viel Mühe, von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus das Imaginäre in obigen Formeln weg zu disputiren und findet den Grund aller unserer Irrungen in der unglücklichen Idee von der Einheit der Form. Wir haben diese Idee für eine nothwendige in der mathematischen Analysis gehalten, ohne welche letztere gar nicht denkbar ist. Wir haben geglaubt, dass dieser Idee alle allgemeineren Algorithmen ihre Entstehung verdanken, dass aus ihr die Lehre von den entgegengesetzten Grössen hervorging, dass in ihr die imaginären Grössen ihren Grund haben; nun aber müssen wir diese Lieblingsidee aufgeben und auf die kritischen Werke des Herrn Dr. Schlömilch warten!

Wissen Sie, Herr Doctor Schlömilch, dass nimmermehr unbedingt $\log(-a)=\frac{1}{2}\log(-a)^2$ ist, sondern es enthält $\log(-a)$ nur den einen imaginären Werth von $\log(-a)^2$, statt dessen Sie nun den reellen nehmen, wie es eben Ihre Kritik erfordert. Dadurch erzwingen Sie eine Formel, deren klares Verständniss Sie zugleich verlieren. Die Analysis fragt nichts nach Ihrer Formel

$$\int_a^b f(x).dx=\delta\,[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+(n-1)\delta)],$$

$$\delta=\frac{b-a}{n}$$

und es ist dieselbe nicht einerlei mit obigem $F(b)-F(a)$, nicht einmal in allen Fällen, wo das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ immer reell ist. Es sei $y=\frac{b^3}{(a-x)^2}$ die Gleichung einer Curve mit

rechtwinklichen Coordinaten, so ist das Differential der Fläche $ds = ydx = \frac{b^3dx}{(a-x)^2}$, also $s = \frac{b^3}{a-x} + \text{Const.}$ Dieses giebt von $x=0$ bis $x=2a$ den Werth $-\frac{b^3}{2a}$, während obige Näherungsformel *) auf das Unendliche führt.

Doch ich enthalte mich jetzt des Weiteren und bemerke nur noch, dass die Analysis nicht bald $1-x$ bald $x-1$ machen darf, um einen Logarithmus, der sich unter der Rechnung als unmöglich ergiebt, reell zu machen. Auch darf sie nicht statt einer Form A eine andere B setzen, die mehrdeutig ist als A, und sich dann aus B einen Werth nach Gefallen auslesen.

§. 5.

Doch dieser Streit bezog sich zunächst nur auf die Art, nach welcher Herr Dr. Schlömilch die Integration durch eine Reihe mit der Formel $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0$ verglich. Nach seiner Art, die Sache zu betrachten, giebt auch die divergirende Reihe noch das richtige Resultat, weil eben $\log(-1) = 0$ ist. Mit solcher Kritik will man uns also den Gebrauch der divergirenden Reihen nehmen! will man uns nöthigen, bogenlange Rechnungen zu lesen, die wir mit ein Paar Zeilen abmachen können. Die Wissenschaft mag auf der Huth sein, dass sie die Uebersicht über sich nicht verlieren lässt. Will man eine Theorie widerlegen, so reicht es nicht hin, Exempel auf Exempel zu häufen, die man nach Principien erklären will, welche die Theorie selbst als falsch zurückweist. Herr Dr. Schlömilch wird dann auch einsehen, dass eine Summe unendlich vieler Glieder und eine Entwickelung im Allgemeinen sehr verschiedene Dinge sind und dann die Kraftlosigkeit vieler seiner Waffen von selbst fühlen, mit denen er die Theorie bekämpfen will. Er wird dann vielleicht auch meinen Satz von der Convergenz der entwickelten Reihe, d. h. derer, welche ich als die Entwickelung einer Function kenne, dann

*) Hier muss ich mir, wenn auch gegen mein sonst stets befolgtes Princip, doch einmal eine Bemerkung zu machen erlauben, da nach meiner Ansicht die obige, für die ganze Analysis höchst wichtige Formel (oder vielmehr Gleichung) durchaus keine blosse Näherungsformel, sondern vielmehr eine ganz genaue, in völliger Strenge geltende Gleichung ist, wenn man nur, wie es eine strenge Behandlung der Analysis erfordert, das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ als die Gränze betrachtet, welcher die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, also δ in's Unendliche abnimmt. Ich mache diese Bemerkung hier namentlich und eigentlich zunächst bloss deshalb, weil ich mir vorgenommen habe, den wichtigen Gebrauch der obigen Gleichung bei verschiedenen Untersuchungen, wenn dieselben mit völliger Strenge geführt werden sollen, in einigen kleinen gelegentlichen Aufsätzen unter den Miscellen nachzuweisen. M. s. übrigens auch meine Abhandlung Thl. II. Nr. XXV. S. 275.

G.

nicht so sinnlos finden. — Die Reihe convergirt, wenn ihre Summe, im arithmetischen Verstande, dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, sich mehr und mehr nähert, je mehr man Glieder nimmt. Fassen wir das in der Totalität zusammen, so lässt sich sagen: die Reihe convergirt, wenn die Summe ihrer unendlich vielen Glieder dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, gleich ist. Dieses findet immer dann statt, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden klein werden, wie Herr Doctor Schlömilch an dem bestimmten Integrale, das er zum Gegenbeweis anführen will, beispielsweise hätte sehen können. Und der Satz scheint so lange zu bestehen, als man nicht verhindern kann, dass eine Function in gewissen Fällen unendlich werde.

Doch es ist nicht abzusehen, wozu die längere Unterredung führen könnte. Denn was sollen wir sagen, wenn uns ein Mathematiker eine philosophisch-kritische Bearbeitung der Analysis verspricht, und im Voraus bemerkt, dass das Unendliche eine Auflösung der Gleichung $f(m)f(n)=f(m+n)$ sei? Oder wenn er uns die Reellität von $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ dadurch begreiflich machen will, dass logarithmische Integrale durch den Werth einer gewissen Constante imaginär werden, obschon sie reell sind. Hier müssen wir jedesfalls die näheren Erläuterungen erwarten, die uns Herr Dr. Schlömilch von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus geben will; einstweilen wollen wir uns nur vorbehalten, die Dinge nach unserer Weise betrachten zu dürfen.

V.

Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^m x \, dx$.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

So viel man sich mit dem Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx$$

und den daraus entspringenden analytischen Betrachtungen beschäftigt hat, so wenig Aufmerksamkeit scheint man dem allgemeineren Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^m x\,dx\ \ldots\ldots (1)$$

geschenkt zu haben, obgleich dasselbe bei verschiedenen analytischen Untersuchungen vorkommt. Es möge daher in diesen Zeilen ein kleiner Beitrag zu einer Theorie desselben folgen, der sich indessen auf den Fall beschränkt, dass m eine positive ganze Zahl >1 ist.

I.

Wendet man die bekannte Reduktionsformel

$$\int u v dx = u\int v dx - \int du \int v dx$$

auf das Integral (1) für $u=\sin^m x$, $v=e^{-ax}$ an, so erhält man

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}dx = \sin^m x \int e^{-ax}dx - m\int \sin^{m-1}x\cos x\,dx \int e^{-ax}dx$$
$$= -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} + \frac{m}{a}\int \sin^{m-1}x\cos x\, e^{-ax}dx \ldots\ (2)$$

Benutzt man die genannte Reduktionsformel noch einmal für das auf der rechten Seite vorkommende Integral, indem man

$$u=\sin^{m-1}x\cos x,\ v=e^{-ax}$$

setzt, so ist

$$\int \sin^{m-1}x\cos x\, e^{-ax}dx = \sin^{m-1}x\cos x\int e^{-ax}dx$$
$$-\int [(m-1)\sin^{m-2}x\cos^2 x - \sin^m x]\,dx \int e^{-ax}dx;$$

oder, wenn man bemerkt, dass $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ ist:

$$\int \sin^{m-1}x\cos x\, e^{-ax}dx = \sin^{m-1}x\cos x\int e^{-ax}dx$$
$$-\int [(m-1)\sin^{m-2}x - m\sin^m x]dx\int e^{-ax}dx$$
$$= -\frac{1}{a}\sin^{m-1}x\cos x\, e^{-ax}$$
$$+\frac{m-1}{a}\int \sin^{m-2}x\, e^{-ax}dx - \frac{m}{a}\int \sin^m x\, e^{-ax}dx.$$

Substituiren wir diess in die Gleichung (2), so wird

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} - \frac{m}{a^2}\sin^{m-1}x\cos x\, e^{-ax}$$
$$+\frac{m(m-1)}{a^2}\int \sin^{m-2}x\, e^{-ax}dx - \frac{m^2}{a^2}\int \sin^m x\, e^{-ax}dx,$$

und wenn wir hier das Integral

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

als Unbekannte ansehen und algebraisch bestimmen, so erhalten wir

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= -\frac{a \sin x + m \cos x}{a^2 + m^2} \sin^{m-1} x\, e^{-ax} + \frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \int \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\, dx.$$

Diese Reduktionsformel führt unser Integral auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von $\sin x$ um 2 erniedrigt ist. Gehen wir zur Gränze für wachsende und ebenso zu der für abnehmende x über, so ist im ersten Falle

$$\operatorname{Lim} e^{-ax} = 0,$$

sobald a positiv bleibt, und im zweiten, wegen $m > 1$,

$$\operatorname{Lim} \sin^{m-1} x = 0,$$

folglich

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx = \frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \int_0^\infty \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\, dx.$$

Mit Hülfe dieser Reduktionsformel kann man für jedes ganze positive m den Werth des Integrales auf der linken Seite finden. Durch mehrmalige Anwendung derselben ergiebt sich nämlich, wenn $2p$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx =$$

$$\frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \cdot \frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2} \cdots \frac{(m-2p+2)(m-2p+1)}{a^2+(m-2p+2)^2} \int_0 \sin^{m-2p} x\, e^{-ax} dx.$$

Ist nun m gerade, so kann man $2p = m$ nehmen, wodurch das letzte Integral in

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx$$

übergeht, dessen Werth bekanntlich $\frac{1}{a}$ ist. Man hat dann

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax} dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \cdot \frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2} \cdots\cdots \frac{2.1}{a^2+2^2} \cdot \frac{1}{a}$$

oder

$$\left.\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax} dx = \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (m-1)m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)\ldots\ldots(a^2+m^2)} \right\} \ldots\ldots(3)$$

Ist aber m ungerade, so kann man $2p = m-1$ nehmen, wodurch das letzte Integral

$$=\int_0^\infty \sin x\, e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2+1^2}$$

wird. Es ist in diesem Falle

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \cdot \frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2} \cdots \frac{3.2}{a^2+3^2} \cdot \frac{1}{a^2+1^2}$$

oder

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax} dx = \frac{1.2.3.4.\ldots(m-1)m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)\ldots(a^2+m^2)} \quad \ldots (4)$$

Man kann die Werthe unseres Integrales auch noch auf einem ganz anderen Wege finden. Man hat nämlich für jedes gerade m:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \sin^m x = m_0 \cos mx - m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2x + (-1)^{\frac{m}{2}} \tfrac{1}{2} m_{\frac{1}{2}m},$$

wobei m_1, m_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten m bedeuten. Multiplizirt man diese Gleichung mit

$$e^{-ax}\, dx$$

und integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= m_0 \int_0^\infty \cos mx\, e^{-ax}\, dx - m_1 \int_0^\infty \cos(m-2)x\, e^{-ax}\, dx + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1} \int_0^\infty \cos 2x\, e^{-ax}\, dx + (-1)^{\frac{m}{2}} \tfrac{1}{2} m_{\frac{1}{2}m} \int_0^\infty e^{-ax} dx,$$

und wenn man den Werth jedes Integrales nach der allgemeinen Formel

$$\int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

bestimmt:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx \\
&= \frac{m_0 a}{a^2+m^2} - \frac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2} - \ldots \\
&+ \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1}\, a}{a^2+2^2} + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m}}{2a}
\end{aligned}
\right\} \ldots\ldots (5)
$$

womit der Werth des Integrales für gerade m gefunden ist.

Für ungerade m hat man bekanntlich

$$
(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \sin^m x = m_0 \sin mx - m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x - \ldots
$$

$$
+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin x,
$$

mithin durch Multiplikation mit

$$
e^{-ax}dx
$$

und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$
(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax} dx
$$

$$
= m_0 \int_0^\infty \sin mx e^{-ax}\, dx - m_1 \int_0^\infty \sin(m-2)x e^{-ax}\, dx + \ldots\ldots
$$

$$
+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \int_0^\infty \sin x e^{-ax}\, dx;
$$

oder, wenn man die einzelnen Integrationen rechts nach der allgemeinen Formel

$$
\int_0^\infty \sin bx\, e^{-ax} dx = \frac{b}{a^2+b^2}
$$

ausführt:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \int_0^\infty \sin^m x e^{-ax}\, dx \\
&= \frac{m_0 m}{a^2+m^2} - \frac{m_1 (m-2)}{a^2+(m-2)^2} \quad \frac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2} - \ldots\ldots \\
&\ldots + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \cdot 1}{a^2+1^2}
\end{aligned}
\right\} \ldots\ldots (6)
$$

womit der Werth des Integrales für jedes ungerade m gefunden ist.

Multiplizirt man die Gleichung (3) mit $(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}$, ebenso (4) mit

$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}$ und vergleicht sie darauf mit den Resultaten unter (5) und (6), so erhält man folgende zwei rein algebraische Relationen: für jedes gerade m:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}.1.2.3.......m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2).....(a^2+m^2)} \\ = \dfrac{m_0 a}{a^2+m^2} - \dfrac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2} + \dfrac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2} - \dots \\ + \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1} a}{a^2+2^2} + \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m}}{2a} \end{array}\right\} \dots\dots (7)$$

und für jedes ungerade m:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}.1.2.3......m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2).....(a^2+m^2)} \\ = \dfrac{m_0 m}{a^2+m^2} - \dfrac{m_1(m-2)}{a^2+(m-2)^2} + \dfrac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2} - \dots\dots \\ + \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}.1}{a^2+1^2}. \end{array}\right\} \dots\dots (8)^{*)}$$

II.

Wir wollen nun noch einige Anwendungen der gefundenen Formeln mittheilen.

Hat man Gleichungen von folgender Form:

$$\varphi(x) = A_0 + A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x + \dots,$$
$$\psi(x) = A_1 \sin x + A_3 \sin^3 x + A_5 \sin^5 x + \dots$$

und gelten dieselben für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\infty$, so kann man dieselben auch mit $e^{-ax}dx$ multipliziren und zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ integriren, so dass man die neue Gleichung erhält:

$$\int_0^\infty \varphi(x) e^{-ax} dx$$
$$= A_0 \int_0^\infty e^{-ax} dx + A_2 \int_0^\infty \sin^2 x e^{-ax} dx + A_4 \int_0^\infty \sin^4 x e^{-ax} dx + \dots$$

und

$$\int_0^\infty \psi(x) e^{-ax} dx$$
$$= A_1 \int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx + A_3 \int_0^\infty \sin^3 x e^{-ax} dx + A_5 \int_0^\infty \sin^5 x e^{-ax} dx + \dots$$

*) Liessen sich diese beiden Sätze wohl auch auf elementarem Wege beweisen?

Hier lassen sich die Werthe sämmtlicher Integrale auf der jedesmaligen rechten Seite mit Hülfe der Formeln (3) und (4) angeben, und hierdurch gelangt man zur Kenntniss eines bestimmten Integrales, wenn man die Integration auf der linken Seite sonst nicht zu bewerkstelligen weiss, dagegen zur Kenntniss einer Reihensumme, wenn man auf anderem Wege den Werth des Integrales links in geschlossener Form angeben kann. Z. B. Aus der für jedes beliebige x und gerade m geltenden Gleichung

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \ldots$$

folgt durch Anwendung des obigen Prinzips der Multiplikation mit $e^{-ax}dx$ und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \cos mx e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx - \frac{m^2}{1.2} \int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-ax}\, dx$$
$$+ \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} \int_0^\infty \sin^4 x e^{-ax} dx - \ldots$$

d. i.

$$\frac{a}{a^2+m^2} = \frac{1}{a} - \frac{m^2}{1.2} \cdot \frac{1.2}{a(a^2+2^2)} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)} - \ldots;$$

oder wenn man beide Seiten mit a multiplizirt, von 1 abzieht und mit m^2 dividirt:

$$\frac{1}{a^2+m^2}$$
$$= \frac{1}{a^2+2^2} - \frac{m^2-2^2}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)} + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)} - \ldots \quad (9)$$

gültig für jedes gerade $m>0$.

Wendet man das nämliche Verfahren auf die für jedes ungerade m geltende Gleichung

$$\sin mx = \frac{m}{1} \sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots$$

an, so erhält man ähnlich:

$$\frac{1}{a^2+m^2}$$
$$= \frac{1}{a^2+1^2} - \frac{m^2-1^2}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)} - \ldots \quad (10)^{*})$$

für jedes ungerade m.

*) Könnte man diese Sätze auch algebraisch beweisen?

Auch von den Formeln (7) und (8) lassen sich einige bemerkenswerthe Anwendungen machen. Man schreibe nämlich in (7) x für a, multiplizire mit $\sin\gamma x\,dx$ und integrire zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist, $1.2.3\ldots.m$ kurz mit m' bezeichnet:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} m' \int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots.(x^2+m^2)}$$
$$= m_0 \int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+m^2}dx - m_1 \int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+(m-2)^2}dx + \ldots.$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1} \int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+2^2}dx + (-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m} \int_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{2x}dx,$$

woraus man unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x+k^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\gamma k}$$

die für jedes gerade m geltende Gleichung erhält:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} m' \int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots.(x^2+m^2)} \\ = \frac{\pi}{2}\left\{ m_0 e^{-m\gamma} - m_1 e^{-(m-2)\gamma} + m_2 e^{-(m-4)\gamma} - \ldots \right. \\ \left. \ldots. + (-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1} e^{-2\gamma} + (-1)^{\frac{m}{2}} \tfrac{1}{2} m_{\frac{1}{2}m} \right\} \end{array}\right\} \ldots.. (11)$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (8) x für a, multiplizirt mit $\cos\gamma x\,dx$, integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ und bringt rechts die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\gamma x}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2k}e^{-\gamma k}$$

für $k=m,\ m-2,\ m-4,\ \ldots\ 3,\ 1$ in Anwendung, so erhält man eben so leicht für jedes ungerade m:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} m' \int_0^\infty \frac{\cos\gamma x\,dx}{(x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots.(x^2+m^2)} \\ = \frac{\pi}{2}\left\{ m_0 e^{-m\gamma} - m_1 e^{-(m-2)\gamma} + m_2 e^{-(m-4)\gamma} - \ldots. \right. \\ \left. \ldots. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} e^{-\gamma} \right\} \end{array}\right\} \ldots (12)$$

welche Gleichung das Correlat zu der (11)ten bildet.

VI.

Ueber das von Herrn Clausen auf S. 279. Theil V. Heft 2. angegebene Theorem.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der Satz, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$

$$=\frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3}, 0, -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3}$$

ist, je nachdem n der Form

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

angehört, ist nur ein spezieller Fall eines bereits bekannten allgemeineren Theoremes.

Man hat nämlich für jedes ganze positive m

$$2\cos mx=(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6}+\ldots.$$

Daraus folgt für $x=\frac{\pi}{3}$:

$$2\cos\frac{m\pi}{3}=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-3)}{1.2}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}+\ldots.$$

oder

$$\frac{1-2\cos\frac{m\pi}{3}}{m}=1-\frac{m-3}{2}+\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}-\ldots$$

Setzt man noch $m=n+3$, so wird $\cos\frac{m\pi}{3}=\cos(\frac{n\pi}{3}+\pi)$ $=-\cos\frac{n\pi}{3}$, folglich

$$\frac{1}{n+3}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$=1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.,$$

woraus man sogleich das Clausen'sche Theorem erhält, wenn man der Reihe nach $n=6v$, $6v+1$, 2, 3, 4, 5 nimmt, worin v eine ganze positive Zahl bedeutet.

Ein ganz ähnliches Theorem lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{\sin mx}{\sin x}$$
$$=(2\cos x)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos x)^{m-5}-\ldots$$

ableiten. Setzt man hier $x=\frac{\pi}{3}$ und $m=n+2$, so wird

$$\frac{\sin\frac{n+2}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots$$

Daraus ergiebt sich, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots.$$
$$=+1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ +1$$

ist, je nachdem n unter der Form

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

steht, worin v eine ganze positive Zahl bedeutet.

VII.

Ueber die Construction der Normalen, Tangenten und Krümmungshalbmesser an solchen Curven, welche durch einen Punkt beschrieben werden, der mit zwei andern nach einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Punkten fest verbunden ist.

Von dem
Herrn Professor Doctor Stegmann
an der Universität zu Marburg.

In dem Journal „L'Institut" fanden sich in den letzten Nummern des vorigen Jahrganges, nämlich Nr. 573 und Nr. 574, zwei kurze Berichte über eine von Herrn Abel Transon ersonnene und der Société philomatique zu Paris in den Sitzungen vom 30. November und 14. December 1844 vorgetragene Methode zur Bestimmung der Krümmungshalbmesser bei solchen Curven, welche entstanden sind (oder angesehen werden können als entstanden) durch Bewegung eines Punkts, der mit zwei andern sich auf gegebenen Curven bewegenden Punkten fix verbunden ist. Diese Methode ist nicht allein an und für sich so sinnreich und ihre Anwendung in den geeigneten Fällen so förderlich und die andern bekannten Mittel übertreffend, sondern auch ein Paar Lehrsätze, auf welche sie gestützt ist, sind so interessant, dass es zu bedauern sein würde, wenn in Deutschland die Aufmerksamkeit der Geometer sich nicht darauf hingerichtet hätte. Zugleich aber sind die Andeutungen, welche das genannte Journal darüber macht, so kurz und die Beweise so unterdrückt, dass man nicht leicht auf den ersten Blick das Ganze zu durchschauen vermag. Aus diesen Gründen erscheint vielleicht die Mittheilung der folgenden Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht unnütz.

§. 1.

Wir nehmen an, ein System von Punkten, welche in einer Ebene liegen und eine unveränderliche Lage gegen einander behalten sollen, also sämmtlich als Punkte einer ebenen Figur gedacht werden können, bewege sich in seiner Ebene nach irgend einem Gesetze. Sind dabei die Linien bekannt, in welchen zwei der angenommenen Punkte fortzurücken genöthigt sind, so werden sich offenbar auch alle andern Linien, die von den übrigen Punkten beschrieben werden, vollkommen bestimmen lassen, weil jeder dritte Punkt des Systems, sobald man ihn mit den beiden zuerst gedachten Punkten verbindet, in jedem Augenblicke die dritte Ecke eines gegebenen, unveränderlichen Triangels bildet. Wenn, um eines besonderen Falls zu gedenken, zwei von den angenommenen Punkten auf parallelen Geraden fortrücken sollen, was wegen des unveränderlichen Abstands jener Punkte nur geschehen kann, in so fern ihre Bewegung nach einerlei und nicht etwa in entgegengesetzter Richtung vor sich geht, so wird augenscheinlich jeder andere Punkt des Systems sich ebenfalls in einer geraden und mit den beiden ersten Geraden parallelen Linie fortbewegen. Setzen wir diesen besondern Fall jedoch bei Seite, eben weil keine einzige Curve dabei in Betracht kommt, so sind nur drei Fälle möglich: nämlich entweder bewegt sich kein einziger Punkt des Systems in einer Geraden, oder nur ein Punkt, oder endlich es bewegen sich zwei Punkte in zwei convergenten Geraden und alle übrigen Punkte in krummen Linien (Vgl. §. 10.).

§. 2.

Man kann nun für jeden Augenblick der Bewegung die Differenzialien der von den einzelnen Punkten beschriebenen Curven als Elemente von Kreisbogen auffassen, welche sämmtlich von einem und demselben Centrum O aus beschrieben werden, also die Bewegung des ganzen Systems als eine Summe unzähliger, auf einander folgender, unendlich kleiner Rotationen um einen successiv fortrückenden Mittelpunkt O.

Seien nämlich in Taf. I. Fig. 1. die Curven $A\alpha$, $B\beta$ die Wege, welche von den zwei Punkten A und B durchlaufen werden, während das von den vier Punkten A, B, C, D gebildete System sich nach einem gegebenen Gesetze fortbewegt, so zwar, dass während A nach A' hinrückt, die Punkte B, C, D beziehungsweise nach B', C', D' gelangen werden. Wenn nun AO und BO in A und B auf den Curven $A\alpha$ und $B\beta$ normal stehen und wenn man in Gedanken den Bogen AA' in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, so wird auch BB' unendlich klein werden, und beide Curvenelemente AA' und BB' können sowohl als Elemente der Tangenten AT und BT, wie auch als Elemente von Kreisen gedacht werden, deren Mittelpunkte in der Normale AO beziehungsweise BO liegen. Aber freilich, da der Punkt B' auf der Curve $B\beta$ liegen und ausserdem $A'B'$ constant gleich AB sein

soll, so ist die Lage von B' bestimmt, sobald AA' als independentes Differenzial angenommen worden ist, und es steht daher zu beweisen, dass sich die Differenzialien BB' und AA' zu einander verhalten wie die Normalen OB und OA, denn wenn dies der Fall ist, so sind die unendlich kleinen Winkel $AOA' = \frac{AA'}{OA}$ und $BOB' = \frac{BB'}{OB}$ gleich und man darf sich dann ohne Weiteres vorstellen, der Winkel AOB habe sich um seinen Scheitel O so gedreht, dass er in die Lage $A'OB'$ gekommen sei. Zu diesem Zwecke setze ich

$$\text{W. } ATO = \alpha, \quad AA' = h, \quad OT = m;$$
$$\text{W. } BTO = \beta, \quad BB' = k;$$

so verwandelt sich die Gleichung

$$AT^2 + BT^2 - 2AT.BT.\cos ATB = AB^2$$
$$= A'T^2 + B'T^2 - 2A'T.B'T.\cos ATB$$

in folgende:

$$m^2 \cos\alpha^2 + m^2 \cos\beta^2 - 2m^2 \cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha+\beta) =$$
$$(m\cos\alpha - h)^2 + (m\cos\beta + k)^2 - 2(m\cos\alpha - h)(m\cos\beta + k)\cos(\alpha+\beta).$$

Lässt man aus dieser Gleichung die gleichen Glieder beiderseits und die Glieder mit den zweiten Dimensionen der verschwindenden Grössen h und k weg, so ergiebt sich

$$2mh\cos\alpha - 2mk\cos\beta = 2m[h\cos\beta - k\cos\alpha]\cos(\alpha+\beta),$$

also

$$h[\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta)] = k[\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta)]$$

oder, nach leichten Transformationen,

$$h.\sin(\alpha+\beta)\sin\beta = k.\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

d. h.

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OB}{OA},$$

was zu beweisen war.

Es bedarf nun ferner nur noch der Bemerkung, dass jeder andere Punkt C, D u. s. f. des angenommenen Systems, weil er fest und unveränderlich mit den Punkten A und B verbunden ist, während der unendlich geringen Drehung, durch welche das Dreieck AOB in die Lage $A'OB'$ übergeht, auch gegen die Seiten OA und OB dieses Dreiecks eine unveränderliche Lage behalten wird, dass also

$$\text{W. } AOC = A'OC', \text{ sowie } OC = OC'$$
$$\text{W. } AOD = A'OD', \qquad OD = OD'$$

u. s. f. sein wird. Und hiermit ist der am Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Satz gerechtfertigt, und es ergiebt sich zugleich, dass die von O aus gezogenen Radien-Vectoren OC, OD u. s. f. auf den von C, D u. s. f. beschriebenen Curven normal stehen müssen.

§. 3.

Die mit den Halbmessern OA, OB.... beschriebenen Kreisbogen stehen mit den von den Punkten A, B.... bei der continuirlichen Bewegung des Systems wirklich durchlaufenen Curven im Allgemeinen nur in einer Berührung der ersten Ordnung, und der Punkt O ist keineswegs der Krümmungsmittelpunkt für diese Curven, wie am Deutlichsten vielleicht aus der Bemerkung hervorgeht, dass die eine oder andere dieser Curven, wie $B\beta$, ihre convexe Seite gegen O hinwenden kann, also ihren Krümmungsmittelpunkt auf der Verlängerung von OB über B hinaus haben muss. Forscht man nach der Grösse der einzelnen Krümmungshalbmesser, z. B. für den Punkt A, so müsste man sich in A' ebenfalls eine Normale auf die Curve errichtet denken und den Punkt zu bestimmen suchen, welchem sich der Durchschnittspunkt dieser Normale mit der vorhergehenden AO bei dem unendlichen Abnehmen von AA' ohne Ende nähert. Errichtet man ebenso in B' eine Normale auf die Curve $B\beta$, so wird diese mit der eben gedachten in A' auf die Curve $A\alpha$ errichteten Normale sich in einem Punkte O' durchschneiden, und es würden also die Convergenzpunkte von AO und $A'O'$, BO und $B'O'$, CO und $C'O'$ u. s. f. in Beziehung auf das unendlich klein werden von AA' gedacht, der Reihe nach die Krümmungsmittelpunkte der von A, B, C.... beschriebenen Curven sein.

§. 4.

Berücksichtigt man indessen, dass der eben gedachte Punkt O', nachdem die unendlich kleine Drehung um den vorigen Drehungspunkt O geschehen ist, ganz an dessen Stelle tretend, wiederum den Mittelpunkt für eine neue, unendlich geringe Drehung abgiebt, sowie dass OO' als Differenzial der Curve, auf welcher während der Bewegung des ganzen Systems sich alle Drehungsmittelpunkte O befinden, mithin als unendlich kleine aber gerade Linie zu denken ist: so wird man leicht auf eine andere Vorstellung geführt, nach welcher man das ganze System aller von A, B, C.... in jedem einzelnen Augenblick beschriebener Curvenelemente als zusammengehörige Differenzialien eines Systems cykloidischer Curven (gemeiner, oder gestreckter, oder verschlungener Cykloiden) auffassen wird, welches System in dem jedesmaligen Punkte O denjenigen Punkt besitzt, wo der sich fortwälzende Kreis die sogenannte Basis OO' tangirt.

In der That, wenn in Taf. I. Fig. 2. der um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QO beschriebene Kreis längs der Geraden GH fortrollt und zwar in dem durch die hinzu gezeichneten Pfeile

bemerklich gemachten Sinne, so beschreibt jeder beliebig in der Ebene dieses Kreises angenommene und mit dem Mittelpunkt Q auf eine feste und unveränderliche Weise verbundene Punkt eine gemeine oder gestreckte oder verschlungene Cykloide, je nachdem sein Abstand von Q gleich ist dem Radius QO, oder kleiner, wie dies bei dem Punkte A, oder grösser, wie dies bei dem Punkte B der Fall ist. Zuvörderst lässt sich nun behaupten, dass in jedem dieser Fälle die von O aus nach den beschreibenden Punkten gezogenen Geraden OA, OB.... auf den von diesen Punkten beschriebenen Cykloiden normal stehen. Dieser Satz ist in Betreff der gemeinen Cykloide allgemein bekannt, er lässt sich aber auch ohne Schwierigkeit für die andern Arten beweisen. Denn setzt man $QO=r$, $QA=R$ und den veränderlichen Wälzungswinkel $OQA=\varphi$, nimmt GH als Abscissenaxe an und die Ordinatenaxe parallel zu OQ, und fixirt den Ursprung der Coordinaten dahin wo $\varphi=0$ ist, so bestehen die Gleichungen

$$x=r\varphi-R\sin\varphi,\quad y=r-R\cos\varphi,$$

woraus folgt

$$dx=(r-R\cos\varphi)\,d\varphi=yd\varphi,\quad dy=R\sin\varphi d\varphi,$$

also

$$-\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{R\sin\varphi}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{y}{R\sin\varphi}=\frac{AP}{OP}=\operatorname{tang}AOG,$$

folglich

$$-\frac{y}{R\sin\varphi}=\operatorname{tang}AOH;$$

und da $-\frac{dx}{dy}$ die trigonometrische Tangente des Winkels angiebt, unter welchem die Normale der Curve gegen die Abscissenaxe geneigt ist, so muss die Normale des Punktes A mit AO zusammenfallen. Auch gilt alles dies unverändert für den Punkt B, wenn man unter R den Abstand QB versteht und bei φ sich, wie es der festgesetzte Sinn der Drehung verlangt, den convexen Winkel OQB vorstellt, so dass in der Gleichung $x=r\varphi-R\sin\varphi$ der letzte Bestandtheil $R\sin\varphi$ an und für sich einen negativen Werth erhält.

§. 5.

Man stelle sich nun vor, der mit dem Radius QO beschriebene Kreis rolle aus der betrachteten Stellung weiter fort, so dass $OO'=r.\Delta\varphi$ sei, und es gelangen dadurch die Radien QA, QB.. in die Stellung $Q'A'$, $Q'B$.., so werden, sobald man OO' in den

Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, die Winkel AOA', BOB' u. s. f. sämmtlich einander gleich, nämlich gleich $d\varphi = \frac{OO'}{OQ}$ ausfallen. Denn es ist, wenn man $AA' = ds$ und die Normale $AO = N$ setzt,

$$AOA' = \text{tang}\, AOA' = \frac{ds}{N};$$

aber

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \,.\, \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2},$$
$$N = \sqrt{y^2 + OP^2} = \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2};$$

also

$$\frac{ds}{N} = d\varphi.$$

Und da überdies die Curvenelemente AA', BB'... beziehungsweise auf OA, OB.... normal stehen, so dass

$$OA' = (OA^2 + AA'^2)^{\frac{1}{2}} = OA\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{AA'}{OA}\right) + \ldots\right]$$

bei dem unendlichen Abnehmen von AA' sich von OA nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung unterscheidet; so sind die Umstände für die Erzeugung der cykloidischen Curven in jedem einzelnen Augenblicke ganz dieselben als wenn sich ein unveränderliches Dreieck AOB, oder allgemeiner ein unveränderliches System von Punkten A, B.... um einen in seiner Ebene liegenden Punkt O herumdrehte. Mit andern Worten: das System aller gleichzeitig beschriebenen Differenzialien der Cykloiden AA', BB'.... lässt sich auffassen als ein System von gleichzeitig und um das gemeinschaftliche Centrum O herum beschriebenen Kreisbogenelementen.

§. 6.

Stellt man mit diesem Ergebniss nun dasjenige zusammen, was in §. 2. und §. 3. über die Bewegung des Systems A, B, C.... der Taf. I. Fig. 1. gesagt worden ist, hält man also namentlich fest

erstens, dass sowohl bei jeder der früher gedachten von A, B, C.... in Taf. 1. Fig. 1. beschriebenen, als auch bei den so eben in §. 4. und §. 5. besprochenen Cykloiden die von O' aus gezogenen Geraden OA', OB' u. s. f. wiederum normal auf den bei A', B'.... anfangenden Curvenelementen $A'A''$, $B'B''$ stehen würden;

und zweitens, dass bei jeder Curve sowohl der einen als der andern Gattung der Krümmungsmittelpunkt gedacht werden kann als der Ort, welchem sich bei dem unendlichen Abnehmen der Drehungswinkel

$$AOA' = BOB' = COC' \text{ u. s. f.}$$

der Convergenzpunkt der beiden Normalen

$$AO \text{ und } A'O', BO \text{ und } B'O' \text{ u. s. f.}$$

ohne Ende nähert;
so ergiebt sich, dass die Krümmungshalbmesser zu den Curven $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... der Taf. I. Fig. 1. identisch sein müssen mit den Krümmungshalbmessern eines vorläufig noch unbekannten Systems von Cykloiden, dessen Wälzungskreis im Punkte O die Basis tangirt. Dieses System von cykloidischen Bogen, die mit den Curven $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... in einer Berührung der **zweiten Ordnung** stehen, wird aber genau bestimmt sein, sobald es gelungen ist, aus der Beschaffenheit der beiden gegebenen Curven $A\alpha$ und $B\beta$ die Richtung des Differenzials OO', sowie die Grösse des dem Wälzungskreis zukommenden Radius OQ zu ermitteln. Und hierzu verhilft eine gewisse sehr einfache und bei allen drei Arten der Cykloide geltende Formel für den Krümmungshalbmesser.

§. 7.

Wenn wir nämlich, um diesen Krümmungshalbmesser nach der Formel

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}$$

zu berechnen, die in §. 4. gefundenen Gleichungen

$$dx = yd\varphi \text{ und } dy = R\sin\varphi d\varphi$$

nochmals differenziiren, $d\varphi$ als independentes Differenzial behandelnd, so erhalten wir

$$d^2x = dyd\varphi = R\sin\varphi d\varphi^2,$$
$$d^2y = R\cos\varphi d\varphi^2;$$

also

$$dxd^2y - dyd^2x = (Ry\cos\varphi - R^2\sin\varphi^2)\, d\varphi^3$$
$$= (Rr\cos\varphi - R^2\cos\varphi^2 - R^2\sin\varphi^2)\, d\varphi^3$$
$$= -R(R - r\cos\varphi)\, d\varphi^3.$$

Ferner ist zu Folge §. 5., wenn man durchgängig unter N die Normalen AO, BO u. s. f. versteht,

$$ds = Nd\varphi,$$

also

$$\varrho = \pm \frac{N^3}{R(R - r\cos\varphi)}.$$

Sobald man aber von Q das Perpendikel QU_1 auf AO, und von O aus ein (in Taf. I. Fig. 2. nicht gezeichnetes) Perpendikel OW_1 auf

AQ fällt, so ersieht man aus der Aehnlichkeit der Triangel AQU_1 und AOW_1 die Proportion $\frac{N}{AQ}=\frac{AW_1}{AU_1}$, d. h.

$$\frac{N}{R}=\frac{R-r\cos\varphi}{N-OU_1}.$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{N}{R}$ in die Formel für ϱ und bezeichnet den Winkel, welchen die vom Drehungsmittelpunkt O nach dem beschreibenden Punkt A gezogene Normale mit dem nach dem Centrum des rollenden Kreises gezogenen Radius OQ bildet, durch ϑ, so dass $OU_1=r\cos\vartheta$ wird, so hat man

$$\varrho=\pm\frac{N^2}{N-r\cos\vartheta}.$$

Dabei ist es leicht, sich zu überzeugen, dass die eben gebrauchte Gleichung

$$\frac{N}{R}=\frac{R-r\cos\varphi}{N-r\cos\vartheta}$$

auch in den Fällen richtig bleibt, wenn entweder, wie z. B. für den Punkt C der $\cos\vartheta$ einen negativen Werth erhält, oder auch dann, wenn $\cos\varphi$ negativ ist.

§. 8.

Die gefundene Formel lässt sich nun nicht allein dazu benutzen, um ϱ zu construiren, sobald N, r, ϑ bekannt sind, sondern sie wird auch, wenn an zwei Punkten des sich bewegenden Systems ABC.... die Krümmungshalbmesser gegeben sind, sehr bequem zur Bestimmung der Lage und Grösse des gesuchten Halbmessers OQ verhelfen. Denn angenommen, ausser den Normalen $AO=N_1$ und $BO=N_2$ seien auch die den Punkten A und B zugehörigen Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 bekannt, so wird man zuvörderst die Grössen

$$AU_1=(N_1-r\cos\vartheta_1)=\frac{N_1^2}{\varrho_1},$$

$$BU_2=(N_2-r\cos\vartheta_2)=\frac{N_2^2}{\varrho^2}$$

construiren, hierdurch die Punkte U_1 und U_2 bestimmen und sobald man in diesen Punkten U_1 und U_2 Perpendikel auf die Normalen AO und BO errichtet, so wird deren Durchschnittspunkt den gesuchten Mittelpunkt des rollenden Kreises angeben. Alsdann aber ist, um für einen beliebigen dritten Punkt des sich bewegenden Systems, z. B. für den Punkt C, den Krümmungshalbmesser ϱ_3 zu bestimmen, in der Formel

$$\varrho_3 = \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3}$$

nicht allein $N_3 = CO$ und r, sondern auch $\vartheta_3 = COQ$ bekannt geworden, und man wird also ϱ_3 als dritte Proportionallinie zu zwei gegebenen Linien ohne Mühe construiren.

Es bedarf hierbei kaum der Bemerkung, dass man, wenn ϑ_3 ein stumpfer Winkel ist, für den Nenner $N_3 - r\cos\vartheta_3$ bei der Construction von ϱ_3 eine Summe zweier Linien erhält, dass derselbe aber in allen Fällen geradezu durch die Länge CU_3 dargestellt wird, sobald man vom gefundenen Mittelpunkt Q das Perpendikel QU_3 auf CO gefällt hat. Eine besondere Erwähnung dagegen verdient allerdings der Umstand, dass der Krümmungsmittelpunkt öfters auf der Normale N nicht von dem die Curve beschreibenden Punkte gegen den Drehungsmittelpunkt O hin, sondern in der entgegengesetzten Verlängerung von N liegen wird. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Cykloide, welche mit der beschriebenen Curve in einer Berührung zweiter Ordnung steht, an dem betreffenden Punkte ihre Convexität der Basis GH zukehrt. Stellt aber $y = f(x)$ die Gleichung der Cykloide zwischen y und x vor und bezeichnet man die zweite derivirte Funktion von $f(x)$ durch $f''(x)$, so muss bekanntlich, wenn der eben angedeutete Fall eintreten soll, $yf''(x)$ einen positiven Werth erhalten. In so fern nun x nicht als independente Variable behandelt werden soll, ist

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

folglich bei den Cykloiden, vermöge der in §. 7. entwickelten Formeln:

$$f''(x) = -\frac{R(R - r\cos\varphi)}{y^3},$$

und es erhält also $yf''(x)$ einen positiven Werth nur dann, wenn $r\cos\varphi > R$ ist.

Bei der verschlungenen Cykloide ist $r < R$ und bei der gemeinen ist $r = R$, folglich kann bei diesen beiden Arten niemals die eben aufgefundene Bedingung erfüllt werden, d. h. in keinem ihrer Punkte wendet eine verschlungene oder eine gemeine Cykloide der Basis GH ihre Convexität zu.

Bei einer gestreckten Cykloide ist dagegen $r > R$, und sobald also $\cos\varphi$ nicht allzu klein ausfällt, d. h. sobald W. φ nahe genug an Null oder an 2π angenommen wird, so muss $r\cos\varphi > R$ sein, also die Curve convex gegen die Basis liegen. Für die nähere Betrachtung eines solchen Falls ist die gestreckte Cykloide in Taf. I. Fig. 3. gezeichnet worden, welche in der Nähe des Punkts B die erwähnte Lage hat. Da $\cos\varphi$ für diese Annahme nothwendig positiv sein muss, weil sonst $R - r\cos\varphi$ gar nicht negativ werden könnte, so wird der W. OQB, mag er nun als φ oder, wie es in dieser Figur die Umstände erfordern, als $2\pi - \varphi$ aufgefasst werden, jedesmal spitz sein. Und da, wenn man das Perpendikel OW auf QB fällt, $QW = r\cos\varphi$ wird, während $QB = R$ ist, so führt die Voraussetzung $r\cos\varphi > R$ zu der Folgerung,

dass der Fusspunkt W auf die Verlängerung von QB über B hinaus fallen, dass also W. OBQ stumpf sein müsse. Deswegen aber muss auch der Fusspunkt des Perpendikels QU_2 auf die Verlängerung von OB über B hinaus, mithin in die Concavität der Curve fallen.

Alles dies hat nun zwar keinen ändernden Einfluss auf die in §. 7. vorgenommenen Rechnungen, denn man erhält gegenwärtig

$$BU_2 = r\cos\vartheta - N,\quad BW = r\cos\varphi - R,$$

und immer noch ist

$$\frac{BO}{BQ} = \frac{BW}{BU_2}$$

d. h.

$$\frac{N}{R} = \frac{r\cos\varphi - R}{r\cos\vartheta - N},$$

also

$$\varrho = \pm\frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}.$$

Allein es ergeben sich aus diesen Betrachtungen für die sichere Anwendung der am Anfange dieses Paragraphen erklärten Constructionen folgende ergänzende Regeln:

1) um den Mittelpunkt Q des Kreises zu finden, welcher als Wälzungskreis für die von den Punkten A, B, C.... zu beschreibenden cykloidischen Curvenelemente zu betrachten ist, muss man die Grössen

$$AU_1 = \frac{N_1^2}{\varrho_1} \text{ und } BU_2 = \frac{N_2^2}{\varrho_2}$$

von A beziehungsweise von B aus auf der Normale N_1 resp. N_2 nach der concaven Seite der Curve hin auftragen; — und

2) wenn man alsdann, um für einen anderen Punkt des beweglichen Systems z. B. für C den Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen, die Normale $CO = N_3$ gezogen und auf diese von dem gefundenen Punkt Q das Perpendikel QU_3 gefällt hat, so muss man die Linie

$$\frac{N_3^2}{CU_3} = \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3} = \varrho_3$$

vom beschreibenden Punkte C aus auf der Normale CO nach der Seite hintragen, wohin der Fusspunkt des Perpendikels QU_3 gefallen ist, weil dieser Punkt U_3 und der Krümmungsmittelpunkt immer beide in der Concavität der Curve liegen müssen.

§. 9.

Durch das Vorhergehende ist nun das von Herrn Abel Transon ersonnene Verfahren zur Bestimmung der Krümmungshalb-

messer vollständig erläutert. Sobald nämlich die in §. 1. vorausgesetzten Umstände eintreten, d. h. sobald eine Curve auf die Art entstanden ist oder als entstanden aufgefasst werden kann, dass der beschreibende Punkt C mit zwei anderen Punkten A und B zu einem festen und unveränderlichen Dreieck verbunden ist und dass diese letztgenannten Punkte auf zwei gegebenen Curven $A\alpha$ und $B\beta$ fortrücken: so kann man, wohin auch immer der Punkt C gerückt sein mag, zuvörderst den Punkt O, daraus die Richtung der Normale CO, also gleichzeitig auch die Lage der Tangente, und dann nach den Regeln des §. 8., insofern man die den Punkten A und B zugehörigen und den gegebenen Curven $A\alpha$, $B\beta$ entsprechenden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 ohne allzu grosse Weitläuftigkeit zu construiren im Stande ist, auch den Krümmungshalbmesser für die Curve $C\gamma$ bestimmen. Uebrigens dürfen wir hierbei nicht mit Stillschweigen übergehen, dass das erste Theorem, worauf Herr Abel Transon seine Methode gegründet hat und welches wir in §. 2. ausgesprochen und bewiesen haben, nämlich dass alle Normalen der von den einzelnen Punkten des beweglichen Systems beschriebenen Curven in jedem Augenblick in einem einzigen Punkte zusammen laufen, zuerst von Chasles, und zwar als eine Verallgemeinerung eines von Des-Cartes benutzten Satzes, aufgestellt worden ist (S. Chasles Geschichte der Geometrie, S. 649 der Uebersetzung von Sohncke).

§. 10.

Am einfachsten und merkwürdigsten unter allen Bewegungen des Dreiecks ABC ist der Fall, wenn die gegebenen Wege für die Punkte A und B beide geradlinig, also die Schenkel eines Winkels BQA (Taf. I. Fig. 4.) sind; und um von den vorhergehenden Regeln zum Beschluss eine Anwendung zu machen, wollen wir diesen Fall voraussetzen. Jeder beliebig in der Ebene der Figur angenommene und mit A und B fest und unveränderlich verbundene Punkt C beschreibt alsdann eine Ellipse, deren Mittelpunkt sich im Scheitel des W. BQA befindet. Errichtet man nun in A und B auf die Schenkel des W. BQA die Perpendikel AO und BO und zieht nach deren Durchschnittspunkt CO, so hat man die Normale und kann sofort auch die Tangente am Punkte C ziehen. Ferner, da die Krümmungshalbmesser an den Punkten A und B gegenwärtig, in was für eine Lage das $\Delta\, ABC$ auch rücken mag, jedesmal unendlich sind, so fallen die im Vorhergehenden mit U_1 und U_2 bezeichneten Punkte mit A resp. B zusammen, woraus folgt, dass jetzt der Scheitel des W. BQA zugleich den zu suchenden Mittelpunkt des Wälzungskreises bildet. Alles dies ist übrigens auch bei der gestreckten Cykloide der Fall, welche der Punkt A in Taf. I. Fig. 2. oder der Punkt B in Taf. I. Fig. 3. beschreibt, sobald der W. QAO (resp. QBO) ein Rechter, nämlich $\cos\varphi = \frac{AQ}{OQ} = \frac{R}{r}$ ist, weil dann in den gefundenen Formeln

$$\varrho = \frac{N^2}{R(R - r\cos\varphi)} \text{ oder } \varrho = \frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}$$

der Nenner sich auf Null reducirt.

Fällt man daher in Taf. I. Fig. 4. von Q aus auf CO das Perpendikel QU, so ist der Krümmungshalbmesser für den Punkt C gleich $\frac{CO^2}{CU}$ und ist aufzutragen in der Richtung von C nach U.

§. 11.

Bei einer genaueren Betrachtung der hier gedachten Bewegung des Dreiecks ABC ergeben sich jedoch noch einige andere merkwürdige Gesetze. Sucht man nämlich für den Punkt O den geometrischen Ort zu bestimmen, dessen Differenzial früher durch OO' bezeichnet wurde (Vgl. §. 3.), so findet man dafür einen Kreis, der um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels BQA mit dem Radius QO zu beschreiben wäre.

Denn man setze

$$QO = r, \text{ W. } QOA = \vartheta_1, \text{ W. } QOB = \vartheta_2,$$

so dass W. $AOB = AQB = \vartheta_1 - \vartheta_2$ ist, so erhält man aus dem $\Delta\, AQB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2 \sin\vartheta_1{}^2 + r^2 \sin\vartheta_2{}^2 - 2r^2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

und aus dem $\Delta\, AOB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2 \cos\vartheta_1{}^2 + r^2 \cos\vartheta_2{}^2 - 2r^2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

folglich durch Addition

$$2AB^2 = 2r^2[1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2] = 2r^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2,$$

also

$$AB = r\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = QO.\sin AQB.$$

Hieraus aber fliesst für QO der Werth

$$QO = \frac{AB}{\sin AQB},$$

und da sowohl der Zähler als der Nenner dieses Bruches unveränderlich ist, so bleibt QO während der Bewegung des Dreiecks ABC eine constante Grösse, was zu beweisen war.

Wir haben freilich hier den Fall zu Grunde gelegt, wo die Perpendikel AO und BO sich ausserhalb des Winkels Q schneiden, im entgegengesetzten Falle aber, wenn O zwischen die Schenkel des W. Q fällt, lässt sich der Beweis mit einer nur ganz geringen Aenderung eben so leicht führen.

§. 12.

Man nehme jetzt an, das von Q auf CQ gefällte Perpendikel

QU schnitte bei seiner Verlängerung die Ellipse in einem Punkte C', und es gehörten mit C' die Punkte A' und B' in der Art zusammen, dass das $\Delta\, A'B'C'$ die Lage des beweglichen Dreiecks in dem Augenblick angiebt, wenn die Spitze C den elliptischen Bogen CC' beschrieben hat. Fasst man nun einerseits die Lage des Punkts Q gegen das $\Delta\, A'B'C'$, andererseits die Lage des Punkts O gegen das $\Delta\, ABC$ ins Auge und beachtet, dass die Strahlen $B'Q$, $C'Q$, $A'Q$ der Reihe nach senkrecht stehen auf den in O zusammenlaufenden Strahlen BO, CO, AO; so sieht man sogleich, dass die Winkel

$$B'QC',\ C'QA',\ B'QA'$$

gleich sind den Winkeln

$$BOC,\ COA,\ BOA.$$

Hieraus aber folgt die Congruenz der beiden Vierecke $QB'C'A'$ und $OBCA$. Denn wenn man sich das Dreieck $A'B'C'$ als gegeben denkt und den Punkt Q dadurch zu bestimmen sucht, dass man über den Seiten $A'B'$ und $B'C'$ Kreisabschnitte construirt, welche die ebenfalls gegebenen Peripheriewinkel $A'QB'$ und $B'QC'$ fassen, so sieht man, dass beide Kreisbogen, weil sie bereits in B' sich schneiden, nur noch einen zweiten und deswegen bestimmten Durchschnittspunkt Q darbieten werden, worauf sich die bekannte Pothenot'sche Aufgabe stützt. Zwar würde sich allerdings ein mit ABC congruentes Dreieck — nennen wir es $\alpha\beta\gamma$ — auch noch auf eine andere Art zwischen die in Q zusammenlaufenden Strahlen legen lassen, so dass immer noch α, β, γ der Ordnung nach auf QA', QB', QC' befindlich und dennoch das Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ nicht mit $QBCA$ congruent wäre. Aber dieses Dreieck $\alpha\beta\gamma$ würde dann mit seiner entgegengesetzten Fläche in der Ebene der Figur aufliegen, gerade so als wenn man das Dreieck $A'B'C'$ vorerst um $A'B'$ als Rotationsaxe um 180^0 drehen und dann noch etwas verschieben wollte; es würde also dieses $\Delta\, \alpha\beta\gamma$ streng genommen nicht mit ABC congruent, sondern symmetrisch gleich (gegenbildlich gleich) sein, und weil eine solche Herumwendung des $\Delta\, ABC$ in unserer vorliegenden Betrachtung ganz gegen die Voraussetzung sein würde, so ist das erwähnte, mit $OBCA$ nicht congruente Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ offenbar auszuschliessen und sein Vorkommen für unmöglich zu erklären, also Viereck $QB'C'A' \cong OBCA$.

Aus dieser Congruenz folgen nun zuvörderst die Gleichungen

$$QA' = OA,\ QB' = OB,\ QC' = OC;$$

ferner, weil die homologen Diagonalen QC' und OC durch Construktion perpendikulär auf einander gestellt sind, so müssen auch die andern Diagonalen und überhaupt alle homologen Seiten senkrecht auf einander stehen, namentlich

$$A'B' \perp AB,\ B'C' \perp BC,\ A'C' \perp AC.$$

§. 13.

Besonders merkwürdig scheint endlich noch folgendes Resultat. Da OC die Richtung der Normale für die Ellipse im Punkte

C angiebt und da QC' senkrecht auf OC steht, so ist QC' parallel zu der dem Punkte C zugehörigen Tangente, also sind QC und QC' zwei conjugirte Semidiameter der Ellipse. Dass man aber, sobald zwei conjugirte Diameter nebst ihrem Conjugationswinkel gegeben sind, die Lage und Grösse der Hauptaxen u. dgl. m. durch ganz leichte Construktionen findet, bedarf nicht der Erinnerung.

Ferner, da man für den Krümmungshalbmesser ϱ am Punkte C in §. 10. den Ausdruck $\frac{CO^2}{CU}$ gefunden hat und da zufolge §. 12. $CO = QC'$ ist, so besteht die Gleichung

$$\varrho = \frac{\overline{QC'}^2}{CU},$$

d. h. um den Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Punkt C in einer gegebenen Ellipse zu construiren, ziehe man nach C den Semidiameter QC, bestimme den zugehörigen conjugirten Semidiameter QC', und fälle vom gegebenen Punkte ein Perpendikel CU auf diesen letztern, so ist ϱ die dritte Proportionallinie zum Perpendikel CU und dem conjugirten Semidiameter QC'.

Nachschrift des Herausgebers.

Schon vor Empfang des vorhergehenden Aufsatzes hätte ich aus dem Institut die Stellen, welche die Methode des Herrn Abel Transon betreffen, ausgezogen, um sie gelegentlich den Lesern des Archivs mitzutheilen. Desto angenehmer wurde ich natürlich durch den mir gütigst zugesandten Aufsatz des Herrn Professor Dr. Stegmann überrascht, und halte mich nun, damit die Leser des Archivs sehen, wie gering die Grundlagen waren, von denen derselbe bei Abfassung seiner Abhandlung ausgehen konnte, um so mehr verpflichtet, die betreffenden Stellen aus dem Institut, welches wohl nur in die Hände weniger Leser des Archivs kommen dürfte, im Folgenden abdrucken zu lassen, was auch vielleicht noch anderen Nutzen haben kann. Leider habe ich unterlassen, die betreffenden Nummern des genannten Journals, welches, nachdem es auf kurze Zeit in meinen Händen gewesen ist, sogleich eine weitere Wanderung nach Norden antritt, überall genau zu bemerken, und bin dieselben aus dem angegebenen Grunde jetzt nachzutragen ausser Stande, weshalb ich hier schliesslich um Verzeihung bitte.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon indique une construction nouvelle pour le rayon de courbure de l'ellipse. — On sait que l'ellipse est engendrée par le sommet T d'un triangle TAB, lorsqu'on fait glisser les extrémités de la base AB sur deux axes fixes. Ce mode de description est même assez souvent employé dans la confection des épures; mais alors on réduit le triangle à la ligne de base AB, en plaçant le sommet T sur un point quelconque de cette ligne.

Dans tous les cas, on sait que si on élève en A et B deux droites perpendiculaires respectivement aux axes directeurs, ces lignes se rencontrant en O, la droite TO est à chaque instant la normale de l'ellipse pour la situation actuelle du point décrivant.

Dans tous les cas aussi on pourra construire le rayon de curbure à l'aide de la remarque suivante. Abaissez du centre M de la courbe (point de rencontre des axes) une perpendiculaire MC sur la normale TO. Soit C le pied de cette perpendiculaire. Le rayon de courbure est une troisième proportionelle aux lignes TC et TO; c'est-à-dire qu'on a $R = \frac{TO^2}{TC}$, expression très facile à construire. On sait d'ailleurs depuis long-temps, qu'en prolongeant la perpendiculaire MC jusqu'à sa rencontre en L avec la courbe, on a:

$$R = \frac{ML^3}{TC},$$

d'ou il suit que la distance des points O et T est égale au demi diamètre conjugué de MT.

(L'Institut. 1844. Nr. 573.)

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une construction du rayon de courbure de l'ellipse. Cette construction est appropriée au cas ou on engendre la courbe en augmentant ou diminuant toutes les ordonnées d'un cercle dans un même rapport.

Soient M le point de l'ellipse et M' le point correspondant du cercle; ces deux points situés sur une même ordonnée; soient ρ le rayon de courbure de l'ellipse en M, et α l'angle de la normale avec l'ordonnée. Soit aussi r le rayon de courbure de l'ellipse à l'extrémité de l'axe qui est parallèle aux ordonnées; et soit α' l'angle que fait en M' le rayon du cercle avec l'ordonnée MM'. On a la relation

$$r' \cos^3 \alpha' = \rho \cos^3 \alpha,$$

de laquelle on tire une construction très simple.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une méthode géométrique pour déterminer les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes. Cette méthode est fondée sur le principe suivant:

Quand une figure plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ce mouvement peut être représenté par un cercle qui roule sans glisser sur une certaine droite.

Les arcs circulaires (infiniment petits) décrits par les différents points de la figure, pendant le mouvement infiniment petit, peuvent être considérés comme des arcs de cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie) produit par le roulement de ce cercle.

D'après ce théorème, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour construire son rayon de courbure, de déterminer la grandeur et la situation du cercle qui roule au moment du mouvement ou le point décrivant aura

la position qu'on considère; ensemble déterminer la situation de la droite sur laquelle le roulement a lieu. Ce cercle et cette droite se détermineront à chaque instant par les différentes conditions du mouvement de la figure.

En effet, il y a une formule très simple pour le rayon de courbure d'une cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie). Cette formule est

$$R = \frac{N^2}{N - r\cos i},$$

dans laquelle N est la partie normale de la cycloide entre le point décrivant et le point, sur lequel le roulement s'opère; r est le rayon du cercle roulant, et i l'angle que fait la normale du cycloide avec le rayon de cercle mené du centre au point de roulement.

Ce point de roulement n'est autre que le point qui reste fixe dans le mouvement infiniment petit de la figure, c'est-à-dire le point par lequel passent à chaque instant les normales aux trajectoires décrites par les divers points de la figure. — M. Chasles a fondé sur la considération de ce point qui reste fixe une méthode géométrique pour la détermination des tangentes, methode applicable „toutes les fois qu'on connait les conditions géométriques du mouvement d'une figure de forme invariable à laquelle appartient le point décrivant.“ (Chasles Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie). — Dans les mêmes circonstances la méthode qu'on vient d'exposer donnera la détermination du rayon de courbure.

Par exemple, si on connait le mouvement de deux points de la figure, on mènera par ces points les normales aux courbes qu'ils parcourent. Appelons d'ailleurs R_1 le rayon de courbure de la courbe décrite par le premier point, sur la normale à la courbe décrite, et dans la concavité de cette courbe, on porte une longueur égale à $\frac{N_1^2}{R_1}$, l'extrémité de cette longueur marquera la projection du centre du cercle roulant; ce en vertu de la formule

$$r\cos i_1 = N_1 - \frac{N_1^2}{R_1}.$$

On construira de même la projection de ce même centre sur la normale à la seconde courbe; et alors il sera bien aisé de construire le centre lui-même, ayant ses projections sur deux droites.

Projetez le centre du cercle roulant sur la normale OT au point décrivant; et soit C le pied de la perpendiculaire projetante: on aura, pour le rayon de courbure de la courbe décrite par le point T, une troisième proportionelle aux lignes OT et TC; c'est à dire

$$R = \frac{TO^2}{TC};$$

car TO correspond, dans la formule générale, à N, et CT à $N - r\cos i$. A quoi il convient d'ajouter, pour fixer le sens de la courbure, que le point C, projection du centre du cercle roulant, est toujours dans la concavité de la courbe décrite.

On voit maintenant que la formule communiquée dans une séance précédente, pour le rayon de courbure de l'ellipse, n'était qu'une simple application de cette méthode générale. Cette méthode s'applique aussi avec beaucoup de facilité à la construction du rayon de courbure des conchoides et des cissoides.

VIII.

Beweis des Lehrsatzes: Wenn ein beliebiges Dreieck in einer Ebene so bewegt wird, dass sich die Endpunkte seiner Basis fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden befinden, so wird von seiner Spitze eine Ellipse beschrieben.

Von dem
Herrn Professor Dr. Stegmann
an der Universität zu Marburg.

In dem Aufsatze Nr. VII. dieses Hefts habe ich, nach dem Vorgange von Abel Transon, um dessen Methode zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers auf die Ellipse anzuwenden, den Lehrsatz als bekannt angenommen:

Wenn eine Gerade BC von constanter Länge so bewegt wird, dass sich ihre Endpunkte fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden (oder anders ausgedrückt auf den Schenkeln eines ebenen Winkels) befinden, so wird jeder Punkt A, welchen man in der Ebene der Figur beliebig angenommen aber mit B und C in eine feste Verbindung gesetzt hat, so dass das ΔBCA während der Bewegung der Grundlinie BC eine unveränderliche Gestalt behält, eine Ellipse beschreiben, deren Mittelpunkt sich im Durchschnittspunkt der zwei festliegenden Geraden (im Scheitel des gegebenen festliegenden Winkels) befindet.

Dieser Lehrsatz ist für einige besondere Fälle allerdings von alten Zeiten her bekannt. Schon in Newton's Arithm. univers., in dem Abschnitt de resolutione quaestionum geometricarum, behandelt das problema XXXV. den am nächsten liegenden Fall, mit welchem heutiges Tags Jedermann vertraut ist, wenn nämlich der Winkel BCA gleich Null oder gleich 180° ist, d. h. wenn der be-

schreibende Punkt A irgendwo in der sich bewegenden Geraden BC liegt, und im problema XXXVI. den Fall, wenn sowohl der Winkel, auf dessen Schenkeln die Punkte B und C fortrücken sollen, als auch der W. BCA ein Rechter ist. Seit Newton sind denn in gar mancherlei Schriften diese Sätze von neuem aufgestellt und bewiesen worden, und so findet man z. B. noch in diesem Archiv (Thl. VI. Heft 2. Seite 222.) für den erstgenannten Fall einen kurzen, freilich von dem Newton'schen wesentlich nicht verschiedenen Beweis von Herrn Professor Pross zu Stuttgart. Allein in der oben ausgesprochenen Allgemeinheit ist der Satz vielleicht noch nicht in gleichem Grade bekannt geworden. Es war im Jahr 1839, als ich gewahr wurde, dass ihm diese allgemeine Gültigkeit zukommt, und in dem auf Ostern 1840 erschienenen Programm des Marburger Gymnasiums habe ich sowohl den Beweis dafür geliefert, als auch verschiedene Folgerungen für besondere Fälle daraus hergeleitet. Dessen ungeachtet muss ich glauben, nachdem ich in Chasles Geschichte der Geometrie zwei darauf bezügliche Stellen (Seite 450 und Seite 650 der Uebersetzung von Sohncke) gelesen habe, dass der Satz nicht allein schon früher entdeckt gewesen, sondern auch wohl in gedruckten aber mir nicht zu Gesicht gekommenen Schriften bereits bewiesen sei; und nur für den Fall, wenn der Herr Herausgeber es an und für sich für wichtig genug oder als Ergänzung des Aufsatzes Nr. VII. für angemessen halten sollte*), setze ich den Beweis hierher.

§. 1.

Es sei in Taf. I. Fig. 5. W. $B_0QX = q$ der gegebene Winkel, auf dessen Schenkeln die Endpunkte der Basis BC des beweglichen Dreiecks BCA fortrücken sollen, wodurch die Spitze A dieses Dreiecks die Curve A_0A zu beschreiben genöthigt ist; und man setze

$$BC = a, \quad AC = b, \quad \text{W. } BCA = \gamma.$$

Ferner nehme man den Scheitelpunkt Q als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, den Schenkel QX als Abscissenaxe und die positiven Ordinaten y auf derjenigen Seite von QX an, auf welcher der W. q oder, anders ausgedrückt, der feste Schenkel QB_0 liegt.

Bezeichnet man nun den veränderlichen Winkel BCX durch φ, so liefert das rechtwinklige Dreieck ACP die Gleichungen

$$(1) \qquad y = b\sin(\varphi - \gamma),$$

$$(2) \qquad x - QC = b\cos(\varphi - \gamma);$$

aber aus dem $\Delta\ BCQ$ ergiebt sich

*) Jedenfalls halte ich dies zur Ergänzung des vorhergehenden Aufsatzes als völlig angemessen, weil dadurch das Verständniss jenes Aufsatzes für manchen Leser erleichtert werden wird. G.

$$\frac{QC}{a}=\frac{\sin(\varphi-q)}{\sin q}=\frac{\sin[(\varphi-\gamma)+(\gamma-q)]}{\sin q}$$
$$=\frac{\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q}+\frac{\sin(\gamma-q)\cos(\varphi-\gamma)}{\sin q}.$$

Daher verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$x-\frac{a\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q}=[b+\frac{a\sin(\gamma-q)}{\sin q}]\cos(\varphi-\gamma),$$

und wenn man hier die aus (1) fliessenden Werthe

$$\sin(\varphi-\gamma)=\frac{y}{b},\ \cos(\varphi-\gamma)=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

substituirt, zugleich beide Seiten der Gleichung in's Quadrat erhebt und der Kürze wegen

$$\gamma-q=\delta$$

setzt, so erhält man

$$x^2-\frac{2axy\cos\delta}{b\sin q}+\frac{a^2y^2\cos\delta^2}{b^2\sin q^2}$$
$$=(b+\frac{a\sin\delta}{\sin q})^2-(b^2+\frac{2ab\sin\delta}{\sin q}+\frac{a^2\sin\delta^2}{\sin q^2})\frac{y^2}{b^2};$$

oder geordnet:

$$(3)\quad x^2-\frac{2axy\cos\delta}{b\sin q}+(1+\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}+\frac{a^2}{b^2\sin q^2})y^2=(b+\frac{a\sin\delta}{\sin q})^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die vom Punkt A beschriebene Curve ein Kegelschnitt ist; und da, wenn man die allgemeine Gleichung des zweiten Grads zwischen zwei Variablen

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

mit der gefundenen vergleicht, die Coefficienten D und E gleich Null sind, so ist der gewählte Anfangspunkt der Coordinaten, nämlich Q, der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts.

Ferner da gegenwärtig

$$A=\frac{a^2}{b^2\sin q^2}+\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}+1,$$

$$B=-\frac{2a\cos\delta}{b\sin q},$$

$$C=1;$$

also

$$B^2-4AC=4\left(-\frac{a^2\sin\delta^2}{b^2\sin q^2}-\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}-1\right)=-4\left(\frac{a\sin\delta}{b\sin q}+1\right)^2$$

durchaus negativ ist, so muss der erzeugte Kegelschnitt in allen Fällen eine Ellipse sein.

§. 2

Obwohl aber hiermit der aufgestellte Lehrsatz schon erwiesen ist, so wird doch die folgende Ergänzung desselben auch noch einiges Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sein.

Am Anfange der eben betrachteten Bewegung des Dreiecks BCA befanden sich dessen Ecken der Ordnung nach in B_0, Q, A_0 und die Bewegung des Dreiecks zwischen den Schenkeln des Winkels q ist eigentlich zu Ende, sobald der Punkt B nach Q und der Punkt A nach K gerückt ist. Wenn man nun aber den Punkt B auf die Verlängerung des Schenkels B_0Q fortrücken, also die Basis BC zwischen den Schenkeln des Nebenwinkels XQB' sich bewegen lässt, so beschreibt die Spitze A jetzt eine Curve, deren Anfang in der Figur durch die punktirte Linie KA' bezeichnet ist, und welche geradezu die Fortsetzung des elliptischen Bogens A_0K bildet.

Um dies zu beweisen, wollen wir die Gleichungen des vorigen Paragraphen auf diese neue Curve KA' anwenden, indem wir

$$\text{W. } C'QB'=q', \quad \text{W. } B'C'X=\varphi', \quad \text{W. } B'C'A'=\gamma'$$

setzen, und bemerken, dass die Richtung für die positiven y', wenn wir die Gleichung (3) auf diesen neuen Fall beziehen wollen, zu Folge der gleich Anfangs im vorigen Paragraphen festgesetzten Bestimmung, nunmehr nach derjenigen Seite der Abscissenaxe QX fallen müsse, auf welcher der W. $XQB'=q'$ liegt, so dass die Richtung der positiven y' jetzt der im vorigen Paragraphen für die positiven Ordinaten geltenden gerade entgegengesetzt sein würde. Ferner haben wir unter γ' offenbar den convexen Winkel $B'C'A'$ zu verstehen, weil wir sonst nicht, in Uebereinstimmung mit der Gleichung (1), worauf die Gleichung (3) gegründet ist, setzen könnten:

$$A'P'=b\sin A'C'X=b\sin(\varphi'-\gamma'),$$

während man, unter γ' den convexen Winkel verstehend, aus dieser Gleichung den richtigen negativen Werth für $A'P'$ erhält. Dies vorausgeschickt, so ergiebt sich die Gleichung der neuen Curve KA' ohne Weiteres, sobald in der Gleichung (3) an die Stelle von y, q und $\delta=\gamma-q$ die Grössen y', q' und $\delta'=\gamma'-q'$ treten, da an die Buchstaben x, a, b Accente zu setzen nicht nöthig ist. Wenn dagegen die positive Richtung für die Ordinaten y' der neuen Gleichung ebenfalls, gerade wie die positiven y der Gleichung (3), auf die Seite des Winkels B_0QX fallen soll, so

ist y' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, und dadurch entsteht folgende Gleichung:

$$(4) \quad x^2+\frac{2axy'\cos\delta'}{b\sin q'}+\left(1+\frac{2a\sin\delta'}{b\sin q'}+\frac{a^2}{b^2\sin q'^2}\right)y'^2$$
$$=\left(b+\frac{a\sin\delta'}{\sin q'}\right)^2.$$

Nun finden aber zwischen den Constanten in dieser Gleichung und denjenigen der Gleichung (3) folgende Relationen Statt:

$$q'=\pi-q, \quad \gamma'=2\pi-\gamma, \quad \gamma'-q'=\pi-(\gamma-q)$$

also

$$\sin q'=\sin q, \quad \sin\delta'=\sin(\gamma-q)=\sin\delta, \quad \cos\delta'=-\cos(\gamma-q)=-\cos\delta;$$

und sobald man diese Werthe in die Gleichung (4) substituirt, so überzeugt man sich, dass dieselbe mit der Gleichung (3) identisch ist, dass also die Kurve KA' nichts anderes sein kann als die Fortsetzung der Curve A_0K.

IX.

Völlig strenge und allgemeine Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie.

Von
dem Herausgeber.

Vorerinnerung.

Die Aufgaben der höhern Geodäsie sind bisher immer bloss näherungsweise mit Hülfe der unendlichen Reihen aufgelöst worden, indem man bloss einige der Anfangsglieder dieser Reihen berücksichtigte, ohne sich weiter auf eine bestimmte theoretische Untersuchung über die Con-

vergenz dieser Reihen und den Grad derselben einzulassen, da wohl bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis eine blosse Untersuchung des von dem ersten weggelassenen Gliede hervorgebrachten Einflusses nicht mit dem Namen einer strengen theoretischen Untersuchung der Convergenz der fraglichen Reihen belegt werden darf, wobei übrigens nicht unbemerkt zu lassen ist, dass man auf diesem Wege, und aus dem vorhergehenden Gesichtspunkte betrachtet, zu mehreren ein grosses Interesse darbietenden sehr eleganten Resultaten gelangt ist, wie z. B. zu dem bekannten Legendre'schen Theorem für die Kugel, seiner mit Recht berühmten Erweiterung auf krumme Flächen überhaupt u. dgl.*), deren Schönheit und Wichtigkeit jeder Kundige anerkennen muss. Ausserdem ist mir nicht bekannt, dass man bei den fraglichen Untersuchungen eine bestimmte directe Rücksicht auf die dritte Coordinate der Punkte auf der Erdfläche, nämlich auf die Höhe derselben über der Meeresfläche genommen hätte. Jedenfalls hatte man wenigstens bei mehreren dieser Untersuchungen zunächst und vorzugsweise das praktische Bedürfniss im Auge, und fand dann allerdings auch in der nahen Uebereinstimmung der auf dem Wege der Rechnung gefundenen Resultate mit gewissen unmittelbar gemessenen Elementen eine für praktische Zwecke hinreichende Bürgschaft für die Richtigkeit der ganzen Operation.

Diese und ähnliche Betrachtungen haben mich veranlasst, für mehrere der wichtigsten und in der Praxis am Häufigsten in Anwendung kommende Aufgaben der höheren Geodäsie völlig strenge und theoretisch richtige Auflösungen zu suchen, welche ich nach und nach im Archive mittheilen werde, weil dieselben, wie es mir scheint, zugleich zweckmässige Uebungen in der Anwendung der Lehren der analytischen Geometrie darbieten, und mache in dem vorliegenden Aufsatze den Anfang mit der folgenden Aufgabe, welche wohl mit Recht als die Hauptaufgabe der gesammten höheren Geodäsie zu betrachten ist:

Wenn die Längen, Breiten und Höhen über der Meeresfläche zweier Punkte auf der Erde, deren durch die Gesammtheit aller Meeresflächen dargestellte wahre oder eigentliche Oberfläche als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren beide Axen als bekannt angenommen werden, um ihre Nebenaxe entstandenen Ellipsoids angesehen wird, gegeben, und in diesen Punkten die horizontalen Projectionen der beiden Winkel, welche die von dem ersten der beiden gegebenen Punkte nach dem zweiten gegebenen Punkte und nach einem dritten seiner Lage nach unbekannten Punkte, und die von dem zweiten der beiden gegebenen Punkte nach dem ersten gegebenen Punkte und demselben dritten seiner Lage nach unbekannten Punkte gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen, — d. h. die Projectionen dieser beiden Winkel auf den durch die beiden gegebenen Punkte gelegten, auf den diesen Punkten entsprechenden, auf der Oberfläche des Erdellipsoids normalen Richtungen der Schwerkraft senkrecht stehenden Ebenen, — gemessen worden sind; so soll man die Lage des dritten Punktes, d. h. dessen Länge, Breite und Höhe über der Meeresfläche bestimmen.

Bei dieser Aufgabe zeige ich zugleich, wie durch die Auflösung selbst ein bestimmtes Kriterium für den Grad der bei der Bestimmung der Lage des unbekannten Punktes erreichten Genauigkeit dargeboten wird, welches natürlich für die Praxis von grosser Wichtigkeit ist, und

---

*) M. s. u. A. meine Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833. 4., wo diese Untersuchungen in ziemlicher Ausführlichkeit dargestellt sind.

bin der Meinung, dass man wenigstens bei der Festlegung der Hauptpunkte einer in's Grosse gehenden jederzeit sehr kostspieligen geodätischen Operation, an welche die Bestimmung der Lage aller übrigen Punkte angeschlossen wird, sich der in diesem Aufsatze entwickelten, oder einer ähnlichen gar keine Näherungen in Anspruch nehmenden, streng geometrischen Methode bedienen sollte. Wie man sich geodätischer Operationen mit Hülfe der im Folgenden entwickelten Methode auch zur genaueren Bestimmung des schon nahe bekannten Werths der Abplattung des Erdsphäroids bedienen kann, ist in diesem Aufsatze auch in der Kürze gezeigt worden, und in einigen nach und nach noch folgenden Aufsätzen gedenke ich zu zeigen, wie man sich die Data, welche der hier aufgelösten Aufgabe als bekannte Grössen zum Grunde liegen, wenigstens insofern dabei bloss geodätische, und nicht auch astronomische Operationen und etwa barometrische Höhenbestimmungen in Anwendung kommen, zu verschaffen hat.

---

§. 1.

Die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde, von welcher die Meeresfläche ein Theil ist, betrachten wir im Folgenden als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren Axen hier als bekannt angenommen werden, entstandenen elliptischen Sphäroids.

Alle Punkte auf der Erde werden als Punkte im Raume betrachtet, deren gegenseitige Lage mit aller nur möglichen Genauigkeit zu bestimmen der Hauptzweck aller geodätischen Messungen ist.

Zur Bestimmung der Lage der Punkte im Raume benutzen wir im Folgenden im Allgemeinen ein durch den Mittelpunkt der Erde als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Die Ebene des Erdäquators soll die Ebene der xy und die Erdaxe soll die Axe der z sein. Der positive Theil der Axe x sei der Halbmesser des Erdäquators, von welchem an die geographischen Längen von 0 bis zu 360° gezählt werden, und den positiven Theil der Axe der y wollen wie so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die geographischen Längen von 0 bis 360° gezählt werden; der positive Theil der Axe der z sei der vom Mittelpunkte der Erde nach deren Nordpole hin gerichtete Theil der Erdaxe.

Die drei 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine von einem beliebigen Punkte im Raume ausgehende gerade Linie mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst, von denen wir im Folgenden häufig Gebrauch machen werden, wollen wir die Bestimmungswinkel der in Rede stehenden geraden Linie in Bezug auf das System der xyz nennen.

§. 2.

Wenn a den Halbmesser des Erdäquators und b die halbe Erdaxe bezeichnet, so ist

$$1)\quad u = \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Gleichung der Oberfläche der Erde, und folglich, indem alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind:

$$2)\quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{a^2},\ \frac{du}{dy} = \frac{2y}{a^2},\ \frac{du}{dz} = \frac{2z}{b^2}.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume und x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des Punktes der Oberfläche der Erde, in welchem die dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechende Vertikale auf derselben senkrecht steht, so sind, wenn wir

$$3)\quad u_1' = \frac{x_1'^2 + y_1'^2}{a^2} + \frac{z_1'^2}{b^2} - 1$$

setzen, nach den Principien der höheren Geometrie

$$4)\quad \frac{x - x_1'}{\frac{du_1'}{dx_1'}} = \frac{y - y_1'}{\frac{du_1'}{dy_1'}} = \frac{z - z_1'}{\frac{du_1'}{dz_1'}},$$

d. i. nach 2)

$$5)\quad \frac{a^2(x - x_1')}{x_1'} = \frac{a^2(y - y_1')}{y_1'} = \frac{b^2(z - z_1')}{z_1'}$$

die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale, aus denen man für $x=0$ auch $y=0$ und

$$z = -\frac{a^2 - b^2}{b^2} z_1'$$

erhält, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass im Allgemeinen die Axe der z von der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale geschnitten wird, diese Vertikale also in der Ebene des dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ oder $(x_1' y_1' z_1')$ entsprechenden Erdmeridians liegt.

Bezeichnen wir die Länge, Breite*) und Höhe über der Meeresfläche des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ respective durch ω_1, Ω_1, h_1; so ist, wie man mit Hülfe der Theorie der Ellipse oder einiger allgemein bekannten Formeln der höheren Geometrie leicht findet, in völliger Allgemeinheit:

---

*) Worunter hier nicht die sogenannte geocentrische Breite, sondern vielmehr die Polhöhe verstanden wird.

$$6)\quad \begin{cases} x_1'=\cos\omega_1 . \sqrt{x_1'^2+y_1'^2}, \\ y_1'=\sin\omega_1 . \sqrt{x_1'^2+y_1'^2}, \\ z_1'=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\Omega_1 . \sqrt{x_1'^2+y_1^2}. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung 1) ist aber

$$\frac{x_1'^2+y_1'^2}{a^2}+\frac{z_1'^2}{b^2}=1,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung mit der dritten der vorhergehenden Gleichungen verbindet:

$$7)\quad \sqrt{x_1'^2+y_1'^2}=\frac{a^2\cos\Omega_1}{\sqrt{a^2\cos\Omega_1{}^2+b^2\sin\Omega_1{}^2}}.$$

Also ist nach den Gleichungen 6):

$$8)\quad \begin{cases} x_1'=\frac{a^2\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sqrt{a^2\cos\Omega_1{}^2+b^2\sin\Omega_1{}^2}}, \\ y_1'=\frac{a^2\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\sqrt{a^2\cos\Omega_1{}^2+b^2\sin\Omega_1{}^2}}, \\ z_1=\frac{b^2\sin\Omega_1}{\sqrt{a^2\cos\Omega_1{}^2+b^2\sin\Omega_1{}^2}}; \end{cases}$$

und folglich, wenn man

$$9)\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

setzt:

$$10)\quad \begin{cases} x_1'=\frac{a\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}, \\ y_1'=\frac{a\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}, \\ z_1'=\frac{a(1-e^2)\sin\Omega_1}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}. \end{cases}$$

Da nun aber offenbar

$$h_1\cos\omega_1\cos\Omega_1,\ h_1\sin\omega_1\cos\Omega_1,\ h_1\sin\Omega_1$$

die Coordinaten des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ in Bezug auf ein durch den Punkt $(x_1' y_1' z_1')$ gelegtes, dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem sind, so überzeugt man sich mittelst der einfachsten Formeln aus der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten auf

der Stelle von der Richtigkeit der folgenden ganz allgemein gültigen Ausdrücke:

$$11)\quad \begin{cases} x_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\cos\omega_1\cos\Omega_1\,, \\ y_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\sin\omega_1\cos\Omega_1\,, \\ z_1=(h_1+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\sin\Omega_1\,; \end{cases}$$

mittelst welcher die rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1 ohne grosse Schwierigkeit aus ω_1, Ω_1, h_1 berechnet werden können. Man könnte diese Formeln auch auf verschiedene Arten zur numerischen Rechnung bequemer einrichten und wegen der Kleinheit von e zweckmässige Näherungsformeln aus denselben ableiten, wobei wir aber jetzt nicht verweilen wollen.

Die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale sind nach 5) und 10), wie man leicht findet:

$$12)\quad \begin{cases} y=x\,\text{tang}\,\omega_1, \\ z=x\,\dfrac{\text{tang}\,\Omega_1}{\cos\omega_1}-\dfrac{ae^2\sin\Omega_1}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}} \end{cases}$$

Ist nun

$$13)\quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene, welche auf der diesem Punkte entsprechenden Vertikale senkrecht steht, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$B=A\,\text{tang}\,\omega_1\,,\quad C=A\frac{\text{tang}\,\Omega_1}{\cos\omega_1};$$

also

$$\frac{A}{B}=\frac{\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sin\omega_1\cos\Omega_1}\,,\quad \frac{A}{C}=\frac{\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sin\Omega_1};$$

und man ist folglich offenbar

$$14)\quad \begin{cases} A=\cos\omega_1\cos\Omega_1\,, \\ B=\sin\omega_1\cos\Omega_1\,, \\ C=\sin\Omega_1 \end{cases}$$

zu setzen berechtigt, wo dann

$$15)\quad A^2+B^2+C^2=1$$

ist. Die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene ist aber nach dem Vorhergenden

$$16)\quad (x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1+(z-z_1)\sin\Omega_1=0$$

oder

$$17)\quad (x-x_1)\cos\omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1+(z-z_1)\tang\Omega_1=0.$$

§. 3.

Es sei jetzt

$$18)\quad Mx+Ny+Kz+L=0$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene, und m, n, k seyen die Coordinaten eines Punktes in derselben. Durch diesen Punkt seien in der in Rede stehenden Ebene zwei auf einander senkrechte gerade Linien und eine auf der Ebene senkrecht stehende gerade Linie gezogen. Jede dieser drei geraden Linien wird durch den Punkt (mnk) in zwei Theile getheilt, und für einen dieser beiden Theile sollen bei jeder der drei Linien die Bestimmungswinkel in Bezug auf das System der xyz durch α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet werden.

Die Gleichungen der ersten und zweiten Linie sind:

$$19)\quad \begin{cases} \dfrac{x-m}{\cos\alpha}=\dfrac{y-n}{\cos\beta}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma}, \\[2ex] \dfrac{x-m}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-n}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma_1}. \end{cases}$$

Weil der Punkt (mnk) in der gegebenen Ebene liegt, so ist

$$20)\quad Mm+Nn+Kk+L=0,$$

und folglich

$$21)\quad M(x-m)+N(y-n)+K(z-k)=0$$

die Gleichung der gegebenen Ebene. Also hat man nach 19) und 21) die beiden folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \begin{cases} M\cos\alpha+N\cos\beta+K\cos\gamma=0, \\ M\cos\alpha_1+N\cos\beta_1+K\cos\gamma_1=0. \end{cases}$$

Weil aber die beiden durch die Gleichungen 19) charakterisirten Linien auf einander senkrecht stehen, so ist

$$23)\quad \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,$$

und ausserdem hat man die bekannte Gleichung

$$24)\quad \cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1.$$

Mit Hülfe der drei Gleichungen

$$25)\quad \left\{\begin{array}{c} M\cos\alpha_1 + N\cos\beta_1 + K\cos\gamma_1 = 0, \\ \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0, \\ \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 = 1 \end{array}\right.$$

kann man α_1, β_1, γ_1 aus α, β, γ und M, N, K finden, indem man durch Auflösung dieser drei Gleichungen in Bezug auf $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ als unbekannte Grössen sehr leicht die folgenden Formeln, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, erhält:

26)

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{N\cos\gamma - K\cos\beta}{\sqrt{(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 + (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\beta_1 = \pm\frac{K\cos\alpha - M\cos\gamma}{\sqrt{(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 + (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \pm\frac{M\cos\beta - N\cos\alpha}{\sqrt{(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 + (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2}}.$$

Weil aber

$$\begin{aligned}(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 &+ (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2 \\ &= M^2(\cos\beta^2 + \cos\gamma^2) + N^2(\cos\gamma^2 + \cos\alpha^2) + K^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2) \\ &- 2(MN\cos\alpha\cos\beta + NK\cos\beta\cos\gamma + KM\cos\gamma\cos\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 &+ (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2 \\ &= M^2\sin\alpha^2 + N^2\sin\beta^2 + K^2\sin\gamma^2 \\ &- 2(MN\cos\alpha\cos\beta + NK\cos\beta\cos\gamma + KM\cos\gamma\cos\alpha).\end{aligned}$$

Wegen der ersten der beiden Gleichungen 22) ist aber

$$\begin{aligned}0 &= M^2\cos\alpha^2 + N^2\cos\beta^2 + K^2\cos\gamma^2 \\ &+ 2(MN\cos\alpha\cos\beta + NK\cos\beta\cos\gamma + KM\cos\gamma\cos\alpha),\end{aligned}$$

und folglich, wenn man diese Gleichung zu der vorhergehenden addirt:

$$\begin{aligned}(M\cos\beta - N\cos\alpha)^2 &+ (N\cos\gamma - K\cos\beta)^2 + (K\cos\alpha - M\cos\gamma)^2 \\ &= M^2 + N^2 + K^2.\end{aligned}$$

Also ist nach 26) mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$27)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \pm\frac{N\cos\gamma - K\cos\beta}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}},\\ \cos\beta_1 &= \pm\frac{K\cos\alpha - M\cos\gamma}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}},\\ \cos\gamma_1 &= \pm\frac{M\cos\beta - N\cos\alpha}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen der in dem Punkte (mnk) auf der gegebenen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie, welcher die Bestimmungswinkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ entsprechen, sind

$$28)\quad \frac{x-m}{\cos\alpha_2} = \frac{y-n}{\cos\beta_2} = \frac{z-k}{\cos\gamma_2},$$

und nach den Principien der analytischen Geometrie hat man die folgenden Gleichungen:

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} M\cos\beta_2 &= N\cos\alpha_2,\\ N\cos\gamma_2 &= K\cos\beta_2,\\ K\cos\alpha_2 &= M\cos\gamma_2;\end{aligned}\right.$$

von denen jede eine Folge aus den beiden andern ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen und der bekannten Gleichung

$$30)\quad \cos\alpha^2_2 + \cos\beta_2^2 + \cos\gamma_2^2 = 1$$

erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander leicht:

$$31)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_2 &= \pm\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}},\\ \cos\beta_2 &= \pm\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}},\\ \cos\gamma_2 &= \pm\frac{K}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}.\end{aligned}\right.$$

Aus den Gleichungen 27) und 31) erhält man auch leicht die folgenden Formeln, in denen sich die obern und untern Zeichen ebenfalls auf einander beziehen:

$$32)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \pm(\cos\beta\cos\gamma_2 - \cos\gamma\cos\beta_2),\\ \cos\beta_1 &= \pm(\cos\gamma\cos\alpha_2 - \cos\alpha\cos\gamma_2),\\ \cos\gamma_1 &= \pm(\cos\alpha\cos\beta_2 - \cos\beta\cos\alpha_2).\end{aligned}\right.$$

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass O_1, O_2, O_3 drei Punkte auf der Erde sind, deren Längen, Breiten und Höhen über der Meeresfläche wir respective durch

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2;\quad \omega_3,\ \Omega_3,\ h_3$$

bezeichnen. Die den Punkten O_1, O_2 entsprechenden Grössen

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2$$

werden als bekannt angenommen, und es kommt nun darauf an, aus denselben mit Hülfe geodätischer Messungen die dem Punkte O_3 entsprechenden Grössen ω_3, Ω_3, h_3 abzuleiten.

Zu dem Ende messen wir mit dem Theodoliten in dem Punkte O_1 die horizontale Projection E_1 des 180° nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_2O_1O_3}$ und den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel J_1 der Linie $\overline{O_1O_3}$ gegen die durch O_1 gelegte Horizontalebene, und eben so in dem Punkte O_2 die horizontale Projection E_2 des 180° nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_1O_2O_3}$ und den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel J_2 der Linie $\overline{O_2O_3}$ gegen die durch O_2 gelegte Horizontalebene; so haben wir alle Data, welche zur Bestimmung der Grössen ω_3, Ω_3, h_3, d. h. der Lage des Punktes O_3, erforderlich sind, wie nun gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 in dem Systeme der xyz durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2; so haben wir zu deren Bestimmung nach 11) die folgenden Formeln:

$$33)\quad \begin{cases} x_1 = \left(h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}\right)\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\[2ex] y_1 = \left(h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}\right)\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\[2ex] z_1 = \left(h_1 + \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}}\right)\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$34)\quad \begin{cases} x_2 = \left(h_2 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2{}^2}}\right)\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\[2ex] y_2 = \left(h_2 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2{}^2}}\right)\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\[2ex] z_2 = \left(h_2 + \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2{}^2}}\right)\sin\Omega_2. \end{cases}$$

Hat man mittelst dieser Formeln die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 berechnet, so sind nach 16)

$$35)\quad (x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1 + (y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1 + (z-z_1)\sin\Omega_1 = 0$$

und

$$36)\quad (x-x_2)\cos\omega_2\cos\Omega_2 + (y-y_2)\sin\omega_2\cos\Omega_2 + (z-z_2)\sin\Omega_2 = 0$$

die Gleichungen der durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen, welche nun auch leicht entwickelt werden können.

Sind nun P, Q zwei Hülfswinkel, so hat man zur Berechnung der Linie

$$\overline{O_1 O_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

die folgenden Gleichungen:

$$37)\quad \begin{cases} x_1 - x_2 = \overline{O_1 O_2} . \cos P \cos Q, \\ y_1 - y_2 = \overline{O_1 O_2} . \sin P \cos Q, \\ z_1 - z_2 = \overline{O_1 O_2} . \sin Q; \end{cases}$$

mittelst welcher nach einem bekannten Verfahren $\overline{O_1 O_2}$ immer leicht gefunden werden kann. Ist aber $\overline{O_1 O_2}$ bekannt, so ergeben sich die Bestimmungswinkel φ_1, ψ_1, χ_1 und φ_2, ψ_2, χ_2 der Linien $\overline{O_1 O_2}$ und $\overline{O_2 O_1}$ in Bezug auf das System der xyz leicht mittelst der Formeln

$$38)\quad \cos\varphi_1 = \frac{x_2 - x_1}{\overline{O_1 O_2}},\quad \cos\psi_1 = \frac{y_2 - y_1}{\overline{O_1 O_2}},\quad \cos\chi_1 = \frac{z_2 - z_1}{\overline{O_1 O_2}}$$

und

$$39)\quad \cos\varphi_2 = \frac{x_1 - x_2}{\overline{O_1 O_2}},\quad \cos\psi_2 = \frac{y_1 - y_2}{\overline{O_1 O_2}},\quad \cos\chi_2 = \frac{z_1 - z_2}{\overline{O_1 O_2}}.$$

Bezeichnet man nun die Bestimmungswinkel der Projectionen der Linien $\overline{O_1 O_2}$ und $\overline{O_2 O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen in Bezug auf das System der xyz respective durch φ'_1, ψ'_1, χ'_1 und φ'_2, ψ'_2, χ'_2; so hat man zu deren Bestimmung nach den Formeln in der Abhandlung Nr. XXXVIII. I. in Theil VI. Heft III., wenn man die ihren absoluten Werthen nach 90° nicht übersteigenden Hülfswinkel μ_1 und μ_2 mittelst der Formeln

$$40)\quad \sin\mu_1 = \cos\omega_1 \cos\Omega_1 \cos\varphi_1 + \sin\omega_1 \cos\Omega_1 \cos\psi_1 + \sin\Omega_1 \cos\chi_1$$

und

$$41)\quad \sin\mu_2 = \cos\omega_2 \cos\Omega_2 \cos\varphi_2 + \sin\omega_2 \cos\Omega_2 \cos\psi_2 + \sin\Omega_2 \cos\chi_2$$

berechnet, die folgenden Formeln:

$$42)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1 - \sin\mu_1 \cos\omega_1 \cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1 - \sin\mu_1 \sin\omega_1 \cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1 - \sin\mu_1 \sin\Omega_1}{\cos\mu_1} \end{cases}$$

und

$$43)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2 - \sin\mu_2\cos\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2 - \sin\mu_2\sin\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi_2 - \sin\mu_2\sin\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

oder

$$44)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1}{\cos\mu_1} - \tang\mu_1\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1}{\cos\mu_1} - \tang\mu_1\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1}{\cos\mu_1} - \tang\mu_1\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$45)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2}{\cos\mu_2} - \tang\mu_2\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2}{\cos\mu_2} - \tang\mu_2\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi_2}{\cos\mu_2} - \tang\mu_2\sin\Omega_2; \end{cases}$$

bei deren Vereinfachung durch Einführung von Hülfswinkeln wir uns nicht aufhalten wollen.

Nun denke man sich in den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen von O_1 und O_2 aus auf den Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den in Rede stehenden Horizontalebenen senkrecht stehende Linien auf denselben Seiten dieser Projectionen, auf denen die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ auf den beiden Horizontalebenen liegen, gezogen, und bezeichne unter diesen Voraussetzungen die Bestimmungswinkel der beiden errichteten Perpendikel in Bezug auf das System der xyz respective durch φ_1'', ψ_1'', χ_1'' und φ_2'', ψ_2'', χ_2''. Ferner denke man sich von den Punkten O_1 und O_2 aus zwei auf den durch dieselben gelegten Horizontalebenen senkrecht stehende Linien auf den Seiten dieser Horizontalebenen, auf welchen die Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ liegen, gezogen, und bezeichne deren Bestimmungswinkel in Bezug auf das System der xyz respective durch φ_1''', ψ_1''', χ_1''' und φ_2''', ψ_2''', χ_2'''. Dann hat man nach 31), 32), 35) die Gleichungen:

$$46)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1''' = \pm\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\psi_1''' = \pm\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\chi_1''' = \pm\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$47)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1''=\pm(\cos\psi_1'\cos\chi_1'''-\cos\chi_1'\cos\psi_1'''), \\ \cos\psi_1''=\pm(\cos\chi_1'\cos\varphi_1'''-\cos\varphi_1'\cos\chi_1'''), \\ \cos\chi_1''=\pm(\cos\varphi_1'\cos\psi_1'''-\cos\psi_1'\cos\varphi_1'''); \end{cases}$$

und nach 31), 32), 36) hat man die Gleichungen:

$$48)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2'''=\pm\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\psi_2'''=\pm\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\chi_2'''=\pm\sin\Omega_2 \end{cases}$$

und

$$49)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2''=\pm(\cos\psi_2'\cos\chi_2'''-\cos\chi_2'\cos\psi_2'''), \\ \cos\psi_2''=\pm(\cos\chi_2'\cos\varphi_2'''-\cos\varphi_2'\cos\chi_2'''), \\ \cos\chi_2''=\pm(\cos\varphi_2'\cos\psi_2'''-\cos\psi_2'\cos\varphi_2'''). \end{cases}$$

Bemerken wollen wir noch, dass sich, wie man leicht findet, die Formeln 47) und 49) auch auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$47^*)\quad \begin{cases} \cos\psi_1''=\pm\dfrac{\cos\psi_1\sin\Omega_1-\cos\chi_1\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi_1''=\mp\dfrac{\cos\varphi_1\sin\Omega_1-\cos\chi_1\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi_1''=\pm\dfrac{(\cos\varphi_1\sin\omega_1-\cos\psi_1\cos\omega_1)\cos\Omega_1}{\cos\mu_1} \end{cases}$$

und

$$49^*)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2''=\pm\dfrac{\cos\psi_2\sin\Omega_2-\cos\chi_2\sin\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi_2''=\mp\dfrac{\cos\varphi_2\sin\Omega_2-\cos\chi_2\cos\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi_2''=\pm\dfrac{(\cos\varphi_2\sin\Omega_2-\cos\psi_2\cos\omega_2)\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

wo immer die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen

Ob man in den vorhergehenden Formeln die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, lässt sich in jedem einzelnen Falle nur aus einer besonderen Anschauung beurtheilen, und allgemeine Regeln lassen sich darüber nicht geben. Da man übrigens die Richtung eines Theils der Axe der z, welche als der einem jeden Punkte auf der Erde entsprechenden Weltaxe*) parallel zu betrachten ist, stets vor Augen hat, so wird sich immer leicht beurtheilen lassen, ob die Winkel χ_1'', χ_1''' und χ_2'', χ_2''' spitz oder stumpf sind, und daher wird immer auch leicht überhaupt über die Art, wie in den vorhergehenden Gleichungen die Zeichen zu nehmen sind, eine bestimmte Entscheidung gegeben werden können.

*) Im Sinne der sphärischen Astronomie gesprochen.

Bezeichnen wir nun aber, in Bezug auf die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen und die vorher auf diese Projectionen von $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ in den beiden Horizontalebenen und auf diese letzteren selbst von O_1 und O_2 aus errichteten Perpendikel als positive Theile zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme mit den Anfangspunkten O_1 und O_2, die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ respective durch $\varphi_1{}^{IV}$, $\psi_1{}^{IV}$, $\chi_1{}^{IV}$ und $\varphi_2{}^{IV}$, $\psi_2{}^{IV}$, $\chi_2{}^{IV}$; so ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$50)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{IV}=\cos E_1\cos J_1\,, \\ \cos\psi_1{}^{IV}=\sin E_1\cos J_1\,, \\ \cos\chi_1{}^{IV}=\sin J_1 \end{cases}$$

und

$$51)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{IV}=\cos E_2\cos J_2\,, \\ \cos\psi_2{}^{IV}=\sin E_2\cos J_2\,, \\ \cos\chi_2{}^{IV}=\sin J_2. \end{cases}$$

Bezeichnen endlich $\varphi_1{}^{V}$, $\psi_1{}^{V}$, $\chi_1{}^{V}$ und $\varphi_2{}^{V}$, $\psi_2{}^{V}$, $\chi_2{}^{V}$ die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ in Bezug auf das System der xyz, so ist, wie leicht aus einem bekannten Satze der analytischen Geometrie erhellen wird:

$$52)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{V}=\cos\varphi_1{}'\cos\varphi_1{}^{IV}+\cos\varphi_1{}''\cos\psi_1{}^{IV}+\cos\varphi_1{}'''\cos\chi_1{}^{IV}, \\ \cos\psi_1{}^{V}=\cos\psi_1{}'\cos\varphi_1{}^{IV}+\cos\psi_1{}''\cos\psi_1{}^{IV}+\cos\psi_1{}'''\cos\chi_1{}^{IV}, \\ \cos\chi_1{}^{V}=\cos\chi_1{}'\cos\varphi_1{}^{IV}+\cos\chi_1{}''\cos\psi_1{}^{IV}+\cos\chi_1{}'''\cos\chi_1{}^{IV}; \end{cases}$$

und

$$53)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{V}=\cos\varphi_2{}'\cos\varphi_2{}^{IV}+\cos\varphi_2{}''\cos\psi_2{}^{IV}+\cos\varphi_2{}'''\cos\chi_2{}^{IV}, \\ \cos\psi_2{}^{V}=\cos\psi_2{}'\cos\varphi_2{}^{IV}+\cos\psi_2{}''\cos\psi_2{}^{IV}+\cos\psi_2{}'''\cos\chi_2{}^{IV}, \\ \cos\chi_2{}^{V}=\cos\chi_2{}'\cos\varphi_2{}^{IV}+\cos\chi_2{}''\cos\psi_2{}^{IV}+\cos\chi_2{}'''\cos\chi_2{}^{IV}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen kann man diese Formeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$54)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{V}=\cos J_1\,(\cos E_1\cos\varphi_1{}'+\sin E_1\cos\varphi_1{}'')+\sin J_1\cos\varphi_1{}''', \\ \cos\psi_1{}^{V}=\cos J_1\,(\cos E_1\cos\psi_1{}'+\sin E_1\cos\psi_1{}'')+\sin J_1\cos\psi_1{}''', \\ \cos\chi_1{}^{V}=\cos J_1\,(\cos E_1\cos\chi_1{}'+\sin E_1\cos\chi_1{}'')+\sin J_1\cos\chi_1{}''': \end{cases}$$

und

$$55) \begin{cases} \cos\varphi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\varphi_2' + \sin E_2 \cos\varphi_2'') + \sin J_2 \cos\varphi_2''', \\ \cos\psi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\psi_2' + \sin E_2 \cos\psi_2'') + \sin J_2 \cos\psi_2''', \\ \cos\chi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\chi_2' + \sin E_2 \cos\chi_2'') + \sin J_2 \cos\chi_2'''. \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, H_2 mittelst der Formeln

$$56) \tang F_1 = \frac{\cos\varphi_1'}{\cos\varphi_1''}, \tang G_1 = \frac{\cos\psi_1'}{\cos\psi_1''}, \tang H_1 = \frac{\cos\chi_1'}{\cos\chi_1''}$$

und

$$57) \tang F_2 = \frac{\cos\varphi_2'}{\cos\varphi_2''}, \tang G_2 = \frac{\cos\psi_2'}{\cos\psi_2''}, \tang H_2 = \frac{\cos\chi_2'}{\cos\chi_2''};$$

so wird

$$58) \begin{cases} \cos\varphi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\varphi_1'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos F_1} + \sin J_1 \cos\varphi_1''', \\ \cos\psi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\psi_1'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos G_1} + \sin J_1 \cos\psi_1''', \\ \cos\chi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\chi_1'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos H_1} + \sin J_1 \cos\chi_1''' \end{cases}$$

und

$$59) \begin{cases} \cos\varphi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\varphi_2'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos F_2} + \sin J_2 \cos\varphi_2''', \\ \cos\psi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\psi_2'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos G_2} + \sin J_2 \cos\psi_2''', \\ \cos\chi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\chi_2'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos H_2} + \sin J_2 \cos\chi_2'''. \end{cases}$$

Berechnet man aber ferner die Hülfswinkel F_1', G_1', H_1' und F_2', G_2', H_2' mittelst der Formeln

$$60) \begin{cases} \tang F_1' = \dfrac{\cos\varphi_1'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos\varphi_1''' \cos F_1}, \\ \tang G_1' = \dfrac{\cos\psi_1'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos\psi_1''' \cos G_1}, \\ \tang H_1' = \dfrac{\cos\chi_1'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos\chi_1''' \cos H_1} \end{cases}$$

und

$$61) \begin{cases} \tang F_2' = \dfrac{\cos\varphi_2'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos\varphi_2''' \cos F_2}, \\ \tang G_2' = \dfrac{\cos\psi_2'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos\psi_2''' \cos G_2}, \\ \tang H_2' = \dfrac{\cos\chi_2'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos\chi_2''' \cos H_2}; \end{cases}$$

so ist

$$62)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^V = \dfrac{\cos\varphi_1{}''' \sin(J_1+F_1{}')}{\cos F_1{}'}, \\ \cos\psi_1{}^V = \dfrac{\cos\psi_1{}''' \sin(J_1+G_1{}')}{\cos G_1{}'}, \\ \cos\chi_1{}^V = \dfrac{\cos\chi_1{}''' \sin(J_1+H_1{}')}{\cos H_1{}'} \end{cases}$$

und

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^V = \dfrac{\cos\varphi_2{}''' \sin(J_2+F_2{}')}{\cos F_2{}'}, \\ \cos\psi_2{}^V = \dfrac{\cos\psi_2{}''' \sin(J_2+G_2{}')}{\cos G_2{}'}, \\ \cos\chi_2{}^V = \dfrac{\cos\chi_2{}''' \sin(J_2+H_2{}')}{\cos H_2{}'}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Linien $\overline{O_1 O_3}$, $\overline{O_2 O_3}$ nebst ihren Verlängerungen über die Punkte O_1, O_2 hinaus sind nun

$$64)\quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi_1{}^V} = \frac{y-y_1}{\cos\psi_1{}^V} = \frac{z-z_1}{\cos\chi_1{}^V}$$

und

$$65)\quad \frac{x-x_2}{\cos\varphi_2{}^V} = \frac{y-y_2}{\cos\psi_2{}^V} = \frac{z-z_2}{\cos\chi_2{}^V};$$

und es kommt jetzt, um die Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 in dem Systeme der xyz zu finden, bloss auf die Bestimmung der Coordinaten des Durchschnittspunktes der durch die Gleichungen 64) und 65) charakterisirten geraden Linien an, wozu eine besondere Anleitung zu geben hier unnütze Weitläufigkeit sein würde, weil die analytische Geometrie alle dazu nöthigen Hülfsmittel darbietet. Da aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die durch die Gleichungen 64) und 65) charakterisirten geraden Linien sich in den meisten Fällen gar nicht schneiden werden, so wird man auf die Art zu verfahren haben, dass man die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 derjenigen Punkte der beiden in Rede stehenden geraden Linien bestimmt, welche den kleinsten Abstand von einander haben, und dann die arithmetischen Mittel

$$\tfrac{1}{2}(X_1+X_2),\ \tfrac{1}{2}(Y_1+Y_2),\ \tfrac{1}{2}(Z_1+Z_2)$$

als die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 betrachtet. Zugleich aber wird man auch immer die Grösse des Abstandes der beiden Punkte $(X_1 Y_1 Z_1)$ und $(X_2 Y_2 Z_2)$ ermitteln, um ein Maass für die bei der Bestimmung der

Lage des Punktes O_2 erreichte Genauigkeit zu haben, weil man diese Genauigkeit dem in Rede stehenden Abstande umgekehrt proportional zu setzen berechtigt sein wird. Eine allgemeine Anleitung zur Ausführung der betreffenden Rechnungen soll im folgenden Paragraphen gegeben werden.

§. 5.

Die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume seien überhaupt

$$66)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}. \end{array}\right.$$

Da die gerade Linie, durch welche die kürzeste Entfernung dieser beiden Linien von einander bestimmt wird, bekanntlich auf einer jeden derselben senkrecht steht, was sehr leicht synthetisch bewiesen werden kann; so haben wir, wenn die Gleichungen der in Rede stehenden geraden Linie durch

$$67)\quad \frac{x-\xi}{\cos\varphi}=\frac{y-\eta}{\cos\psi}=\frac{z-\zeta}{\cos\chi}$$

bezeichnet werden, nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichungen:

$$68)\quad \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}.\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}+\frac{\cos\gamma_0}{\cos\alpha_0}.\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0, \\ 1+\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}.\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}+\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1}.\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0; \end{array}\right.$$

aus denen sich leicht

$$69)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}=\frac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}, \\ \frac{\cos\chi}{\cos\varphi}=\frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}; \end{array}\right.$$

also

$$70)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\psi=\frac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}\cos\varphi, \\ \cos\chi=\frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}\cos\varphi \end{array}\right.$$

ergiebt. Nimmt man nun hierzu die bekannte Gleichung

$$71)\quad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1,$$

und setzt, indem J eine positive Grösse bezeichnet, der Kürze wegen

$$72)\quad J^2=(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2$$

oder, wie man hieraus mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$73)\quad \begin{cases}\cos\alpha_0^2+\cos\beta_0^2+\cos\gamma_0^2=1,\\ \cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1\end{cases}$$

leicht findet:

$$74)\quad J^2=1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2;$$

so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$75)\quad \begin{cases}\cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{J},\\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{J},\\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{J}.\end{cases}$$

Bezeichnen wir den von den beiden gegebenen geraden Linien eingeschlossenen, im Sinne der analytischen Geometrie genommenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch w, so ist bekanntlich

$$76)\quad \cos w=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

und man kann also die Gleichungen 75) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$77)\quad \begin{cases}\cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{\sin w},\\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\sin w},\\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\sin w}.\end{cases}$$

Berechnen wir aber die Hülfsgrössen R, G, H, wo R eine positive Grösse sein soll, auf bekannte Weise mittelst der Formeln:

$$78)\quad \begin{cases}R\cos G\cos H=\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1,\\ R\sin G\cos H=\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1,\\ R\sin H=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1;\end{cases}$$

so ist, wie man leicht findet:

$$79)\quad J=R,$$

und mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$80)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \cos G \cos H, \\ \cos\psi = \pm \sin G \cos H, \\ \cos\chi = \pm \sin H. \end{cases}$$

Sind X_0, Y_0, Z_0 die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gesuchten Linie mit der ersten der beiden gegebenen Linien, so haben wir nach 66) und 67) die Gleichungen

$$81)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0} = \dfrac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \dfrac{X_0-\xi}{\cos\varphi} = \dfrac{Y_0-\eta}{\cos\psi} = \dfrac{Z_0-\zeta}{\cos\chi}; \end{cases}$$

also

$$82)\quad \begin{cases} Y_0-y_0 = \dfrac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Y_0-\eta = \dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}(X_0-\xi) \end{cases}$$

und

$$83)\quad \begin{cases} Z_0-z_0 = \dfrac{\cos\gamma_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Z_0-\zeta = \dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}(X_0-\xi). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von Y_0 und Z_0 leicht:

$$84)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\psi-(\eta-y_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi}, \\ \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\chi-(\zeta-z_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\varphi}; \end{cases}$$

also, wie hieraus ferner leicht folgt:

$$85)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi)(\xi-x_0) \\ &+(\cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi)(\eta-y_0) \\ &+(\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi)(\zeta-z_0) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man

$$86)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi)(\xi-x_1) \\ &+(\cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi)(\eta-y_1) \\ &+(\cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi)(\zeta-z_1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Sehr leicht erhält man nun mittelst der Gleichungen 76) und 77) und der Gleichungen 73) die folgenden Ausdrücke:

$$87)\quad \begin{cases} \cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi=\mp\dfrac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w}{\sin w}, \\ \cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi=\mp\dfrac{\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w}{\sin w}, \\ \cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi=\mp\dfrac{\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w}{\sin w} \end{cases}$$

und

$$88)\quad \begin{cases} \cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w}{\sin w}, \\ \cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi=\pm\dfrac{\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w}{\sin w}, \\ \cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w}{\sin w}; \end{cases}$$

und kann also die Gleichungen 85) und 86) auch auf folgende Art darstellen:

$$89)\quad \left.\begin{array}{l} (\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(\xi-x_0) \\ +(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(\eta-y_0) \\ +(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(\zeta-z_0) \end{array}\right\}=0$$

und

$$90)\quad \left.\begin{array}{l} (\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(\xi-x_1) \\ +(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(\eta-y_1) \\ +(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(\zeta-z_1) \end{array}\right\}=0.$$

Denkt man sich nun, was offenbar verstattet ist, den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ mit dem Punkte $(X_0\,Y_0\,Z_0)$ zusammenfallend, so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung der Coordinaten X_0, Y_0, Z_0 die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{array}{l} (\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(X_0-x_1) \\ +(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(Y_0-y_1) \\ +(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(Z_0-z_1) \end{array}\right\}=0;$$

und eben so hat man, wenn X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gesuchten Linie mit der zweiten der beiden gegebenen Linien bezeichnen, zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_1-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{Y_1-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{Z_1-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(X_1-x_0)\\+(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(Y_1-y_0)\\+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(Z_1-z_0)\end{array}\right\}=0.$$

Diese beiden Systeme von Gleichungen kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)\{X_0-x_0-(x_1-x_0)\}\\+(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)\{Y_0-y_0-(y_1-y_0)\}\\+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)\{Z_0-z_0-(z_1-z_0)\}\end{array}\right\}=0$$

und

$$\frac{X_1-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{Y_1-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{Z_1-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)\{X_1-x_1-(x_0-x_1)\}\\+(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)\{Y_1-y_1-(y_0-y_1)\}\\+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)\{Z_1-z_1-(z_0-z_1)\}\end{array}\right\}=0;$$

und erhält nun mit Hülfe der Gleichung 76), wenn der Kürze wegen

$$\text{91)}\quad \begin{array}{l}K_0=(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)\,(x_1-x_0)\\\quad+(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)\,(y_1-y_0)\\\quad+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)\,(z_1-z_0)\end{array}$$

und

$$\text{92)}\quad \begin{array}{l}K_1=(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(x_0-x_1)\\\quad+(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)\,(y_0-y_1)\\\quad+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)\,(z_0-z_1)\end{array}$$

gesetzt wird, ohne Schwierigkeit die folgenden Ausdrücke.

$$\text{93)}\quad \left\{\begin{array}{l}X_0-x_0=K_0\dfrac{\cos\alpha_0}{\sin w^2},\\[2ex]Y_0-y_0=K_0\dfrac{\cos\beta_0}{\sin w^2},\\[2ex]Z_0-z_0=K_0\dfrac{\cos\gamma_0}{\sin w^2}\end{array}\right.$$

und

$$94)\quad \begin{cases} X_1 - x_1 = K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 - y_1 = K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 - z_1 = K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}; \end{cases}$$

oder

$$95)\quad \begin{cases} X_0 = x_0 + K_0 \dfrac{\cos\alpha_0}{\sin w^2}, \\ Y_0 = y_0 + K_0 \dfrac{\cos\beta_0}{\sin w^2}, \\ Z_0 = z_0 + K_0 \dfrac{\cos\gamma_0}{\sin w^2} \end{cases}$$

und

$$96)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 + K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 = y_1 + K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 = z_1 + K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$97)\quad \begin{cases} L_0 = (x_1 - x_0)\cos\alpha_0 + (y_1 - y_0)\cos\beta_0 + (z_1 - z_0)\cos\gamma_0, \\ L_1 = (x_0 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_0 - y_1)\cos\beta_1 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_1; \end{cases}$$

so ist

$$98)\quad \begin{cases} K_0 = L_0 + L_1 \cos w, \\ K_1 = L_1 + L_0 \cos w. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Linien von einander durch U, so lässt sich dieselbe leicht mittelst der folgenden Formeln berechnen:

$$99)\quad \begin{cases} U\cos V\cos W = X_0 - X_1, \\ U\sin V\cos W = Y_0 - Y_1, \\ U\sin W = Z_0 - Z_1; \end{cases}$$

was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Wenn man aus den vier Gleichungen 66) die drei Grössen x, y, z eliminirt, so erhält man als Bedingungsgleichung, dass die beiden gegebenen geraden Linien sich schneiden, die folgende Gleichung:

$$100)\quad \left.\begin{array}{l}(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)(x_0-x_1)\\ +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)(y_0-y_1)\\ +(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)(z_0-z_1)\end{array}\right\}=0.$$

§. 6.

Indem wir jetzt wieder zu §. 4. zurückkehren, kommt es nun noch darauf an, dass wir zeigen, wie aus den gefundenen rechtwinkligen Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 die Grössen ω_3, Ω_3, h_3 abgeleitet werden können.

Bekanntlich haben wir zwischen diesen sechs Grössen die drei folgenden Gleichungen:

$$101)\quad \left\{\begin{array}{l} x_3=(h_3+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\cos\omega_3\cos\Omega_3,\\ y_3=(h_3+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\sin\omega_3\cos\Omega_3,\\ z_3=(h_3+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\sin\Omega_3. \end{array}\right.$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle

$$102)\quad \tan\!g\,\omega_3=\frac{y_3}{x_3},$$

mittelst welcher Formel ω_3 ohne alle Zweideutigkeit gefunden wird, wenn man nur beachtet, dass in Folge der beiden in Rede stehenden Gleichungen $\cos\omega_3$ immer gleiches Vorzeichen mit x_3, $\sin\omega_3$ stets gleiches Vorzeichen mit y_3 hat.

Eliminirt man aus der ersten und dritten, und aus der zweiten und dritten Gleichung die Grösse h_3, so erhält man zur Bestimmung von Ω_3 die beiden folgenden Gleichungen:

$$103)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_3}{\cos\omega_3\cos\Omega_3}-\dfrac{z_3}{\sin\Omega_3}=\dfrac{ae^2}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}},\\ \dfrac{y_3}{\sin\omega_3\cos\Omega_3}-\dfrac{z_3}{\sin\Omega_3}=\dfrac{ae^2}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}; \end{array}\right.$$

oder

$$104)\quad \begin{cases} z_3 - \dfrac{x_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\cos \omega_3} = -\dfrac{ae^2 \sin \Omega_3}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_3^2}}, \\ z_3 - \dfrac{y_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\sin \omega_3} = -\dfrac{ae^2 \sin \Omega_3}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_3^2}}; \end{cases}$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet;

$$105)\quad \begin{cases} \left(z_3 - \dfrac{x_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\cos \omega_3}\right)^2 = \dfrac{a^2e^4 \operatorname{tang} \Omega_3^2}{1+(1-e^2) \operatorname{tang} \Omega_3^2}, \\ \left(z_3 - \dfrac{y_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\sin \omega_3}\right)^2 = \dfrac{a^2e^4 \operatorname{tang} \Omega_3^2}{1+(1-e^2) \operatorname{tang} \Omega_3^2}; \end{cases}$$

woraus sich nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von Ω_3 die beiden folgenden Gleichungen des vierten Grades ergeben:

$$106)\quad \left. \begin{aligned} &\operatorname{tang} \Omega_3^4 \\ &-\frac{2z_3 \cos \omega_3}{x_3} \operatorname{tang} \Omega_3^3 \\ &+\frac{x_3^2 + \{(1-e^2) z_3^2 - a^2e^4\} \cos \omega_3^2}{(1-e^2) x_3^2} \operatorname{tang} \Omega_3^2 \\ &-\frac{2z_3 \cos \omega_3}{(1-e^2) x_3} \operatorname{tang} \Omega_3 \\ &+\frac{z_3^2 \cos \omega_3^2}{(1-e^2) x_3^2} \end{aligned} \right\} = 0$$

und

$$107)\quad \left. \begin{aligned} &\operatorname{tang} \Omega_3^4 \\ &-\frac{2z_3 \sin \omega_3}{y_3} \operatorname{tang} \Omega_3^3 \\ &+\frac{y_3^2 + \{(1-e^2) z_3^2 - a^2e^4\} \sin \omega_3^2}{(1-e^2) y_3^2} \operatorname{tang} \Omega_3^2 \\ &-\frac{2z_3 \sin \omega_3}{(1-e^2) y_3} \operatorname{tang} \Omega_3 \\ &+\frac{z_3^2 \sin \omega_3^2}{(1-e^2) y_3^2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Bei Weitem mit grösserem Vortheil als dieser Gleichungen des vierten Grades wird man sich aber bei der Bestimmung von Ω_3 der folgenden einfachen Näherungsmethode bedienen. Bezeichnen wir nämlich den mit Ω_3 gleiches Vorzeichen habenden Neigungswinkel der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte O_3 gezogenen geraden Linie gegen die Ebene des Erdäquators durch Θ_3, und die Entfernung des Punktes O_3 von dem Mittelpunkte der Erde durch R_3, so haben wir offenbar zur Berechnung der Grössen ω_3, Θ_3, R_3 die folgenden Gleichungen:

$$107) \begin{cases} x_3 = R_3 \cos\omega_3 \cos\Theta_3, \\ y_3 = R_3 \sin\omega_3 \cos\Theta_3, \\ z_3 = R_3 \sin\Theta_3; \end{cases}$$

mittelst welcher die drei in Rede stehenden Grössen auf bekannte Weise immer leicht gefunden werden können. Da nun bei wirklichen Anwendungen Θ_3 und Ω_3 immer nur wenig von einander verschieden sind, so kann man Θ_3 als einen ersten Näherungswerth von Ω_3 betrachten, und wird dann immer etwa mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$109) \begin{cases} z_3 = \dfrac{x_3 \operatorname{tang}\Omega_3}{\cos\omega_3} - \dfrac{ae^2 \sin\Omega_3}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}} \\ z_3 = \dfrac{y_3 \operatorname{tang}\Omega_3}{\sin\omega_3} - \dfrac{ae^2 \sin\Omega_3}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}} \end{cases}$$

nach einigen Versuchen leicht den genauen Werth von Ω_3 zu bestimmen im Stande sein.

Hat man ω_3 und Ω_3 gefunden, so ergiebt sich die Höhe über der Meeresfläche h_3 mittelst einer jeden der drei folgenden Formeln:

$$110) \begin{cases} h_3 = \dfrac{x_3}{\cos\omega_3 \cos\Omega_3} - \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}, \\ h_3 = \dfrac{y_3}{\sin\omega_3 \cos\Omega_3} - \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}, \\ h_3 = \dfrac{z_3}{\sin\Omega_3} - \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}; \end{cases}$$

und es sind also jetzt alle zur Bestimmung der Lage des Punktes O_3 auf der Erde erforderlichen Elemente gefunden.

§. 7.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass man geodätische Messungen wie die obigen auch zu der genaueren Bestimmung von e benutzen kann, wobei aber die Winkelmessungen selbst als fehlerfrei, wenigstens als im höchsten Grade genau vorausgesetzt werden müssen. Findet man nämlich, dass die im Obigen durch U bezeichnete kürzeste Entfernung der beiden von O_1 und O_2 nach O_3 gezogenen Gesichtslinien von einander nicht verschwindet, so wird man, insofern man die Winkelmessungen als fehlerfrei vorauszusetzen berechtigt ist, den Grund hiervon in einer fehlerhaften Annahme des Werthes der Grösse e zu suchen berechtigt sein, und wird nun e so lange nach und nach kleine Veränderungen erleiden lassen, bis man einen Werth von e findet, für welchen die Grösse U verschwindet, den man als die definitive Bestimmung der Grösse e betrachtet. Hat man aber e auf

diese Weise gefunden, so erhält man auch leicht den corrigirten Werth der sogenannten Abplattung $\frac{a-b}{a}$, weil

$$111)\quad \frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}=1-\sqrt{(1-e)(1+e)}$$

ist.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass es bei allen obigen Rechnungen jedenfalls am zweckmässigsten sein wird, die in den Formeln vorkommende Grösse a als Einheit anzunehmen, was natürlich verstattet ist.

X.

Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre *).

(Fortsetzung der Abhandlung Thl. V. Nr. XXI.)

Von dem

Herrn Doctor **Barfuss** zu Weimar.

---

§. 7.

In den §§. 4., 5. und 6. habe ich mich hinlänglich über die Principien ausgesprochen, auf welche der Beweis des Kräfteparallelogrammes sich stützt; auch glaube ich mich sattsam desshalb gerechtfertigt zu haben, warum ich der ersten von Newton entlehnten Betrachtungsweise den Vorzug geben möchte, wiewohl ich erst in diesem Artikel die Sache zu Ende bringen werde. Zugleich aber erhellet auf das Deutlichste, dass diejenigen im Irrthume sind, welche das Kräfteparallelogramm, als nicht erweisbar, unter die mechanischen Axiome rechnen wollen. Diese übersehen, dass es noch eines Axiomes bedarf, um das Parallelogramm zweier Eindrücke auf beliebig viele auszudehnen, ein Axiom, welches mit dem unter 1. in §. 6. aufgeführten identisch ist. Dasselbe enthält ja aber schon mit nur geringer Beihülfe das Kräfteparallelogramm.

---

*) In der vorigen Abhandlung mögen folgende, in §. 6. vorkommende sinnstörende Fehler berichtigt werden:

statt „es giebt noch gar keine Ausführung" lese man: „es giebt noch gar keine Auskunft."

statt „wenn es allein vorhanden wäre" muss es heissen: „wie wenn" u. s. w.

§. 8.

Nun müssen wir aber noch erwägen, dass in sehr vielen Lehrbüchern, und namentlich auch bei Poisson, dessen Demonstration ich oben einer Kritik unterwarf, das Axiom A. in §. 3. oder 5. in §. 6. eine etwas andere Bedeutung hat, als ich demselben beigelegt habe. Man definirt hier, Kraft sei das, was eine Bewegung hervorbringt, und da hierin schon die Anerkennung liegt, dass man die Kraft nur aus ihrer Wirkung beurtheilen könne, so muss man als Einheit der Kräfte diejenige annehmen, wodurch eine gewisse Einheit der (gleichförmigen) Bewegung entsteht. Nun sollte man eigentlich erwarten, dass die Kräfte durchaus nach dem Verhältniss der durch sie erzeugten Bewegungen abgemessen würden, dass also die doppelte, dreifache Kraft diejenige wäre, welche die doppelte, dreifache Einheit der Bewegung hervorbrächte, und wenn man bei diesem Maasse der Kräfte ihr Parallelogramm beweisen wollte, so wäre der Grundsatz in §. 4. wenigstens für den Fall unerlässlich, wo mehrere Kräfte nach einerlei Richtung wirken. Ausserdem würde man etwas ganz anderes erhalten, als ein Kräfteparallelogramm.

Aber so werden die Kräfte in jenen Lehrbüchern nicht gemessen, vielmehr versteht man unter der Kraft n (= ganzer Zahl) diejenige, die resultirt, wenn die Krafteinheit gleichzeitig $n$mal nach gleicher Richtung wirkt, wobei es indessen noch nicht folgt, dass hierdurch auch das $n$fache der Bewegungseinheit entstehe. Unter der Kraft $\frac{m}{n}$ müssen wir dann diejenige verstehen, welche $n$mal gleichzeitig nach gleicher Richtung wirkend eben so viel thut, als die $m$malige Wiederholung der Krafteinheit vermag.

In diesem Kräftemaasse liegt freilich nicht nothwendig die Proportionirung der Kräfte und der durch sie erzeugten Geschwindigkeiten, indessen müssen letztere doch irgend einer Potenz der Kräfte proportional sein. Denn ist a die durch die Krafteinheit erzeugte Geschwindigkeit und n eine andere Kraft, so wird man ihre Geschwindigkeit durch $f(a,n)$ bezeichnen können. Wird die Kraft n, $m$mal wiederholt, so entsteht die Kraft mn und ihr gehört die Geschwindigkeit $f(a,mn)$. Sofern wir aber anzunehmen berechtigt sind, dass a die einzige Längengrösse in $f(a,n)$ sei, können wir $f(a,n)=af(n)$ und $f(a,mn)=af(mn)$ setzen. Da aber die Einheit des Kräftemaasses eine willkührliche sein muss, wie die jedes anderen, so lässt sich auch die Kraft n als Einheit ansehen, wodurch wir nun für die vorige Kraft mn die Zahl m erhalten. Ist b die zu n gehörige Geschwindigkeit, so kann man die zu mn gehörige $=b.\varphi(m)=af(n).\varphi(m)$ setzen, und es muss daher

$$f(mn)=\varphi(m).f(n)$$

sein. Wird $n=1$, so ist auch $f(n)=1$ und daher $f(m)=\varphi(m)$. Folglich ist

$$f(mn)=f(m).f(n),$$

und dieser Bedingung thut bekanntlich nur die Form n^{μ} Genüge. Die der Kraft n gehörige Geschwindigkeit ist also immer an^{μ}, wenn a die Geschwindigkeit der Krafteinheit ist.

Es ist nun einleuchtend, dass, wenn zwei Kräfte nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ihrer Summe gleich sein muss. Dieses ist eine nothwendige Folge des Kräftemaasses, und wenn hierzu noch die Sätze 1, 2, 3 und 4 des §. 6. zu Hilfe genommen werden, so lässt sich das Kräfteparallelogramm sofort beweisen, indem die Frage nun eigentlich so lautet: Wenn nach der einen Richtung m, nach einer anderen n Krafteinheiten gleichzeitig wirken, nach welcher Richtung geht die Bewegung und wie viele Krafteinheiten müssen nach eben der Richtung wirken, um eben so viel zu leisten, als die Seitenkräfte vermögen. Dabei kommt die von n Krafteinheiten erzeugte Bewegung gar nicht in Frage, die Bewegungslehre erfordert aber noch als Axiom, dass in dem Geschwindigkeitsausdrucke an^{μ}, $\mu=1$ sei, und somit wäre mit dieser Darstellung der Lehren gar kein Vortheil verbunden, wenn nicht anderseits erwidert werden könnte, dass die von der Bewegungslehre unabhängige Ausbildung der Statik eine grössere Wissenschaftlichkeit für sich in Anspruch nehme. Es wären so viel Bewegungslehren möglich, als man in an^{μ} dem μ Werthe beilegen wollte, für alle diese wäre aber die Gleichgewichtslehre ein und dieselbe. Wenn uns nun auch eine Statik bei Bewegungsverhältnissen, die in der Natur nicht existiren, gleichgiltig sein könnte, so ist dieselbe dennoch in sehr vielen Lehrbüchern in entschiedenster Unabhängigkeit von der Bewegungslehre vorgetragen worden, besonders da man noch auf die Meinung verfallen war, dass die Gleichgewichtslehre von aller Hypothese frei sei und daher gleichsam unmittelbare Evidenz besitze.

Diesem muss ich aber geradezu widersprechen. Man betrachte doch nur den Satz, dass zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte sich aufheben. Diesem kommt unmittelbare Evidenz nur in dem Falle zu, wo der Körper in absoluter Ruhe gedacht wird. Hat derselbe irgend eine Geschwindigkeit, so ist jener Satz nur noch in dem Falle klar, wo die Richtung der Kräfte senkrecht gegen die Richtung der Bewegung ist, in allen anderen Fällen aber liessen sich noch andere Möglichkeiten denken. Der Grundsatz 1. in §. 6. in Verbindung mit dem Kräftemaasse ist es eigentlich, wodurch die Statik ihr Fundament erhält, derselbe kann aber auf unmittelbare Evidenz nicht mehr Ansprüche machen, als der in §. 4. aufgestellte, wie ich schon oben bemerkte.

Durch das Axiom 1. in §. 6. ist ausgesprochen, dass die statischen Lehrsätze eben so gut für die relative wie für die absolute Ruhe der Körper gelten sollen. Sollten uns aber die Bewegungen zur Beurtheilung der Kräfte dienen, so müssten sie absolute sein, da sich dann die Kräfte wie gewisse Potenzen der Geschwindigkeiten verhalten würden. Da aber absolute Bewegungen niemals ein Gegenstand unserer Erfahrung sein können, so findet sich für die Statik leicht die Auskunft, das Verhältniss der Kräfte darnach zu beurtheilen, wie sie einander im Gleichgewicht halten. Hier lässt sich nun leicht zeigen, dass eine Bewegungslehre der wirklichen Natur, d. h. eine Beurtheilung der Bewegungen in der Natur für uns ganz unmöglich wäre, wenn sich nicht die Geschwin-

digkeiten wie die Kräfte verhielten, oder wenn wir nicht den Satz in §. 4. unseren Beurtheilungen zu Grunde legen könnten.

Da wir nämlich nur relative Bewegungen beobachten können, so sind wir ausser Stand zu entscheiden, ob eine gewisse Bewegung auch die blosse Folge der vorhergegangenen Einwirkung sei, vielmehr müssten wir diese Bewegung immer noch als bedingt durch den Eindruck ansehen, der dem Körper zu Folge des gemeinschaftlichen Fortrückens des Systemes mit zukommt. Die Bewegungen z. B., die wir auf der Erde beobachten, wären sämmtlich mit bedingt durch die Axendrehung der Erde, dann durch die Bewegung der Erde um die Sonne, dann durch die Bewegung des Sonnensystems, dann wieder durch die Bewegung eines höheren Systemes, und so würden wir in eine unendliche Reihe hinausgedrängt, in welcher wir nie einen Anfang erhalten. Wir würden zwar, wenn wir die Bewegung eines Körpers beobachten, sagen können, dass eine Kraft auf denselben einwirke oder eingewirkt habe, könnten aber nie Aufschluss darüber erhalten, welche Bewegung diese oder jene bestimmte Kraft hervorbringen müsse.

Daher scheint mir auch das Gesetz von der Verhältnissmässigkeit der Kräfte und der Geschwindigkeiten mehr als eine blosse Hypothese zu sein, eben weil ohne dasselbe eine Beurtheilung der Naturerscheinungen gar nicht möglich wäre. Es ist ein rein naturphilosophisches Gesetz, das aber bequemer und allgemeiner in der Form aufgefasst wird, die ich in §. 4. vorgeschlagen habe. Sobald wir uns den Körper im absoluten Raume, d. h. ausser aller Verbindung mit andern Körpern denken, so sind (fortschreitende) Bewegung und Ruhe für ihn ganz gleichgiltige Zustände, und in ihm ist nichts, wodurch diese Zustände sich von einander unterscheiden liessen. Umgeben wir ihn aber mit noch anderen Körpern, so beginnt dann unsere Bewegungslehre, für welche es demnach gleichgiltig sein muss, in welchem Zustande das ganze Körpersystem sich befindet. Daher ist auch für das in diesem §. angeführte Kräftemaass jeder Zustand des Körpers gleichgiltig und hieraus folgt mit Nothwendigkeit die Verhältnissmässigkeit der Kräfte und der Geschwindigkeiten, indem sich die Kräfte sowohl als auch die ihnen entsprechenden Bewegungen summiren. — Freilich denkt man sich im absoluten Raume absolut ruhende Punkte, um sodann von absoluter Ruhe und Bewegung der Körper reden zu können, aber, wie mir scheint, nur aus Irrthum. Denn was hindert uns, jenen festen Punkten des Raumes mit allen darauf bezogenen Körpern jede beliebige gemeinschaftliche Bewegung beizulegen? Sind doch die festen Punkte im Raume zuletzt nichts weiter, als ruhende Körper, die eben darum ruhen, weil man ihre Bewegung nicht wahrnimmt.

Diese Gründe haben mich bewogen, der Darstellung, wie ich sie oben begonnen habe, den Vorzug zu geben. Ueberhaupt scheint es mir schon aus dem Grunde vortheilhaft, mit der Bewegungslehre unmittelbar zu beginnen, weil dieselbe weit mehr durch klare Anschauung unterstützt wird, als die in so vielen Lehrbüchern vorgetragene Gleichgewichtslehre, sofern sie auf den eben besprochenen Principien beruht. Das Gleichgewicht ist dann nur der besondere Fall, wo die Bewegung eines Körpers Null ist, und die Statik besteht nun nicht mehr als unabhängige physikalische

Wissenschaft, sondern ihr kommt bloss eine mathematische Bedeutung in so fern zu, als die Bedingung, dass die Bewegung $=0$ sei, oft zu sehr einfachen, und desshalb beim Calcul sehr brauchbaren Relationen unter den Kräften führt.

§. 9.

1) Wir haben bisher die Eindrücke der Körper, d. h. ihre Geschwindigkeiten, als augenblicklich entstanden betrachtet, oder vielmehr, wir haben von der Zeit, in welcher ein Eindruck entstanden sein konnte, gänzlich abgesehen. In der Natur gehört indessen, nach dem Gesetz der Stetigkeit, zur Entstehung eines bestimmten Eindrucks immer eine Zeit, wenn gleich dieselbe oft so klein sein kann, dass sie sich unserer Wahrnehmung entzieht. Die Ursache nun, welche die Zeit hindurch wirkt und dadurch den Eindruck eines Körpers fortwährend und stetig ändert, nennen wir eine Kraft. Sagen wir dagegen, dass ein Körper einen Eindruck erhalten habe, so meinen wir, dass eine Kraft thätig gewesen sei, aber gegenwärtig aufgehört habe zu wirken.

Sehen wir nun, dass eine Kraft eine grössere Geschwindigkeit erzeugt hat, als eine andere in derselben Zeit, so nennen wir jene grösser als diese. Da diess indessen nur eine durchschnittliche Vergleichung giebt, so sind wir darauf hingewiesen, uns Kräfte zu denken, die in gleichen Zeiten die Geschwindigkeiten um gleich viel vermehren, so wie wir in gleicher Weise die gleichförmige Bewegung construirten, um einen bestimmteren Begriff von Geschwindigkeit zu erhalten. Hierbei liegt aber noch die Voraussetzung zu Grunde, dass es für eine bestimmte Vermehrung der Geschwindigkeit in einer bestimmten Zeit gleichgiltig sei, welche Geschwindigkeit nach derselben Richtung der Körper schon hatte, und es muss daher das Axiom in §. 4. noch allgemeiner aufgefasst werden, oder es macht sich die Vergleichung der stetig veränderten Bewegung mit einer ruckweise veränderten nöthig. Das letztere liesse sich für die gleichförmig beschleunigte Bewegung etwa in folgender Weise durchführen.

2) Man denke sich, ein Körper habe ursprünglich einen Eindruck a und zu demselben komme dann ein neuer Eindruck g nach derselben Richtung, so wird nun $a+g$ der Eindruck sein. Kommt in der Folge nach Verlauf einer jeden Zeiteinheit immer wieder derselbe Eindruck g hinzu, so wird der Körper in der ersten Zeiteinheit den Eindruck $a+g$, in der zweiten den Eindruck $a+2g$, in der dritten den Eindruck $a+3g$, und überhaupt in der $t$ten Zeiteinheit den Eindruck $a+gt$ haben. Hierbei können wir uns aber zugleich auch vorstellen, dass der Eindruck g nicht augenblicklich, sondern durch beliebig viele gleiche, während der Zeiteinheit in gleichen Zwischenzeiten erfolgende Eindrücke entstanden sei, und dann gewinnt die Formel $a+gt$ auch für diejenigen Fälle Bedeutung, wo t ein Bruch $\frac{m}{n}$ ist. Dann entsteht g während der Zeiteinheit durch n Eindrücke, die successive nach der Zeit $\frac{1}{n}$ erfolgen und von denen jeder $=\frac{g}{n}$ ist. Nachdem also die Zeit

$\frac{1}{n}$ m mal erfolgt ist, haben wir den Eindruck $a + \left(\frac{g}{n}\right) . m = a + g\left(\frac{m}{n}\right) = a + gt$. Indem wir aber den Ausdruck $a + gt$ unter der Voraussetzung jeder beliebigen Theilung der Zeiteinheit auffassen, entspricht ihm nur die Bewegung mit gleichförmiger Beschleunigung.

3) Hieraus ersehen wir zugleich, dass es einerlei ist, welche Anfangsgeschwindigkeit (a) der Körper schon hatte und dass die gleichförmig beschleunigende Kraft eine während ihrer ganzen Dauer sich gleichbleibende ist, daher wir sie am füglichsten eine constante nennen. Zugleich ist auch einleuchtend, dass das Beschleunigungsmaass g in dem Geschwindigkeitsausdrucke $a + gt$ das Maass der constanten Kraft sein kann. Wirken dann zwei constante Kräfte gleichzeitig auf einen Körper, so muss die daraus hervorgehende Mittelkraft ganz nach der Construction des Parallelogrammes beurtheilt werden. Denn man kann in der vorigen Betrachtung den Eindruck g auf beliebige Weise als Resultante zweier Seiteneindrücke denken, die unter jedwedem Winkel wirken können. So oft g sich wiederholt, substituire man dieselben Componenten, und so oft nur ein Theil von g gedacht wird, nehme man den gleichvielsten Theil der Componenten.

4) Indessen lässt sich die Vergleichung der stetig veränderten Bewegung mit einer solchen, in welcher die Veränderungen ruckweise erfolgen, für den gegenwärtigen Fall ganz umgehen, da man, gestützt auf die Relativität aller Bewegungen, die Bedeutung des Axiomes in §. 4. dahin erweitern kann, dass daraus unmittelbar die Bestimmungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung folgen. Man denke sich ein System von Körpern, denen irgend eine gemeinschaftliche Bewegung zukommt, so müssen wir die relativen Bewegungen in diesem Systeme gerade so beurtheilen, wie wenn dasselbe vollkommen ruhte, weil sonst für uns gar keine Beurtheilung der Bewegungen möglich wäre. Geben wir die Richtigkeit dieser Bemerkung auch nur für den Fall zu, dass die Bewegung des Systemes gleichförmig und geradlinig ist, so folgt doch auf der Stelle, mit Hilfe der Zusammensetzung der Bewegungen (§. 2.), dass es gleichgiltig ist, ob die Kraft einen ruhenden Körper in Bewegung setzt, oder ob derselbe eine Geschwindigkeit nach gleicher Richtung schon mitbrachte. Es muss daher auch die Kraft, welche die Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten um gleich viel vermehrt, eine constante sein, für deren Maass wir das Beschleunigungsmaass der Bewegung nehmen können.

5) Aber wir müssen das obige Princip noch allgemeiner auffassen. Denn da für die inneren Bewegungen Ruhe und gleichförmige Bewegung des Systemes gleichgiltig sind, so müssen jene inneren Bewegungen auch noch auf dieselbe Weise erfolgen, wenn das System bald ruht, bald sich wieder bewegt, wobei jede neu beginnende Bewegung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit nach jeder beliebigen Richtung erfolgen darf. Darum aber muss jede progressive Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig sein. Allgemeiner noch kann man sagen, dass jedwede Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig ist, wenn die Bedingungen so gegeben sind, dass jeder Körper, an welche Stelle des Systemes man ihn auch setzen mag,

solche Bewegungen machen muss, vermöge deren er gegen alle übrigen Körper des Systemes in (relativer) Ruhe bleibt.

Denken wir uns nun ein Körpersystem in gleichförmig beschleunigter Bewegung unter der obigen Bedingung und geben wir einem dazu gehörigen Körper ebenfalls diese Art der Bewegung, so müssen wir die Kraft, welche die letztere (relative) in gleichen Zeiten um gleiche Geschwindigkeiten vermehrt, für constant halten, da für den Erfolg jeder Zustand des Systemes gleichgiltig ist. Aber eben desshalb muss ja auch die Kraft, welche dem Körper die mit dem Systeme gemeinschaftliche Bewegung mittheilt, eine constante sein. Aus beiden Bewegungen entsteht nach §. 2 eine dritte ebenfalls gleichförmig beschleunigte, und ihre Beschleunigungsmaasse liefern das der zusammengesetzten nach der Zeichnung des Parallelogrammes. Wir haben also zunächst nur ein Kräfteparallelogramm für den Fall, dass zwei constante Kräfte einen Körper nach immer parallelen Richtungen treiben, und eben auch das nur folgt aus Nr. 3.

§. 10.

1) Da nun bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung der Differentialquotient $\frac{dds}{dt^2}$ das Beschleunigungsmaass giebt, so ist derselbe zugleich auch das Maass der (constanten) Kraft. Jede andere ungleichförmige, aber stetige Bewegung lässt sich innerhalb bestimmter Zeitabschnitte um so genauer einer gleichförmig beschleunigten mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ vergleichen, je kleiner die Zeitabschnitte sind, und desshalb sind wir berechtigt, den Differentialquotienten $\frac{dds}{dt^2}$ bei jeder Bewegung für das Maass der zur Zeit t statthabenden Kraft anzusehen. So wie nun aus der ungleichförmigen Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ folgen würde, wenn zur Zeit t alle weitere Einwirkung plötzlich nachlassen wollte: eben so würde auch die ungleichförmig beschleunigte Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ sich verwandeln, wenn von der Zeit t an die Intensität der Einwirkung sich gleich bleiben wollte.

Aus dieser Bedeutung der Kraft geht aber augenblicklich hervor, dass aus zwei Kräften p und p', auch wenn sie veränderlich sind, dennoch zu der Zeit, wo ihre Intensitäten p und p' sind, eine dritte nach dem Gesetze des Parallelogrammes entsteht. Diese besteht aber nur innerhalb eines Zeitdifferentials, so fern auch die Kräfte p und p' hinsichtlich ihrer Intensität und Richtung nur innerhalb eines Zeitdifferentials als constant gelten können.

Man darf das Maass einer Kraft nicht mit dem vergleichen wollen, was wir oben einen Eindruck nannten. Dass eine Kraft $= g$ sei, bedeutet, dass sie nach Verlauf einer Zeiteinheit dem Körper

eine Geschwindigkeit g mittheilen würde; dass aber ein Körper den Eindruck g habe, hat den Sinn, dass derselbe sich mit der Geschwindigkeit g wirklich bewege. Beides lässt sich nicht in Vergleichung bringen, obschon es möglich ist, dass der Eindruck g durch die Kraft g entstanden sein kann, was dann gerade nach Verlauf einer Zeiteinheit geschehen sein müsste. Es konnte aber auch der Eindruck g durch eine andere Kraft in jeder beliebig kleinen Zeit entstanden sein, und wenn wir nun die Zeit des Entstehens unendlich klein denken, so müssen wir sagen, dass jede Kraft im Vergleich mit einem Eindrucke unendlich klein sei. Dabei liegt also die Vergleichung der Geschwindigkeiten und der Zeiten ihres Entstehens zu Grunde, in der Weise, dass Kräfte sich direct wie die Geschwindigkeiten und umgekehrt wie die Zeiten des Entstehens dieser Geschwindigkeiten verhalten.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Jena.

1) Wenn a, b und n ganze positive Zahlen bedeuten, so ist:

$$(a-b)_0 b_n + (a-b+1)_1 (b-1)_{n-1} + (a-b+2)_2 (b-2)_{n-2} + \ldots = (a+1)_n,$$

also die Summe jener aus Binomialkoeffizienten-Produkten gebildeten Reihe unabhängig von b. Wie lässt sich diess mittelst des Satzes

$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_2 \beta_{n-2} + \ldots$$

beweisen?

2) Durch welche Substitution bringt man das Integral

$$\int \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-b^2x^2}}$$

auf die Form

$$\int \frac{d\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi},$$

in welcher sein Werth gefunden werden kann.

3) Wie beweist man die Richtigkeit der Gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\tan\varphi}\, l\left(\frac{1+\tan\varphi}{1-\tan\varphi}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Wenn von einem Punkte O in der Ebene eines Vierecks $ABCD$ nach den Spitzen der vier Winkel desselben gerade Linien und zugleich die beiden Diagonalen dieses Vierecks gezogen sind, so ist immer der absolute Werth des Ausdrucks

$$\Delta AOD.\Delta BOC \pm \Delta AOB.\Delta COD,$$

in welchem das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Punkt O ausserhalb oder innerhalb des Vierecks liegt, dem Producte $\Delta AOC.\Delta BOD$ gleich.

Wenn wir $\sin(\sin x)$ durch $\sin^2 x$, $\sin(\sin^2 x)$ durch $\sin^3 x$, $\sin(\sin^3 x)$ durch $\sin^4 x$ u. s. w. bezeichnen, so ist der Werth, welchen der Bruch

$$\frac{x^{n-1}\sin^n x-(\sin x)^n}{x^{n+4}}$$

für $x=0$ erhält, der Grösse

$$\frac{n(n-1)}{36}$$

gleich, was durch Differentialrechnung oder auf eine andere Art zu erweisen ist.

Wenn A, B, C drei gegebene, in gerader Linie liegende Punkte sind, um den Punkt C ein Kreis beschrieben, und durch den Punkt B eine diesen Kreis in den Punkten D und E schneidende gerade Linie gezogen ist, so soll man die Lage dieser geraden Linie bestimmen, bei welcher die Sehne BD für ein in dem Punkte A befindliches Auge die grösste scheinbare Grösse hat.

Wenn ABC ein beliebiges ebenes Dreieck ist, und ausser der Summe oder Differenz der Seiten AB und AC auch noch die beiden den Winkel BAC und seine Nebenwinkel halbirenden, von dem Punkte A aus bis zu ihren Durchschnittspunkten D und E

mit der dem Punkte A gegenüberstehenden Seite BC des Dreiecks und deren Verlängerung über B oder C hinaus gezogenen geraden Linien AD und AE gegeben sind: das Dreieck ABC zu bestimmen.

Wenn O ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, dessen Seiten und Winkel auf die in der Trigonometrie gewöhnliche Weise bezeichnet werden, ist, und α, β, γ die Entfernungen des Punktes O von den Punkten A, B, C sind; so findet, wenn Δ die Fläche eines Dreiecks bezeichnet, dessen drei Seiten $\alpha \sin A$, $\beta \sin B$, $\gamma \sin C$ sind, jederzeit die Gleichung

$$2a^2 \operatorname{cosec} A \sin B \sin C = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \pm 8\Delta$$

Statt, in welcher das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises liegt.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei Seiten eines Dreiecks und den um dasselbe beschriebenen Kreis berührt.

Die Relation zwischen den Wurzeln der beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$x^3 - ax = b \text{ und } x^3 + ax^2 = b^2$$

zu finden.

Wenn zwischen einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, und drei andern Kreisen, deren Halbmesser r_1, r_2, r_3 sind, Berührungen von Aussen Statt finden, und d, d_1 die Entfernungen der Mittelpunkte der Kreise (r), (r_1) von der Centrallinie der Kreise (r_2) und (r_3) bezeichnen, so ist

$$\frac{r}{d} - \frac{r_1}{d_1} = 2.$$

(Für die Kugel ist die entsprechende Relation $\frac{\sin r}{\sin d} - \frac{\sin r_1}{\sin d_1} = 2$.)

XII.
Miscellen.

M. E. Bary, professeur de physique au collége de Charlemagne, adresse à l'Académie des sciences de Paris une note dans laquelle il fait connaître une nouvelle formule pour les tensions des vapeurs.

M. Bary propose de représenter les tensions de la vapeur d'eau au-dessous de 100° par la formule empirique

$$\log y = \log 760 - \frac{ax + bx^2}{c - x};$$

y est l'élasticité de la vapeur exprimée en millimètres de mercure à 0°; x est la température comptée en degrés centésimaux positivement au dessous de ce point. C'est la formule de Roche augmentée d'un terme en x^2. M. Bary croit cette modification nécessaire pour que la formule embrasse un intervalle de température un peu étendu. En calculant les constantes a, b, c, d'après les observations faites par M. Regnault à 75°, à 50° et à 25°, on obtient une expression qui reproduit fidèlement les expériences de ce physicien entre 100° et —32°. Cette formule logarithmique est plus simple et se prête à une extension plus grande que la formule exponentielle à cinq constantes imaginée par M. Biot et adoptée par M. Regnault.

L'auteur applique ensuite sa formule aux expériences de MM. Arago et Dulong sur les élasticités de la vapeur aqueuse entre 100° et 224°; puis il a recours à une autre modification de la formule de Roche, qui est plus commode dans le cas où c'est la témperature de la vapeur qui est l'inconnue. Faisant pour abréger $\log y = z$, il pose

$$x = \frac{Cz - Bz^2}{A - z};$$

y désigne la tension de la vapeur estimée en atmosphères de 760mm, et x est la température comptée à partir de 100° positivement au-dessus de ce point. Les deux formules s'accordent aussi bien l'une que l'autre avec l'ensemble des observations de MM. Arago et Dulong; entre 100° et 140° environ elles sont un peu plus exactes que la formule *binôme* employée par ces physiciens.

M. Bary justifie le choix de ses formules par des tableaux qui offrent les résultats de leur comparaison avec l'expérience.

L'auteur pense que les formules qu'il propose seraient susceptibles de plusieurs autres applications. Il cite comme exemple le passage de la chaleur rayonnante à travers des lames solides ou liquides dont on fait varier l'épaisseur. Soit l'équation

$$\log y = \log Y - \frac{ax + bx^2}{c + x},$$

où y est la quantité de chaleur transmise à une épaisseur variable x, et Y la quantité de chaleur qui répond à $x = 0$. Il a traduit en nombres cette formule pour la chaleur qui rayonne d'une lampe de Locatelli et qui traverse des lames de verre, de cristal de roche limpide, d'huile de colza, ou d'eau distillée, et il a constaté que la formule satisfait très bien à ces quatre séries d'observations faites par M. Melloni. Cette interpolation, dit M. Bary, est moins pénible que celle de M. Biot, qui décompose le flux total de chaleur en trois flux partiels, représente chacun d'eux par une intégrale définie, et ajoute ensuite ces trois intégrales.

Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel.

Von dem Herausgeber.

In Taf. I. Fig. 6. seien die sämmtlichen Seiten und Winkel des Dreiecks ABC und ausserdem die beiden an dem Punkte D liegenden Winkel ADC und BDC gegeben. Bezeichnen wir dann alle Seiten und Winkel so, wie es in der Figur geschehen ist, so ist

$$\varphi + \psi = C,$$

und nach den Principien der spärischen Trigonometrie haben wir:

$$\sin\alpha : \sin\varphi = \sin a : \sin x,$$
$$\sin\beta : \sin\psi = \sin b : \sin y$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos c - \cos x \cos y}{\sin x \sin y}.$$

Setzen wir nun im Folgenden der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin a}, \quad \mu = \frac{\sin\beta}{\sin b};$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin\varphi = \lambda \sin x, \quad \sin\psi = \mu \sin y;$$

also

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi);$$

d. i.

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi);$$

folglich

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))}{\lambda}, \quad \sin y = \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\mu}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos x \cos y = \cos c - \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y$$

ist, so erhält man, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung quadrirt und dann statt des Products $\cos x^2 \cos y^2$ das Product $(1 - \sin x^2)(1 - \cos y^2)$ einführt, nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$\sin c^2 = \sin x^2 + \sin y^2 - 2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y$$
$$- \sin(\alpha + \beta)^2 \sin x^2 \sin y^2,$$

d. i. nach dem Obigen die Gleichung

$$\sin c^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2} + \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\mu^2}$$
$$- \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi)) \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\lambda\mu}$$
$$- \frac{\sin(\alpha + \beta)^2 \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2 \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2\mu^2},$$

welche man leicht auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}\right) \{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 + \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2\}$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)$$
$$- \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda\mu} \{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2\}$$
$$- \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2\mu^2} \{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2\}$$

oder nach gehöriger Entwickelung auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda\mu}\right) \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)$$
$$- \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2\mu^2} \sin \tfrac{1}{2} C^4 \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)^4$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^4\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

bringt.

Dividiren wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

und setzen

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{1}{1+\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},\quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}{1+\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},$$

so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$A_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\Big\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\Big\},$$

$$B_1=-2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$C_1=2\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2-\Big\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\Big\}$$
$$-\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2-\Big\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\Big\}\cot\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$D_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\Big\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\Big\}\cot\tfrac{1}{2}C^2$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von $\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$ die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$0=A_1+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+C_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^3$$
$$+D_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4,$$

wobei man auch noch bemerken kann, dass sich der Coefficient C_1, wie man leicht findet, durch die Coefficienten A_1 und D_1 auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$C_1=A_1+D_1-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2.$$

Am 14ten März 1845 starb zu London Dr. J. Fr. Daniell, Prof. der Chemie am King's College, Secretair der Royal Society für das Ausland, u. A. durch seine Meteorological Essay's. 1823. 3. edit. 1845. allgemein bekannt.

Die vom Minister Villemain bei den Kammern in Paris beantragte und von diesen beschlossene Sammlung und Herausgabe der Schriften von Fermat hat einen erfreulichen Fortgang genommen. Libri hat bei einem Antiquar in Metz eine bedeutende Anzahl Handschriften gefunden. Biographische Notizen sind eingesendet worden, nach denen Fermat nicht zu Toulouse, sondern zu Beaumont-de-Lomagne geboren ist. Auch in Deutschland hofft man noch Handschriften aufzufinden. Der Minister Salvandy hat die Herausgabe Libri übertragen (Jenaische allgemeine Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 148. S. 590).

L'Académie des sciences de Paris a appris, qu'on vient de retrouver chez un libraire de Paris un des ouvrages perdus d'un géomètre du XVII[e] siècle, Desargues, le contemporain et l'ami de Descartes, de Fermat et de Pascal. On a même l'espoir de retrouver d'autres ouvrages du même géomètre, tous perdus jusqu'ici, et qu'on ne connaissait que par le dire de différents auteurs qui en avaient parlé avec éloge. L'Académie a chargé sa commission administrative de faire l'acquisition de l'ouvrage retrouvé, et le ministre de l'instruction publique sera prié de faire faire des recherches pour tâcher de retrouver les autres ouvrages du même auteur, sur l'existence desquels on possède, à ce qu'il parait, quelques indices.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig hat den Einsendungstermin der Bearbeitungen der im Literarischen Bericht Nr. XVIII. S. 288. angezeigten Preisaufgabe bis Ende März 1846 verlängert und den Preis auf 48 Dukaten erhöhet. Die Adresse ist an den jedesmaligen Sekretär der Gesellschaft zu richten.

Einige Bemerkungen über die Abhandlung Thl. VI. Heft II. Nr. XXIX.

Aus einem Schreiben des Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg an den Herausgeber.

In dem vorher genannten Hefte des Archivs findet sich von Seite 187 an eine recht zierliche Entwickelung verschiedener bestimmter Integralien von Herrn Oberlehrer Arndt in Stralsund, deren Verständniss aber leider durch einige Druck- oder Schreibfehler etwas beeinträchtigt wird. Für den Fall, dass Sie dieselben vielleicht noch nicht von anderer Hand mitgetheilt erhalten haben, ist es Ihnen wohl angenehm, wenn ich sie hier anzeige, da die Abhandlung um ihres interessanten Inhalts willen gar sehr verdient, völlig correct gemacht zu werden.

Seite 187. Zeile 12 v. u. ergänze hinter dem Worte „verschwindet" die Worte: „in so fern n eine ganze Zahl bedeutet".

Seite 191. Zeile 8 v. u. statt $-\frac{1}{4}\pi^2\log 2(2m)^2$ lese man $-\frac{1}{4}\pi^2.4(2m-1)\log 2$.

Seite 192. Zeile 6 muss heissen:

$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2(2m+1)^2\left(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{2m+2}{2m+1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{2m}{2m+1}\right).$$

Von hier an aber möchte der folgende Passus bis Zeile 17 vielleicht besser so lauten:

„Daher ist jetzt

$$(12)\int_0^{n\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2n^2\left(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{n\mp1}{n}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{n\pm1}{n}\right),$$

„wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade „oder ungerade ist. Für $n=1$ erhält man sofort

$$(13)\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}),$$

„wie es sich auch aus (8) ergiebt, wenn man daselbst $m=0$ macht."

Seite 193. Zeile 11 und 12 muss es statt $+(2\lambda+1)$ beide Male heissen $-(2\lambda+1)$.

Seite 193. Zeile 13 aber ist statt $-(2\lambda+1)$ zu setzen $+(2\lambda+1)$.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

1.

In den Miscellen des Archivs (Thl. IV. S. 223) ist eine Auflösung der Aufgabe von der Trisection des Winkels mitgetheilt, welche von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängig ist. Sie führt auf die Gleichung

$$x^4+ax^3-3r^2x^2-2ar^2x+a^2r^2=0,$$

in welcher r den Radius eines Kreises bedeutet, in dessen Mittelpunkte der zu theilende Winkel seinen Scheitel hat, während a und x die zu dem Winkel und seinem dritten Theile gehörenden Sehnen in diesem Kreise sind. Ein Blick auf diese Gleichung zeigt uns, dass $x=-a$ eine Wurzel derselben, die Gleichung also durch $x+a$ theilbar ist. Man erhält mithin die Gleichung dritten Grades

$$x^3-3r^2x+ar^2=0.$$

Ist der zu theilende Winkel $=2C$, so ist $a=2r\sin C$, $x=2r\sin\frac{1}{3}C$, und die Gleichung reducirt sich auf die bekannte

$$(\sin\tfrac{1}{3}C)^3-\tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{3}C+\tfrac{1}{4}\sin C=0.$$

2.

Die Gleichung $(\sin \frac{1}{3} C)^3 - \frac{3}{4} \sin \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} \sin C = 0$ wird in den elementaren Darstellungen der Trigonometrie gewöhnlich benutzt, um die Möglichkeit der Berechnung einer von Grad zu Grad fortschreitenden Tafel der Sinus nachzuweisen. Hat man nämlich aus den Eigenschaften der regelmässigen Vielecke $\sin 18^0$ und $\sin 15^0$ hergeleitet, so findet man leicht $\sin 3^0$, und kann nun auf jene Gleichung verweisen, deren Auflösung $\sin 1^0$ liefert.

Da diese Gleichung aber zum irreducibeln Falle gehört, so setzt ihre Lösung entweder die Benutzung trigonometrischer Tafeln, deren Berechnung erst nachgewiesen werden soll, oder die Entwickelung von $(\alpha + \beta i)^{\frac{1}{3}}$ nach dem binomischen Lehrsatze, oder die Kenntniss der Auflösung höherer numerischer Gleichungen voraus. Die erste Art ist wegen des speciellen Zwecks der Lösung dieser Aufgabe auszuschliessen, die dritte wegen des Standpunktes der Lernenden. Es erhellet mithin die Nothwendigkeit, bei der Auseinandersetzung der kubischen Gleichungen den irreducibeln Fall auf dem zweiten Wege ebenfalls aufzulösen und sich nicht auf die goniometrische Lösung zu beschränken.

Unsere Gleichung bietet dann, wenn man $C = 3^\circ$ setzt, ein vortreffliches Uebungsbeispiel dar, da die ersten Glieder der Reihen schon ein sehr genaues Resultat geben. Ihre drei Wurzeln sind

$$u + v,\ -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i,\ -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i;$$

worin

$$u = -\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1 + i \operatorname{tang} C)^{\frac{1}{3}}.i \text{ und } v = +\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1 - i \operatorname{tang} C)^{\frac{1}{3}}.i$$

sind, wie durch leichte Umformungen der Cardanischen Formel gefunden wird. Man erhält dann

$$u + v = (\cos C)^{\frac{1}{3}} \{ \overset{1}{B}_{\frac{1}{3}} \operatorname{tang} C - \overset{3}{B}_{\frac{1}{3}} (\operatorname{tang} C)^3 + \overset{5}{B}_{\frac{1}{3}} (\operatorname{tang} C)^5 - \dots \},$$

$$\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i = \tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} \{ 1 - \overset{2}{B}_{\frac{1}{3}} (\operatorname{tang} C)^2 + \overset{4}{B}_{\frac{1}{3}} (\operatorname{tang} C)^4 - \dots \};$$

wo nach der bekannten Bezeichnungsweise

$$\overset{k}{B}_{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\dots(\frac{1}{3}-(k-1))}{1.2.3\dots k}$$

ist. Bezeichnet man die erste Reihe mit P, die zweite mit Q, so sind die Wurzeln

$$P\sqrt[3]{\cos C},\ -\tfrac{1}{2}P\sqrt[3]{\cos C} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\cos C}.Q.$$

Setzt man nun $\sin C = \sin 3^\circ$, so sind die drei Wurzeln $\sin 1^\circ$, $\sin 59^\circ$ und $\sin -61^\circ$, wovon der Grund leicht einzusehen ist.

3.

In der mathematischen Theorie des Lichtes sind die goniometrischen Formeln

$$\sin x + \sin(x+z) + \sin(x+2z) \ldots. + \sin(x+nz) = \frac{\sin(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

und

$$\cos x + \cos(x+z) + \cos(x+2z) .. + \cos(x+nz) = \frac{\cos(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

von der grössten Wichtigkeit. Die in den **Supplementen zu Klügel's Wörterbuche** (Thl. II. S. 636 ff.) gegebene Herleitung derselben zeichnet sich dadurch aus, dass sie direkt und elegant ist, führt aber erst nach mancherlei Umformungen zu dem gewünschten Resultate. Als ich vor einiger Zeit die Beugungserscheinungen nach **Schwerd** durchging, der jene Formeln ohne Beweis aufstellt, fand ich folgende ganz leichte Ableitung derselben.

Aus den Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2,$$
$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha - \sin 2\beta$$

ergeben sich leicht die bekannten Formeln

$$1)\quad \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1) + \sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2) \ldots.$$
$$+ \sin(\alpha_n+\alpha_{n+1})(\alpha_n-\alpha_{n+1}) = \sin(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1}),$$

$$2)\quad \cos(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1) + \cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2) \ldots.$$
$$+ \cos(\alpha_n+\alpha_{n+1})\sin(\alpha_n-\alpha_{n+1}) = \cos(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1}).$$

Setzt man in diesen $\alpha-\alpha_1 = \alpha_1-\alpha_2 \ldots. = \alpha_n-\alpha_{n+1} = -\frac{z}{2}$ und $\alpha+\alpha_1 = x$, so erhält man $\alpha = \frac{x}{2}-\frac{z}{4}$, $\alpha_1 = \frac{x}{2}+\frac{z}{4}$, ... $\alpha_{n+1} = \frac{x}{2}+(2n+1)\frac{z}{4}$, und $\alpha+\alpha_1 = x$, $\alpha_1+\alpha_2 = x+z$, $\alpha_2+\alpha_3 = x+2z$, ... $\alpha_n+\alpha_{n+1} = x+nz$, sowie $\alpha+\alpha_{n+1} = x+\frac{nz}{2}$, und $\alpha-\alpha_{n+1} = -\frac{(n+1)z}{2}$.

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (1) und (2), so erhält man

$$\sin\frac{z}{2}.\{\sin x + \sin(x+z) + \sin(x+2z) + \ldots. + \sin(x+nz)\}$$
$$= \sin(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

$$\sin\frac{z}{2}.\{\cos x + \cos(x+z) + \cos(x+2z) + \ldots. + \cos(x+nz)\}$$
$$= \cos(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

woraus die oben hingestellten Gleichungen sich ohne Weiteres ergeben.

4.

Scheuet man die Vermittelung des Imaginären nicht, so kann man die in der vorigen Bemerkung hergeleiteten Formeln auch auf folgendem Wege erhalten.

In der Progression

$$a+ae+ae^2 \ldots\ldots + ae^n = \frac{a(1-e^{n+1})}{1-e}$$

setze man

$$a = \cos x + i \sin x, \quad e = \cos z + i \sin z;$$

dann kommt sogleich

$$\begin{aligned} &\{\cos x + \cos(x+z) + \cos(x+2z) + \cos(x+3z) \ldots\ldots + \cos(x+nz)\} \\ &+ i\{\sin x + \sin(x+z) + \sin(x+2z) + \sin(x+3z) \ldots\ldots + \sin(x+nz)\} \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x)(1 - \cos(n+1)z - i \sin(n+1)z)}{1 - \cos z - i \sin z}. \end{aligned}$$

Der Zähler der rechten Seite verwandelt sich sofort in

$$\cos x - \cos(x+(n+1)z) + i(\sin x - \sin(x+(n+1)z)),$$

und dies in

$$2 \sin \frac{(n+1)z}{2} \{\sin(x + \frac{n+1}{2} z) - i \cos(x + \frac{n+1}{2} z)\}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner der rechten Seite mit

$$1 - \cos z + i \sin z,$$

so wird der Zähler

$$2 \sin \frac{n+1}{2} z \left\{ \begin{array}{l} \sin(x + \frac{n+1}{2} z) - \sin(x + \frac{n-1}{2} z) \\ + i(\cos(x + \frac{n-1}{2} z) - \cos(x + \frac{n+1}{2} z)) \end{array} \right\},$$

und der Nenner wird $4(\sin \frac{1}{2}z)^2$. Durch die leichteste Umformung erhält man dann als Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite unserer Gleichung

$$4 \sin \frac{n+1}{2} z \,.\, \sin \frac{z}{2} \{\cos(x + \frac{nz}{2}) + i \sin(x + \frac{nz}{2})\}.$$

Wird die Division mit dem Nenner $4(\sin \frac{1}{2}z)^2$ ausgeführt, so wird unsere Gleichung

$$\{\cos x+\cos(x+z)+\ldots+\cos(x+nz)\}$$
$$+i\{\sin x+\sin(x+z)+\ldots+\sin(x+nz)\}$$
$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}z.\cos(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}}+i\frac{\sin\frac{n+1}{2}z.\sin(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}},$$

aus welcher durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile die in Rede stehenden goniometrischen Formeln erhalten werden.

Mathematische Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen.

Fractiones continuae, in quas explicari possunt radices reales aequationum algebraicarum tertii altiorisve gradus, quae coefficientes habent rationales et ad gradum inferiorem reduci nequeunt, qualitates sine dubio habent similes illis, quas in aequationibus primi et secundi gradus cognitas habemus. Desinit quidem finita forma fractionum continuarum, ubi aequationes primum gradum excedunt, desinit periodicitas ultra secundum, sed pro hisce formis aliae exstare possunt explicationum genera, quae si bene cognita fuerint, ad analysin indeterminatam promovendam magnopere valeant. Proponimus itaque, ut inquiratur in propritates generales fractionum continuarum gradus altioris, saltem earum, quae illas, quas novimus, immediate sequuntur, id est, in quas explicari possunt radices cubicae irrationales quantorum rationalium, ita ut leges generales definiantur, quibus tam ipsarum fractionum quam seriei convergentium principalium terminos ad quemlibet usque ordinem computare liceat sine ulla praevia determinatione terminorum omnium antecedentium.

In quaestionibus tractandis sermone Latino, Gallico, Anglico, Germanico, Suecico, Danicove uti licebit. Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris, sed tessera aliqua, adjiciendaque charta obsignata, eadem tessera notata, quae scriptoris nomen, ordinem domiciliumque indicet. (Preis 50 Dänische Ducaten. Einlieferungstermin vor Ausgang des August 1846. Adresse an den Sekretair der Akademie, Herrn Professor Johann Christian Örsted.)

XIII.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven.

Von
Herrn Fr. Seydewitz,
Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erster Theil.

§. 1.
Begriff der geometrischen Verwandtschaft.

a) Sind in einer Ebene 𝔈 (Taf. II. Fig. 1.) irgend zwei Punkte B, B' gegeben, so bestimmt ein jeder andere Punkt 𝔞 dieser Ebene zwei Gerade a, a', welche den letzteren mit B, B' verbinden, und umgekehrt: je zwei Strahlen a, a' der Punkte B, B' bestimmen einen, und zwar im Allgemeinen auch nur einen einzigen Punkt 𝔞 der Ebene 𝔈, und nur diejenigen zwei Strahlen derselben, welche zusammenfallen, haben nicht bloss einen, sondern unzählige Punkte gemein. Jeder unendlich entfernte Punkt bestimmt zwei parallele Strahlen, und umgekehrt. Irgend ein System von Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... bestimmt zwei Strahlbüschel B, B', deren Strahlen a, b, c, d....; a', b', c', d'.... paarweise nach jenen Punkten gehen, und diese Strahlbüschel sind in Ansehung dieser Strahlenpaare perspektivisch oder überhaupt projektivisch, jenachdem jenes System von Punkten einer geraden Linie A oder einem Kegelschnitte K, welcher durch die Punkte B, B' geht, angehört, und umgekehrt (Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 4. und 11.). Insbesondere bestimmen sämmtliche unendlich entfernte Punkte von 𝔈 zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B'.

b) Sind andererseits in einer Ebene 𝔈 irgend zwei Gerade A, A' gegeben, so bestimmt eine jede andere Gerade a dieser

Ebene zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, in welchen sie die ersteren schneidet, und umgekehrt: je zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ der Geraden A, A' bestimmen eine Gerade a der Ebene $\mathfrak{E}$, und nur diejenigen zwei Punkte derselben, welche sich im Durchschnitte von A, A' vereinigen, gehören unzähligen Geraden zugleich an. Jede mit A (oder A') parallele Gerade geht nach dem unendlich entfernten Punkte von A (A'), und eine in $\mathfrak{E}$ unendlich entfernt liegende Gerade geht nach den unendlich entfernten Punkten von A und A', und umgekehrt. Irgend ein System von Geraden $a, b, c, d....$ bestimmt auf A, A' zwei Punktenschaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....$, und es sind die Geraden A, A' in Ansehung dieser letzteren perspektivisch oder projektivisch überhaupt, jenachdem erstere durch einer lei Punkt B gehen oder einen Kegelschnitt K umhüllen, welcher auch A, A' zu Tangenten hat, und umgekehrt. Insbesondere bestimmt jeder unendlich entfernte Punkt B zwei projectivisch-ähnliche Gerade A, A'.

c) Betrachtet man jetzt irgend zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und denkt sich in der einen, $\mathfrak{E}$, zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei Gerade A, A', und in der anderen, $\mathfrak{E}_1$, zwei Strahlbüschel B_1, B_1' oder zwei Gerade A_1, A_1' dergestalt gegeben, dass immer das eine Gebilde der einen Ebene mit einem Gebilde der anderen, und das andere der ersten mit dem anderen der zweiten projektivisch ist, d. h. um bestimmter zu reden, dass

entweder α) $B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....)$ und zugleich
$B'(a', b', c', d'....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....)$;

oder β) $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....)$;

oder γ) $B(a, b, c, d....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 . \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$B'(a', b', c', d'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....)$

ist, so bestimmt im Falle α) ein jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlen a, a' der Strahlbüschel B, B', diese wieder bestimmen zwei und zwar nur zwei Strahlen a_1, a_1', welche denselben in den Strahlbüscheln B_1, B_1' entsprechen, und diese im Allgemeinen einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}_1$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird der Punkt $\mathfrak{a}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}_1$ bestimmt.

Im Falle β) bestimmt eine jede Gerade a der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ der Geraden A, A'; diese wieder bestimmen zwei, und zwar nur zwei ihnen entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ der Geraden A_1, A_1', und diese im Allgemeinen eine einzige Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird die Gerade a durch die Gerade a_1 bestimmt.

Im Falle γ) bestimmt jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlen a, a' der Strahlbüschel B, B', diese bestimmen die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ der Geraden A_1, A_1', und letztere im Allgemeinen eine einzige Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird der Punkt $\mathfrak{a}$ durch die Gerade a_1 bestimmt.

d) Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ können also mittels projektivischer Gebilde auf drei wesentlich verschiedene Arten auf einander bezogen werden: entweder nämlich entspricht im Allgemeinen

α) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene ein bestimmter Punkt und ein bestimmtes System von Punkten der anderen, und umgekehrt: erstere den letzteren; oder

β) einer jeden Geraden und einem jeden Systeme von Geraden der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen; und umgekehrt: erstere den letzteren; oder

γ) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen, und umgekehrt: erstere den letzteren.

Zwei auf irgend eine von diesen drei Arten auf einander bezogene Ebenen, sowie auch je zwei entsprechende Systeme ihrer Elemente, heissen, in Ansehung der zwei Paar projektivischen Gebilde B, B_1 und B', B_1', oder A, A_1 und A', A_1', oder B, A_1 und B', A_1', geometrisch verwandt (oder auch bloss verwandt), und diese Beziehung selbt die geometrische Verwandtschaft derselben.

§. 2.

Besondere Fälle.

Die weitere Eintheilung der geometrischen Verwandtschaften geht, wie bereits die so eben erhaltene, unmittelbar aus den, im Wesen der projektivischen Beziehungen überhaupt gegebenen Unterschieden hervor. Namentlich bieten sich drei verschiedene Gesichtspunkte dar, von denen die beiden ersteren alle drei Fälle *α*), *β*), *γ*), der dritte dagegen nur die Fälle *α*) und *β*) betreffen:

1) Nach der projektivischen Beziehung der den Gebilden beider Ebenen gemeinschaftlichen Elemente auf einander.

Entweder nämlich *a*) entspricht das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente in keiner Beziehung, d. h. weder insofern ersteres zu dem einen, noch insofern es zu dem anderen Gebilde gerechnet wird; *b*) oder ersteres entspricht dem letzteren nur insofern jenes zu dem einen Gebilde gerechnet wird; oder *c*) beide entsprechen sich in beiderlei Hinsicht.

2) Jenachdem die Ebenen aufeinander liegen oder nicht. Im ersten Falle können die gegebenen zwei Paare projektivischer Gebilde beide oder auch nur das eine schief, perspektivisch, oder aber aufeinander oder concentrisch, und insbesondere involutorisch liegen, und es entstehen die Fragen: ob und wieviele Paare entsprechender Elemente sich vereinigen? ob und wieviele Paare einander in doppeltem Sinne entsprechen?

3) Nach der projektivischen Beschaffenheit der gegebenen Gebilde; d. h. jenachdem beide Paare oder nur das eine projektivisch überhaupt, oder projektivisch-ähnlich oder projektivisch-gleich sind.

Im Folgenden wird der erste Gesichtspunkt vorherrschend die Ordnung der Betrachtung bestimmen, und daher werden zuvörderst die beiden unter 1. *a*) und 1. *b*) begriffenen Verwandtschaftsarten, welche wir die höheren nennen wollen, und im zweiten Theil dieser Abhandlung die dritte Art, welche unter den Namen der Collineation und Reciprocität bekannt ist, in Untersuchung gezogen werden.

§. 3.

Bestimmtheit zweier und vermittelte Beziehung mehrerer geometrisch verwandter Systeme aufeinander.

Da nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 2. das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier proj. Gebilde vollkommen bestimmt ist, wenn irgend drei dieser Paare beliebig gegeben sind, so muss auch, was unmittelbar einleuchtet:

1) Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen vollkommen und auf einzige Weise bestimmt sein, wenn in jeder die beiden Punkte oder Geraden B, B'; A, A' und B_1, B_1'; A_1, A_1', und ausserdem irgend drei Paar entsprechende Elemente der beiden Ebenen gegeben sind.

2) Man kann in zwei Ebenen die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Paare projektivischer Gebilde und ausserdem drei Elementenpaare beliebig annehmen und sodann festsetzen: die Ebenen sollen in Ansehung der ersteren geometrisch verwandt, und die letzteren sollen entsprechende Elementenpaare derselben sein.

3) Von zwei geometrisch verwandten Systemen ist das eine vollkommen bestimmt, wenn das andere System und die Verwandtschaft ihrer Ebenen vollkommen bestimmt ist.

4) Ist in einer Ebene irgend ein System von Punkten oder Geraden gegeben, so kann man in dieser Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Gebilde nebst drei Elementen jenes Systems, und in einer zweiten Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier mit den ersteren projektivischer Gebilde nebst drei Elementen beliebig annehmen und sodann festsetzen: diese drei Elemente sollen einem zweiten Systeme angehören, welches mit dem ersten in Ansehung jener Gebilde geometrisch verwandt sei, und zwar sollen sie jenen drei Elementen des ersten Systems entsprechen.

Ferner ergibt sich aus Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 5. unmittelbar der folgende Satz:

5) Sind in einer beliebigen Anzahl von Ebenen ebensoviele Systeme von Punkten oder Geraden in bestimmter Ordnung gegeben, und ist der Reihe nach ein jedes dieser Systeme mit dem ihm zunächst folgenden geometrisch verwandt, so ist ein jedes derselben mit jedem, und namentlich auch das erste mit dem letzten geometrisch verwandt.

Erste Art der höheren geometrischen Verwandtschaften.

α. *Zwei Systeme von Punkten.*

§. 4.

Denkt man sich in der Ebene 𝔈 (Taf. II. Fig. 1.) zwei Strahlbüschel B, B', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1' dergestalt gegeben, dass

$$B(a, b, c, d \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) \text{ und}$$
$$B'(a', b', c', d' ..) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1' ..),$$

und dass dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B' sowohl insofern er zu B gehört, ein solcher Strahl P_1' in B_1, als auch insofern er zu B' gehört, ein solcher Strahl P_1 in B_1' entspreche, welcher **nicht** mit dem gemeinschaftlichen Strahle P_1'' von B_1, B_1' zusammenfällt, so werden auch umgekehrt dem letzteren, P_1'', in den Strahlbüscheln B, B' resp. zwei von P'' verschiedene Strahlen P', P entsprechen müssen; und wird der Durchschnitt von P, P' mit B'', und der Durchschnitt von P_1, P_1' mit B_1'' bezeichnet, so wird allen Punkten von P'' ein einziger Punkt der Ebene $\mathfrak{E}_1$, nämlich B_1'', und dem Punkte B'' ein jeder Punkt der Geraden P_1'' in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, und umgekehrt. Ferner entspricht jedem Punkte 𝔭 von P derjenige Punkt in $\mathfrak{E}_1$, in welchem der dem P entsprechende Strahl von B_1', d. i. P_1'', den dem p entsprechenden Strahl von B_1, d. i. p, schneidet, also immer ein und derselbe Punkt B_1; und gleicherweise entspricht jedem Punkte von P' ein und derselbe Punkt B_1', u. s. w.

Die drei Punkte B, B', B'' und B_1, B_1', B_1'' werden **Hauptpunkte**, und die drei Geraden P, P', P'' und P_1, P_1', P_1'' werden **Hauptlinien**, und die von denselben gebildeten Dreiecke **Hauptdreiecke** genannt; und zwar heissen sowohl je zwei Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'', als auch je ein Hauptpunkt und eine Hauptlinie B, P_1; B', P_1'; B'', P_1''; B_1, P; B_1', P'; B_1'', P'', und endlich die Hauptdreiecke selbst **zugeordnet**.

Sind die drei Paar zugeordneten Hauptpunkte von 𝔈, $\mathfrak{E}_1$ gegeben, so kennt man von jedem der beiden Paare proj. Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' zwei Paar entsprechende Strahlen; also lässt sich jetzt der Satz 1) des §. 3. dergestalt aussprechen:

1) **Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen ist vollkommen und auf einzige Weise bestimmt, sobald ihre drei Paar zugeordneten Hauptpunkte und irgend ein Paar entsprechende Punkte derselben gegeben sind;** und auf ähnliche Weise die Sätze 2), 3), 4) desselben §.

Ist in 𝔈 irgend eine Gerade A gegeben, deren Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.. die Strahlen a, b, c, d..; a', b', c', d'.... in B, B' bestimmen, und

sind $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$; $a_1', b_1', c_1', d_1' \ldots$ die den letzteren in B_1, B_1' entsprechenden Strahlen, so hat man:

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 ..) = B(a, b, c, d ....) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} ..) \equiv B'(d', b', c', d' ..)$$
$$= B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1' ....),$$

also auch

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 ....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1 ....).$$

Geht nun A durch den Hauptpunkt B'', so fallen in B_1, B_1' zwei entsprechende Strahlen mit dem gem. Strahle P_1'' zusammen; nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 8. entspricht also der Geraden A eine Gerade A_1. In jedem anderen Falle dagegen, wo die Strahlbüschel B_1, B_1' schiefliegend sind, entspricht der A ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' und zugleich durch den Punkt B_1'' geht, der dem Durchschnitte von A und P'' entspricht (Nr. XXX. 11.).

Denkt man sich nun die beliebig liegende A als den perspektivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel B, B'', so entsprechen den letzteren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1'', deren Strahlen sich paarweise auf dem Kegelschnitte $[A_1]$ schneiden, welche also unter sich und demnach mit jedem der Strahlbüschel B, B'' projektivisch sind. Also entspricht nicht nur jedem Strahlbüschel B, B', sondern auch jedem Strahlbüschel B'' ein demselben projektivisches B_1''.

Sind die Strahlen zweier Strahlbüschel B, B' paarweise parallel, so sind letztere projektivisch-gleich (§. 1. a), also sind auch die denselben entsprechenden Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch und bestimmen einen Kegelschnitt R_1, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht, und da einem jeden Kegelschnitte $[A_1]$, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, auch umgekehrt eine Gerade A entsprechen muss, so liegen alle unendlich entfernten Punkte von $\mathfrak{E}$ in einer einzigen geraden Linie. Dem Kegelschnitte R_1 steht übrigens ein anderer, R, in der Ebene $\mathfrak{E}$ zur Seite, welcher der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ entspricht. Hat die Gerade A mit R zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, so hat auch der Kegelschnitt $[A_1]$ mit der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ resp. zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, d. h. er ist eine H y p e r b e l, eine P a r a b e l oder eine E l l i p s e.

2) **In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht** a) **jedem Punkte einer Hauptlinie ein einziger Punkt, nämlich der dieser Linie zugeordnete Hauptpunkt;** b) **jedem Hauptpunkte die sämmtlichen Punkte der ihm zugeordneten Hauptlinie;** c) **jedem Strahle eines Hauptpunktes ein bestimmter Strahl des ihm zugeordneten Hauptpunktes;** d) **einem jeden Strahlbüschel eines Hauptpunktes ein demselben projektivischer Strahlbüschel des zugeordneten Hauptpunktes.**

3) **Einer beliebigen Geraden** A **der einen Ebene entspricht in der anderen ein Kegelschnitt** $[A_1]$, **welcher durch die drei Hauptpunkte geht, und insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden von beiden Ebenen ein eigenthümlicher Kegel-**

schnitt R_1, R, welcher durch die drei Hauptpunkte geht.

4) Einem jeden Kegelschnitte der einen Ebene, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, entspricht eine bestimmte Gerade der anderen Ebene.

5) Der Kegelschnitt $[A_1]$ ist entweder eine Hyperbel, oder eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem die Gerade A mit dem Kegelschnitte R zwei, oder nur einen oder keinen Punkt gemein hat.

Da endlich jeder Kegelschnitt C, welcher nur durch zwei Hauptpunkte B, B' geht, zwei proj. Strahlbüschel B, B' bestimmt, deren entsprechende, B_1, B_1', ebenfalls projektivisch sein müssen, hier aber die Strahlen P_1, P_1' sich nicht entsprechen können, da die B, B' keine vereinigten entsprechenden Strahlen (P'') besitzen, so folgt ferner:

6) Einem jeden Kegelschnitte C der einen Ebene, welcher bloss durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht auch in der anderen ein Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte geht; und dieser ist eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem ersterer den Kegelschnitt R in zwei neuen Punkten schneidet, in einem neuen Punkte berührt oder nur in jenen zwei Hauptpunkten trifft.

§. 5.

Es sei S_1'' diejenige Gerade von $\mathfrak{E}_1$, welche den mit $[A_1]$ bezeichneten Kegelschnitt im Hauptpunkte B_1'' berührt; so entspricht derselben derjenige Strahl S'' in $\mathfrak{E}$, welcher der Geraden A in keinem ausserhalb P'' gelegenen Punkte begegnet; denn schnitte S'' die A ausserhalb P'' in einem Punkte $\mathfrak{n}$, so müsste auch S_1'' mit $[A_1]$ einen Punkt $\mathfrak{n}_1$ gemein haben, welcher nicht in B_1'' fiele, könnte also auch nicht Tangente in B_1'' sein. Auf die nämliche Weise, oder auch noch einfacher, lässt sich zeigen, dass den Geraden, welche den mit C_1 bezeichneten Kegelschnitt in den beiden Hauptpunkten B_1, B_1' berühren, diejenigen Geraden entsprechen, welche die Hauptpunkte B, B' resp. mit den Durchschnitten von C und P, P' verbinden.

Wird dagegen der Kegelschnitt $[A_1]$ oder $\mathfrak{C}_1$ von einer Geraden D_1, welche durch keinen Hauptpunkt geht, in einem Punkte $\mathfrak{n}_1$ berührt, so entspricht letzterer ein Kegelschnitt $[D]$, welcher seinerseits mit der Geraden A auch nur einen Punkt und resp. mit dem Kegelschnitte C, ausser den Hauptpunkten B, B', auch nur einen Punkt $\mathfrak{n}$ gemein hat. Ist $\mathfrak{n}_1$ insbesondere der Durchschnitt von C_1 und P_1, so hat der Kegelschnitt $[D]$ mit C eine gemeinschaftliche Tangente in B, welche dem Strahle $B_1\mathfrak{n}_1$ entspricht.

1) Geht ein Kegelschnitt durch die drei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den drei Geraden, welche denselben in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien

und der jenem Kegelschnitte entsprechenden Geraden gehen.

2) Geht ein Kegelschnitt bloss durch zwei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den zwei Geraden, welche ihn in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien und des dem ersteren entsprechenden Kegelschnittes gehen.

3) Jeder anderen Tangente des unter 1) oder 2) genannten Kegelschnittes entspricht ein Kegelschnitt, welcher die dem ersteren entsprechende Gerade oder den entsprechenden Kegelschnitt berührt, und zwar sind die Berührungspunkte ebenfalls entsprechende Punkte. Im zweiten Falle berühren sich die beiden Kegelschnitte in dem zugeordneten Hauptpunkte, wenn der Berührungspunkt jener Tangente auf einer Hauptlinie liegt.

§. 6.

Denkt man sich einen Hauptpunkt B als den Mittelpunkt zweier involutorischer Strahlbüschel B, B^0, deren zugeordnete Strahlenpaare a, a^0; b, b^0; $c, c^0 \dots$ heissen mögen, und sind a_1, a_1^0; b_1, b_1^0; $c_1, c_1^0 \dots$ die denselben entsprechenden Strahlen zweier Strahlbüschel B_1, B_1^0, so hat man

$$B_1(a_1, b_1, c_1 \dots a_1^0, b_1^0, c_1^0 \dots) = B(a, b, c \dots a^0, b^0, c^0 \dots) =$$
$$B^0(a^0, b^0, c^0 \dots a, b, c \dots) = B_1^0(a_1^0, b_1^0, c_1^0 \dots a_1, b_1, c_1 \dots); \quad \text{also}$$
$$\text{auch } B_1(a_1, b_1, c_1 \dots a_1^0, b_1^0, c_1^0 \dots) = B_1^0(a_1^0, b_1^0, c_1^0 \dots a_1, b_1, c_1 \dots),$$

d. h. die Strahlbüschel B_1, B_1^0 sind gleichfalls involutorisch (Nr. XXX. §. 1. a). Und da den Hauptstrahlen der einen Involution, d. h. in denen zwei zugeordnete Strahlen sich vereinigen, offenbar wiederum zwei vereinigte Paare zug. Strahlen der anderen Involution oder deren Hauptstrahlen entsprechen, und da die Hauptstrahlen mit je zwei zugeordneten harmonisch sind, so folgt:

1) In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt ein Hauptpunkt ist, wiederum eine Involution von Strahlen, und zwar sind die Hauptstrahlen beider Involutionen entsprechende Strahlen.

2) Je vier harmonischen Strahlen eines Hauptpunktes entsprechen vier harmonische Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes. Und daher

3) Entspricht einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch einen Hauptpunkt der Ebene geht, wiederum eine Involution von Punkten, und die Hauptpunkte beider Involutionen sind entsprechende Punkte.

4) Je vier harmonischen Punkten, welche mit einem Hauptpunkte der Ebene in gerader Linie liegen, entsprechen wiederum vier harmonische Punkte.

Enthält eine beliebige Gerade A eine Involution von Punkten $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ...., so bestimmt dieselbe im Strahlbüschel B eine Involution von Strahlen; dieser entspricht in B_1 ebenfalls eine Involution von Strahlen, und diese schneidet den der A entsprechenden Kegelschnitt [A_1] in den; den Punkten $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ.... entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1.... Nach Archiv. Theil IV. Nr. XXX. §§. 3. 4. gehen sämmtliche Sehnen $\mathfrak{a}_1\alpha_1$, $\mathfrak{b}_1\beta_1$, $\mathfrak{c}_1\gamma_1$.... durch einerlei Punkt, und daher bilden, nach Nr. XXX. §. 3. 3, die Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes [A_1] nach den Punkten $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1.... gehen, eine Involution von Strahlen. Die Punktenpaare, in welchen ein Kegelschnitt von den einzelnen Strahlen eines Strahlbüschels geschnitten wird, sollen eine Involution von Punkten dieses Kegelschnitts, und die Berührungspunkte zweier berührenden Strahlen sollen die Hauptpunkte dieser Involution heissen. Je zwei zugeordnete Punkte bilden mit den zwei Hauptpunkten vier harmonische Punkte des Kegelschnitts.

5) Einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch keinen Hauptpunkt geht, entspricht eine Involution von Punkten des jener Richtungslinie entsprechenden Kegelschnittes.

6) Je vier harmonischen Punkten, welche mit keinem Hauptpunkte in gerader Linie liegen, entsprechen vier harmonische Punkte des ihrer Geraden entsprechenden Kegelschnitts.

Denkt man sich endlich irgend eine Involution von Strahlen, so schneiden diese eine jede Gerade in einer Involution von Punkten; den ersteren entsprechen ebensoviele Kegelschnitte, welche ausser den drei Hauptpunkten noch einen Punkt gemein haben, und jedem Kegelschnitte, welcher durch diese drei Hauptpunkte geht, entspricht eine Gerade der ersten Ebene; also:

7) Einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen eine Schaar von Kegelschnitten, welche die drei Hauptpunkte und ausserdem einen vierten Punkt gemein haben, und zwar schneiden dieselben, paarweise geordnet, einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in einer Involution von Punkten.

8) Je vier harmonischen Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen vier dem Hauptdreiecke umschriebene Kegelschnitte, welche noch einen vierten Punkt gemein haben, und diese schneiden einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in vier harmonischen Punkten.

§. 7.

Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf Kegelschnitte.

Man denke sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Schaar Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.., welche vier Punkte B, B', B'', O gemein haben,

und in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ vier Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 beliebig gewählt; so darf man festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt, und O, O_1 sollen entsprechende Punkte derselben sein. Dies vorausgesetzt, so werden jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, welche durch den Punkt O_1 gehen, und da nun unter diesen Geraden entweder zwei oder nur eine oder keine sind, welche den mit R_1 bezeichneten Kegelschnitt berühren, im zweiten Falle aber der Punkt O_1 auf R_1 liegen, also O unendlich entfernt sein muss, so ergibt sich aus §. 5. 3. der folgende Satz:

1) Unter allen Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, befinden sich, wenn keiner dieser Punkte unendlich entfernt ist, entweder zwei Parabeln oder keine; widrigenfalls aber jedesmal eine Parabel, sobald bloss ein einziger von jenen vier Punkten unendlich entfernt ist.

Eine andere Schaar Kegelschnitte habe drei Punkte B, B', B'' und eine Tangente T gemein, so entsprechen denselben lauter Gerade, welche einen Kegelschnitt $[T_1]$ berühren. Dieser Kegelschnitt aber hat mit dem Kegelschnitte R_1 drei und folglich auch vier Punkte und demzufolge entweder vier oder keine Tangente gemein (Archiv. Thl. V. Nr. XVIII. §. 5. 6.); also.

2) Unter allen Kegelschnitten, welche drei Punkte und eine Tangente gemein haben, befinden sich entweder vier oder keine Parabeln.

Eine Schaar von Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$...., welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, werden von einer Geraden A in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... geschnitten; B_1, B_1', B_1'', p_1 seien irgend vier Punkte einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$, und es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt und p, p_1 entsprechende Punkte derselben; so entsprechen jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade, welche durch den Punkt p_1 gehen, und der Geraden A ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und von jenen Geraden in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1; $\mathfrak{d}_1$, δ_1...., welche den ersteren entsprechen, geschnitten wird. Da nun diese Punkte eine Involution von Punkten dieses Kegelschnittes bilden, so ergibt sich aus der Umkehrung des Satzes §. 6. 5. der bekannte Satz:

3) Eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, werden von einer beliebigen Geraden in einer Involution von Punkten geschnitten.

Es sei in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt C gegeben, welcher von einer Geraden P'' in zwei Punkten B, B' geschnitten wird, und durch einen beliebigen dritten Punkt B'' der Ebene gehen die Strahlen a'', b'', c'', d''...., welche C resp. in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... und P'' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... schneiden; endlich seien die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... so bestimmt, dass $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ mit $\mathfrak{b}$, β u. s. w. harmonisch sind. Jetzt denke man sich eine zweite Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit den Punkten B_1, B_1', B_1'' und setze fest, dass $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' u. s. w. verwandt seien. Dies vorausgesetzt, so entspricht dem Kegelschnitte C ein

Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' geht; den Strahlen a'', b'', c'', d''.... entsprechen Strahlen a_1'', b_1'', c_1'', d_1'',... des dritten Hauptpunktes B_1'', und diese schneiden C_1 in Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1; $\mathfrak{d}_1$, δ_1...., welche den früheren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... entsprechen; den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... entspricht ein einziger Punkt B_1'', und sind nun noch $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... die den $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... entsprechenden Punkte, so sind auch B_1'', $\mathfrak{a}_1''$ mit $\mathfrak{a}_1$, α_1; B_1'', $\mathfrak{b}_1''$ mit $\mathfrak{b}_1$, β_1 u. s. w. harmonisch. Unter diesen Umständen aber liegen die Punkte $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... auf einer Geraden A_1, nämlich auf der harmonischen Polare des Punktes B_1'' für C_1; also liegen auch die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... auf einem Kegelschnitte $[A]$, welcher durch B, B', B'' geht.

4) Wird ein Kegelschnitt und eine Sekante desselben von den Strahlen eines beliebigen Strahlbüschels geschnitten, so gehören sämmtliche Punkte, welche jedesmal zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Punkte der Sekante den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bilden, einem neuen Kegelschnitte an, welcher mit dem ersteren jene Sekante gemein hat und durch den Mittelpunkt jenes Strahlbüschels geht.

Dieser Satz gilt zunächst nur für reelle Sekanten, lässt sich aber auch für ideale darthun. Uebrigens ist derselbe nur ein besonderer Fall des folgenden, welcher auch aus der Eigenschaft der harmonischen Polaren durch Uebertragung sich ergibt:

5) Werden eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, von irgend einer Geraden ein jeder in zwei Punkten geschnitten, und man bestimmt in jedem einen neuen Punkt dergestalt, dass er mit diesen zwei Punkten und mit einem bestimmten der Punkte B, B', B'', p, z. B. mit p, als zugeordnetem, vier harmonische Punkte bildet, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem und demselben Kegelschnitte, welcher durch die drei anderen Punkte B, B', B'' und ausserdem, wenn sie existiren, durch diejenigen zwei Punkte geht, in welchen jene Gerade von zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Endlich noch eine Uebertragung des Paskalschen Satzes: In der Ebene $\mathfrak{E}$ seien drei Punkte B, B', B'' und eine Gerade A mit sechs beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in bestimmter Ordnung gegeben; durch je zwei dieser Punkte, welche unmittelbar aufeinander folgen, und jedesmal durch die drei Punkte B, B', B'' sei ein Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte $[\mathfrak{ab}]$, $[\mathfrak{bc}]$, $[\mathfrak{cd}]$, $[\mathfrak{de}]$, $[\mathfrak{ef}]$, $[\mathfrak{fa}]$ gelegt, und es seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die vierten Punkte, welche resp. $[\mathfrak{ab}]$ und $[\mathfrak{de}]$, $[\mathfrak{bc}]$ und $[\mathfrak{ef}]$, $[\mathfrak{cd}]$ und $[\mathfrak{fa}]$ gemein haben. Ist nun eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit $\mathfrak{E}$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt, so entspricht der Geraden A ein Kegelschnitt $[A_1]$ mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$; jenen sechs Kegelschnitten die gleichnamigen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1\mathfrak{a}_1$, und den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Durchschnitte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{a}_1$. Bekanntlich aber liegen diese drei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ in einer

Geraden S_1; also liegen auch die drei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in einem Kegelschnitte $[S]$, welcher durch B, B', B'' geht.

6) Sind auf einer Geraden sechs Punkte in bestimmter Ordnung und ausserdem irgend drei Punkte in der Ebene gegeben, und legt man durch diese drei letzteren und jedesmal durch zwei von jenen sechs Punkten, welche unmittelbar auf einander folgen, und insbesondere auch durch den ersten und letzten, einen Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte, so liegen sechs Punkte, nämlich jene drei Punkte der Ebene und diejenigen drei, in welchen der erste und vierte, der zweite und fünfte, der dritte und sechste Kegelschnitt von Neuem sich schneiden, auf einem und demselben Kegelschnitte.

§. 8.

Eigenschaften der höheren Curven.

Man versteht unter einer Curve der n^{ten} Ordnung ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Punkte, welches mit einer beliebigen Geraden im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat; eine jede Gerade, in welcher zwei stetig auf einander folgende Punkte eines solchen Systems sich vereinigen, heisst eine Tangente desselben. Andererseits versteht man unter einer Curve der n^{ten} Klasse ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Geraden, welches mit einem beliebigen Punkte im Allgemeinen und höchstens n Gerade gemein hat; ein jeder Punkt, von welchem zwei stetig auf einander folgende Gerade eines solchen Systems, die zusammenfallen, ausgehen, heisst ein Punkt desselben.

Es sei nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve $\mathfrak{C}$ der n^{ten} Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{C}_1$ das derselben entsprechende System von Punkten der verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$; so entsprechen den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit einer der Hauptlinien P, P', P'' gemein hat, ebensoviele Punkte von $\mathfrak{C}_1$, welche aber in dem zug. Hauptpunkte B_1, B_1', B_1'' sich vereinigen. Das System $\mathfrak{C}_1$ besitzt also in jedem der drei Hauptpunkte einen n-fachen Punkt, d. h. einen Punkt, in welchem n unstetig aufeinander folgende Punkte sich vereinigen. Geht aber $\mathfrak{C}$ selber mehrmals durch einen Hauptpunkt, z. B. um sogleich jetzt der Betrachtung den höchsten Grad von Allgemeinheit zu geben, p mal durch B, q mal durch B' und r mal durch B'', so hat $\mathfrak{C}$ mit P nur $n-(q+r)$, mit P' nur $n-(p+r)$ und mit P'' nur $n-(p+q)$ Punkte ausser den Punkten B, B', B'' gemein, und folglich besitzt $\mathfrak{C}_1$ in B_1 nur einen $(n-(q+r))$fachen, in B_1' nur einen $(n-(p+r))$fachen und in B_1'' nur einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Es sei A_1 irgend eine Gerade in $\mathfrak{E}_1$; so entspricht derselben in $\mathfrak{E}$ ein Kegelschnitt $[A]$, welcher durch die Punkte B, B', B'' geht, und dieser möge mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen m Punkte gemein haben, indem wir mit m irgend eine unbekannte, späterhin zu er-

mittelnde, ganze Zahl bezeichnen. Da nun derselbe mit $\mathfrak{C}$ bereits $p+q+r$ Punkte gemein hat, welche in den Hauptpunkten liegen, so sind der übrigen noch $m-(p+q+r)$. Diese letztere Anzahl von Punkten hat also auch die Gerade A_1 mit dem Systeme $\mathfrak{C}_1$ gemein, und zwar nicht mehr, weil jenen $p+q+r$ Punkten nur Punkte der Hauptlinien entsprechen, welche, da A_1 beliebig ist, nicht eben Durchschnitte von A_1 und $\mathfrak{C}_1$ sein müssen. Geht $\mathfrak{C}$ durch keinen Hauptpunkt, so ist $m-(p+q+r)=m$. Hieraus folgt zunächst:

1) Einer jeden Curve von bestimmter Ordnung entspricht wiederum eine Curve von bestimmter Ordnung, und diese besitzt, wenn die Ordnung der ersteren $=n$, im Allgemeinen in jedem der Hauptpunkte einen $n$fachen Punkt. Indessen wird die Ordnung der letzteren um $p+q+r$ Einheiten vermindert, wenn die erstere in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt besitzt, und zugleich besitzt dann jene in den Hauptpunkten nur einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Offenbar ist die Zahl m irgend eine bestimmte Funktion von n, d. h.

$$m=F_{(n)}.$$

Aus demselben Grunde aber, weshalb einer Curve der $n$ten Ordnung mit einem p-, einem q- und einem $r$fachen Punkte, die in den Hauptpunkten liegen, eine Curve von der $(F_{(n)}-(p+q+r))$ten Ordnung entspricht, wird auch einer Curve der $k$ten Ordnung, welche in den Hauptpunkten einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt besitzt, eine Curve entsprechen müssen, deren Ordnung $=F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))$ ist. In diesem Falle befindet sich die Curve $\mathfrak{C}_1$, wenn $k=m-(p+q+r)$, und derselben entspricht nothwendig die Curve $\mathfrak{C}$, deren Ordnung $=n$; also ist

$$F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))=n, \text{ oder weil } p+q+r=m-k \text{ ist:}$$

$$F_{(k)}+2(m-k)=4n.$$

Setzt man

$$p=q=r=0, \text{ also } k=m,$$

so ist

$$F_{(m)}=4n, \text{ also auch}$$
$$F_{(k)}+2(m-k)=F_{(m)} \text{ oder}$$
$$F_{(k)}-2k=F_{(m)}-2m.$$

Die Zahl m hängt nur von n ab; ändert man also nur den Werth der Summe $p+q+r$, so bleibt $F_{(m)}-2m$ unverändert; folglich, wenn $p+q+r=m-1$ oder $k=1$ gesetzt wird, hat man

$$F_{(m)}-2m=F_{(1)}-2.$$

$F_{(1)}$ aber bedeutet die Zahl der Punkte, welche ein Kegelschnitt mit einer Curve der 1sten Ordnung, d. h. mit einer Geraden gemein hat, und diese Zahl ist $=2$; also ist

$$F_{(m)}=2m \text{ und ebenso}$$
$$F_{(n)}=2n.$$

Hieraus folgt zunächst:

2) Ein Kegelschnitt hat mit einer Curve der $n$ten Ordnung im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte gemein. Ferner:

3) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $2n$ten Ordnung.

Auf ähnliche Weise wie wir zu diesen Sätzen gelangt sind, d. h. ohne die Theorie der höheren Gleichungen in Anspruch zu nehmen, lassen sich noch andere Eigenschaften der höheren Curven ableiten, welche sonst dieser Theorie ausschliesslich anzugehören scheinen. Die folgenden §§. liefern einige Beispiele.

§. 9.

Anzahl der Durchschnittspunkte zweier Curven.

Die Anzahl der gegenseitigen Durchschnittspunkte zweier Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung ist offenbar eine bestimmte Funktion der Zahlen m und n, also $=F_{(m,n)}$. Es seien nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Curven M und N, die eine von der $m$ten, die andere von der $n$ten Ordnung gegeben, und zwar habe die eine einen $(m-1)$fachen Punkt B, die andere einen $(n-1)$fachen Punkt B', eine Annahme, welche unserem Zwecke, die Zahl $F_{(m,n)}$ zu ermitteln, durchaus nicht hinderlich sein wird. Wählt man nun B, B' und irgend einen dritten Punkt B'', welcher keiner der beiden Curven angehört, zu Hauptpunkten von $\mathfrak{E}$, so entspricht der Curve M in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve M_1, deren Ordnung $=2m-(m-1)=m+1$, und der Curve N eine Curve N_1, deren Ordnung $=n+1$ ist; die Anzahl der Durchschnittspunkte beider ist also $=F_{(m+1,n+1)}$. M_1 besitzt in B_1 einen $m$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt, und N_1 besitzt in B_1' einen $n$fachen, in B_1 und B_1'' einen einfachen Punkt; also haben beide Curven in B_1 m Punkte, in B_1' n Punkte und in B_1'' einen Punkt gemein; und sie besitzen folglich ausser diesen Punkten nur noch $F_{(m+1,n+1)}-(m+n+1)$ gemeinschaftliche Punkte, welche allein den Durchschnitten von M, N entsprechen können. Die Anzahl der letzteren aber ist $F_{(m,n)}$; also ist

$$F_{(m+1,n+1)}-(m+n+1)=F_{(m,n)}$$

oder

$$F_{(m+1,n+1)}-F_{(m,n)}=m+n+1.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m+1$, $m+2$.... $m+p-m$ statt m

und $n+1$, $n+2 \ldots\, n+q-n$ statt n, wo $p-q=m-n$ ist, so erhält man die neuen Gleichungen:

$$F_{(m+2,n+2)} - F_{(m+1,n+1)} = m+n+3,$$
$$F_{(m+3,n+3)} - F_{(m+2,n+2)} = m+n+5;$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$F_{(p,q)} - F_{(p-1,q-1)} = m+n+2(p-m)-1.$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen und der ersten erhält man nun:

$$F_{(p,q)} - F_{(m,n)} = (p-m)(m+n) + (p-m)(p-m) = (p-m)(p+n).$$

Setzt man hier $n=1$, also $m=p-q+1$, so entsteht:

$$F_{(p,q)} - F_{(p-q+1,\,1)} = (q-1)(p+1).$$

Aber $F_{(p-q+1,\,1)}$ ist die Anzahl der Durchschnitte einer Geraden mit einer Curve der $(p-q+1)$ten Ordnung, d. h. $=p-q+1$; folglich ist

$$F_{(p,q)} = p-q+1+(q-1)(p+1) = pq,$$

und

$$F_{(m,n)} = m \cdot n.$$

Zwei Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung haben im Allgemeinen und höchstens $m \cdot n$ Punkte gemein.

§. 10.

Anzahl der eine Curve bestimmenden Punkte.

Es bedeute $F_{(n)}$ die Anzahl der Punkte, welche im Allgemeinen eine Curve der $n$ten Ordnung vollkommen bestimmen. Befindet sich unter den gegebenen Punkten der Curve ein $p$facher Punkt, so sei $f_{(p)}$ die Anzahl der Punkte, welche durch diesen allein vertreten werden, indem offenbar diese Zahl bloss von p und nicht auch zugleich von der Ordnung der Curve abhängt. Denkt man sich nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung mittels eines $p$fachen Punktes B und einer Anzahl $F_{(n)} - f_{(p)}$ einfacher Punkte gegeben, und nimmt man B zum Hauptpunkte, und irgend zwei der Curve nicht angehörige Punkte zu den beiden anderen Hauptpunkten, so entspricht derselben in der anderen Ebene eine Curve der $(2n-p)$ten Ordnung, welche in dem einen Hauptpunkte einen $n$fachen, und in jedem der beiden anderen einen $(n-p)$fachen Punkt besitzt. Es sind also von dieser Curve im Ganzen

$$f_{(n)} + 2 \cdot f_{(n-p)} + F_{(n)} - f_{(p)}$$

Punkte gegeben. Ich behaupte, dass dieselbe durch diese Anzahl von Punkten vollkommen bestimmt sei. Denn liessen sich meh-

rere Curven derselben Ordnung durch diese Punkte legen, welche in denselben Hauptpunkten gleichvielfache Punkte besässen, so würden denselben auch mehrere Curven der $n$ten Ordnung entsprechen, welche mit der ursprünglich gegebenen einen $p$fachen Punkt B und ausserdem jene $F_{(n)} - f_{(p)}$ Punkte gemein haben würden. Dies widerspricht aber der Annahme, dass jene erstere Curve durch diese Punkte vollkommen bestimmt sein sollte. Also ist

$$f_{(n)} + 2f_{(n-p)} + F_{(n)} - f_{(p)} = F_{(2n-p)},$$

oder

$$F_{(2n-p)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(p)} + 2f_{(n-p)} \ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man hier $p = n - 1$, so ist

$$F_{(n+1)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-1)} + 2f_{(1)},$$

und da durch einen einfachen Punkt nur 1 Punkt gegeben ist.

$$F_{(n+1)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-1)} + 2 \ldots\ldots \quad (2).$$

Setzt man hier nach einander $n+1$, $n+2 \ldots.$ $n+q-n$ an die Stelle von n, so erhält man:

$$F_{(n+2)} - F_{(n+1)} = f_{(n+1)} - f_{(n)} + 2;$$
$$F_{(n+3)} - F_{(n+2)} = f_{(n+2)} - f_{(n+1)} + 2;$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$F_{(q)} - F_{(q-1)} = f_{(q-1)} - f_{(q-2)} + 2; \text{ also durch Addition}$$
$$F_{(q)} - F_{(n)} = f_{(q-1)} - f_{(n-1)} + 2(q-n) \ldots\ldots \quad (3).$$

Hieraus wird für $q = 1$, da die Gerade durch 2 Punkte bestimmt, und ein Punkt, durch welchen die Curve 0mal geht, auch für 0 gegebene Punkte zu rechnen ist:

$$F_{(n)} - f_{(n-1)} = 2n \ldots\ldots \quad (4);$$

dies heisst:

1) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist vollkommen bestimmt, sobald ein $(n-1)$facher Punkt und ausserdem noch $2n$ Punte derselben beliebig gegeben sind.

Setzt man ferner in (3) $q = n + 2$, und in (1) $p = n - 2$, so erhält man:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n+1)} - f_{(n-1)} + 4 \ldots\ldots \quad (5).$$
$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-\ )} + 2 . f_{(2)} \ldots\ldots \quad (6).$$

also auch

$$f_{(n+1)} - f_{(n-1)} + 4 = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 . f_{(2)}; \quad \text{oder}$$
$$f_{(n+1)} - f_{(n-\ } = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 . f_{(2)} - 4 \ldots\ldots \quad (7);$$

also

$$f_{(n+1)}-f_{(n-1)}=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+3)}-f_{(n+1)}=f_{(n+2)}-f_{(n)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+5)}-f_{(n+3)}=f_{(n+4)}-f_{(n+2)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(p)}-f_{(p-2)}=f_{(p-1)}-f_{(p-3)}+2.f_{(2)}-4; \text{ durch Addition:}$$
$$f_{(p)}-f_{(n-1)}=f_{(p-1)}-f_{(n-2)}+(p-n+1)(f_{(2)}-2)$$

oder

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}-p\,.(f_{(2)}-2)=f_{(n-1)}-f_{(n-2)}-(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots.\ (8).$$

Hier ist, für $n=2$, $f_{(n-1)}=1$, $f_{(n-2)}=0$, also:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2)\ldots.\ (9);$$

folglich:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+1)}-f_{(p)}=1+p\,.(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+2)}-f_{(p+1)}=1+(p+1).(f_{(2)}-2);$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(n)}-f_{(n-1)}=1+(n-1)(f_{(2)}-2); \text{ durch Addition:}$$
$$f_{(n)}-f_{(p-1)}=n-p+1+\tfrac{1}{2}(n+p-2)(n-p+1)(f_{(2)}-2)\ldots.\ (10);$$

und für $p=1$ oder 2:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots.\ (11).$$

Folglich ist nach (4):

$$F_{(n)}=f_{(n-1)}+2n=n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}-2)+2n$$
$$=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}\ldots.\ (12).$$

Setzt man endlich in der letzten Gleichung $n=0$ und bedenkt, dass eine Curve, welche von jeder beliebigen Geraden in 0 Punkten geschnitten wird, gar keine Punkte enthalten kann und also auch zu ihrer Bestimmung einer Anzahl von 0 Punkten bedarf, so findet man:

$$0=-1+f_{(2)}-2 \text{ oder } f_{(2)}=3\ldots.\ (13);$$

folglich:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n+1)\ldots.\ (14)$$

und

$$F(n)=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)=\tfrac{1}{2}n(n+3)\ldots.\ (15)$$

2) **Wenn von einer Curve ein $n$facher Punkt gegeben ist, so ist derselbe für $\frac{1}{2}n(n+1)$ gegebene Punkte zu rechnen.**

In der That: denkt man sich n Punkte einer Curve gegeben und fügt die Bestimmung hinzu, dass dieselben alle in einen einzigen zusammenfallen sollen, so sind ausser diesen n Punkten auch noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte gegeben; denn durch diese n Punkte

gehen n Zweige der Curve, und diese würden sich, sowie n Gerade, in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten schneiden, indem man von je zwei Zweigen nur einen einzigen Durchschnittspunkt nimmt, weil sie sich sonst bei der Vereinigung zweier Durchschnittspunkte in jenem $n$fachen Punkte berühren würden. Auch kann ein solcher Durchschnitt zweier Zweige hier nicht als Doppelpunkt gelten, weil der eine der beiden Punkte desselben immer als einer von jenen n gegebenen und bereits in Rechnung gebrachten Punkten anzusehen ist.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte vollkommen bestimmt.

§. 11.

Die Tangenten in den Hauptpunkten; Rückkehrpunkte und isolirte Punkte.

Kehren wir wieder zu dem allgemeinen Falle des §. 8 zurück und denken uns eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung, welche in B einen $p$fachen, in B' einen $q$fachen, in B'' einen $r$fachen Punkt besitzt. Es sei Z_1 ein Strahl von B_1, welcher in diesem Punkte B_1 einen der Zweige der entsprechenden Curve $\mathfrak{C}_1$ berührt, und es sei Z der ihm entsprechende Strahl von B; da B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so hat Z_1 in diesem Punkte $n-(q+r)+1$ Punkte, und ausserdem noch $2n-(p+q+r)-(n-(q+r)+1)=n-p-1$ Punkte, welche beliebig liegen, mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Diesen letzteren entspricht eine gleiche Anzahl von Punkten, welche der Strahl Z mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, und die weder in den Punkt B noch in die Gerade P fallen. Aber Z hat mit $\mathfrak{C}$ $n-p$ Punkte gemein, welche nicht in B fallen; also fällt einer dieser $n-p$ Punkte in die Gerade P. Folglich entsprechen den Tangenten, welche die $n-(q+r)$ Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ in B_1 berühren, diejenigen Strahlen von B, welche nach den $n-(q+r)$ Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P gerichtet sind, und umgekehrt.

1) Denjenigen Strahlen eines Hauptpunktes, welche nach den Durchschnitten einer Curve und der Gegenseite des Hauptdreiecks gehen, entsprechen ebensoviele Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes, welche die verschiedenen Zweige der entsprechenden Curve im Hauptpunkte berühren; und umgekehrt.

Fallen zwei oder mehrere jener Durchschnittspunkte von $\mathfrak{C}$ und P in einen einzigen zusammen, d. h. hat $\mathfrak{C}$ mit P eine zwei oder mehrpunktige Berührung, so fallen auch andererseits zwei oder mehrere jener Tangenten zusammen, d. h. zwei oder mehrere Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ haben in B_1 eine gemeinschaftliche Tangente. In diesem Falle heisst der Punkt B_1 ein Rückkehrpunkt von $\mathfrak{C}_1$, und zwar der $k$ten Klasse, wenn sich in demselben k Zweige der Curve berühren. Auch wird ein $n$facher Punkt einer Curve der $(n+1)$ten Ordnung, in welchem sich alle n Zweige berühren, κατ' ἐξοχὴν ein Rückkehrpunkt der Curve genannt. Hat die Gerade P mit $\mathfrak{C}$ ein oder mehrere Punktenpaare weniger gemein, als die Ordnung der Curve fordert, so fallen auch in $\mathfrak{C}_1$ ebensoviele Tangentenpaare hinweg, und da letzteres nur denkbar

ist, wenn auf den betreffenden Zweigen von $\mathfrak{C}_1$ kein stetiger Uebergang vom Punkte B_1 zu anderen Punkten dieser Zweige stattfindet, so erscheint der Punkt B_1 als ein von diesen Zweigen abgesonderter oder isolirter Punkt der Curve.

2) Einem jeden Punkte, in welchem eine Curve eine Hauptlinie der einen Ebene berührt, entspricht ein Rückkehrpunkt der geometrisch verwandten Curve; und zwar berühren sich in demselben ebensoviele Zweige der Curve, soviele Punkte der ersten Curve in jenem Berührungspunkte zusammenfallen.

3) Wird eine Hauptlinie in zwei oder mehreren Punkten weniger geschnitten, als die Ordnung der Curve erfordert, so hat die verwandte Curve im zugeordneten Hauptpunkte einen zwei oder mehreren Zweigen angehörigen isolirten Punkt.

4) Ein und derselbe Punkt einer Curve kann zu gleicher Zeit für einige Zweige derselben ein gewöhnlicher vielfacher, für andere ein Rückkehrpunkt und wieder für andere ein isolirter Punkt sein.

Es gehe von dem $p$fachen Punkte B der Curve $\mathfrak{C}$ irgend eine Tangente t an $\mathfrak{C}$, deren Berührungspunkt $\mathfrak{t}$ nicht in B falle; so hat t ausser den Punkten B und $\mathfrak{t}$ noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein; und ist $\mathfrak{t}_1$ der entsprechende Punkt von $\mathfrak{t}$, so hat die entsprechende Gerade t_1 ausser den Punkten B_1 und $\mathfrak{t}_1$ auch nur noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Da nun die Ordnung der letzteren $=2n-(p+q+r)$ und B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so muss der Punkt $\mathfrak{t}_1$ eine Anzahl von $2n-(p+q+r)-(n-(q+r))-(n-p-2)=2$ Punkten der Curve vertreten, d. h. t_1 berührt $\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{t}_1$.

5) Einer jeden Tangente der einen Curve, welche durch einen Hauptpunkt geht, deren Berührungspunkt aber nicht in diesen letzteren fällt, entspricht wiederum eine Tangente der verwandten Curve, welche durch den zugeordneten Hauptpunkt geht; und zwar sind die Berührungspunkte beider Tangenten entsprechende Punkte.

Dagegen wird jeder Tangente A von $\mathfrak{C}$, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, also ausser dem Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ noch $n-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, ein Kegelschnitt $[A_1]$ entsprechen; derselbe hat überhaupt $2(2n-(p+q+r))$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein, von denen eine Anzahl von $n-(p+q)+n-(q+r)+n-(p+r)=3n-2(p+q+r)$ Punkten nach B_1, B_1', B_1'' gehören; zieht man diese und die jenen $n-2$ Punkten entsprechenden Punkte von den ersteren ab, so bleiben $4n-2(p+q+r)-(3n-2(p+q+r))-(n-2)=2$ Punkte, welche also mit dem dem $\mathfrak{a}$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$ zusammenfallen; d. h. der Kegelschnitt $[A_1]$ berührt $\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{a}_1$.

6) Jeder Tangente der einen Curve, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und die verwandte Curve in dem, dem Berührungspunkte der ersteren entsprechenden Punkte berührt.

§. 12.

Bestimmung der Klassenzahl einer Curve der *n*ten Ordnung.

Durch den 5ten Satz des §. 11. sind wir nun in den Stand gesetzt, die Frage nach der Klasse einer Curve von gegebener Ordnung — eine Frage, welche vor einigen Decennien einen in der Geschichte der Mathematik fast unerhörten Streit hervorrief — auf exakte Weise und ohne Hülfe der höheren Gleichungen zu beantworten.

Da die Tangenten einer Curve der *n*ten Ordnung offenbar stetig aufeinander folgen, so bilden sie eine Curve von einer bestimmten Klasse, welche wir, da sie eine Funktion der Zahl n sein muss, durch $F_{(n)}$ bezeichnen wollen. Denkt man sich nämlich von einem beliebigen Punkte alle diejenigen Geraden gezogen, auf denen sich zwei Punkte einer Curve der *n*ten Ordnung vereinigen, so werden im Allgemeinen alle diese Geraden Tangenten der Curve sein, und die Zahl dieser Tangenten ist es, welche mit $F_{(n)}$ bezeichnet wird. Hat aber jene Curve irgend einen vielfachen Punkt, so vereinigen sich zwar auf derjenigen Geraden, welche nach diesem Punkte geht, auch ein oder mehreremale zwei Punkte der Curve, aber weder diese Punkte, noch auch diese Gerade und die Tangenten der Curve stehen in stetigem Zusammenhange miteinander. Es wird also durch einen vielfachen Punkt die Zahl $F_{(n)}$ um eine gewisse Zahl vermindert.

Für den besonderen Fall, den wir zunächst betrachten werden, lassen wir die Grösse dieser Verminderung ganz unberücksichtigt, indem wir unter $\varphi_{(n)}$ die Anzahl der wirklichen Tangenten verstehen, welche sich von einem beliebigen Punkte an eine Curve der *n*ten Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte ziehen lassen. Es sei $\mathfrak{C}$ diese Curve und B der $(n-1)$fache Punkt derselben, während die beiden anderen Hauptpunkte B', B'' nicht auf der Curve liegen. Die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ ist von der $(n+1)$ten Ordnung und hat in B_1 einen $n$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt. Also ist auch die Klasse von $\mathfrak{C}_1$ mit $\varphi_{(n+1)}$ zu bezeichnen. Von einem der Punkte B', B'' gehen an $\mathfrak{C}$ eine Anzahl von $\varphi_{(n)}$ Tangenten, und diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten der $\mathfrak{C}_1$, welche durch den Punkt B_1', B_1'' gehen, aber diesen Punkt nicht zum Berührungspunkte haben. Man kann also vom Punkte B_1' im Ganzen $\varphi_{(n)}+1$ Tangenten an $\mathfrak{C}_1$ legen; folglich werden von einem beliebigen Punkte, der nicht auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, höchstens $\varphi_{(n)}+2$ Tangenten ausgehen, und man hat demnach die folgende Relation:

$$\varphi_{(n+1)} = \varphi_{(n)} + 2.$$

Zu derselben Relation würde man übrigens auch gelangt sein, wenn man, statt des Punktes B', den $(n-1)$fachen Punkt B gewählt hätte. Denn ausser den $n-1$ Tangenten, welche $\mathfrak{C}$ in B berühren, und deren Anzahl für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen ist, gehen von dem Punkte B noch $\varphi_{(n)}-2(n-1)$ Tangenten an $\mathfrak{C}$; diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten von $\mathfrak{C}_1$,

welche die Curve nicht in B_1 berühren; hierzu kommen noch n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und die für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen sind; also ist

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)-2(n-1)+2n=\varphi(n)+2, \text{ oder}$$
$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=2; \text{ folglich ist auch.... } \quad (1)$$
$$\varphi(n+2)-\varphi(n+1)=2;$$
$$\varphi(n+3)-\varphi(n+2)=2;$$
$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$\underline{\varphi(p)-\varphi(p-1)=2;} \text{ durch Addition wird hieraus:}$$
$$\varphi(p)-\varphi(n)=2(p-n) \text{ oder}$$
$$\varphi(p)-2p=\varphi(n)-2n.... \quad (2).$$

Aber von einem Punkte lassen sich an eine Curve der 1ten Ordnung, die Gerade, keine, und an einen Kegelschnitt, als Curve 2ter Ordnung, nur 2 Tangenten legen, so dass

$$\varphi(1)=0 \text{ und } \varphi(2)=2 \text{ ist};$$

also hat man für $p=1$ und ebenso auch für $p=2$:

$$\varphi(n)-2n=-2 \text{ oder}$$
$$\varphi(n)=2(n-1).$$

1) **Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, mit einem $(n-1)$fachen Punkte, ist zugleich eine Curve der $2(n-1)$ten Klasse.**

Corollar. An eine Curve der 3ten Ordnung, mit einem Doppelpunkte, lassen sich von einem beliebigen Punkte aus im Allgemeinen und höchstens 4 Tangenten, und an eine Curve der 4ten Ordnung, mit einem 3fachen Punkte, 6 Tangenten legen.

Um nun die Zahl $F(n)$ für eine Curve der $n$ten Ordnung überhaupt, welche keine vielfachen Punkte oder deren mehrere und von beliebiger Vielfachheit besitzt, bestimmen zu können, gehe die Bemerkung voraus, dass, da eine Verminderung der Zahl $F(n)$ offenbar nur von vielfachen Punkten herrühren, und die Grösse dieser Verminderung nur von der Anzahl der in einem solchen Punkte vereinigten Punkte, und nicht etwa zugleich auch von der Ordnung der Curve abhängen kann, diese Grösse für einen $p$fachen Punkt $=f(p)$, und wenn zugleich ein p-, ein q-, ein $r$facher Punkt u. s. w. vorhanden ist, $=f(p)+f(q)+f(r)....$ gesetzt werden kann, wo $f(p)$ nur als von p und nicht auch von n abhängig gedacht wird.

Es habe nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in B einen $p$fachen Punkt, gehe aber weder durch B' noch durch B''; so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-p)$ten Ordnung, besitzt in B_1 einen $n$fachen, und sowohl in B_1' als B_1'' einen $(n-p)$fachen Punkt. $\mathfrak{C}$ wird in B von p Geraden berührt, welche

für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind; also ist die Anzahl der Tangenten, welche ausserdem noch von B an $\mathfrak{C}$ gelegt werden können, und denen allein Tangenten von $\mathfrak{C}_1$ entsprechen, $= F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$. Vom Punkte B_1 gehen an $\mathfrak{C}_1$ n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und welche für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind, und ausserdem noch die jenen $F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$ Tangenten entsprechenden; also ist

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 . f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} - 2p + 2n \dots \quad (1).$$

Oder aber: Vom Punkte B' gehen an $\mathfrak{C}$ im Ganzen $F_{(n)} - f_{(p)}$ Tangenten, denen eine gleiche Anzahl von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, deren Berührungspunkt B_1' nicht ist. Zu diesen letzteren kommt noch die doppelte Anzahl der Tangenten, deren Berührungspunkt B_1' ist, so ist $F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p)$ die Anzahl sämmtlicher Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte an $\mathfrak{C}_1$ gelegt werden können; also

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 . f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p),$$

eine Relation, welche mit der vorigen identisch ist. Setzt man hier zunächst $p = n-1$, so erhält man, weil $f_{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned}
&F_{(n+1)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-1)} + 2; \text{ folglich} \dots \quad (2).\\
&F_{(n+2)} - F_{(n+1)} = f_{(n+1)} - f_{(n)} + 2;\\
&F_{(n+3)} - F_{(n+2)} = f_{(n+2)} - f_{(n+1)} + 2;\\
&\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots\\
&\underline{F_{(p)} - F_{(p-1)} = f_{(p-1)} - f_{(p-2)} + 2;} \text{ durch Addition:}\\
&F_{(p)} - F_{(n)} = f_{(p-1)} - f_{(n-1)} + 2(p-n) \dots \quad (3).
\end{aligned}$$

Setzt man hier $p = n+2$, so wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n+1)} - f_{(n-1)} + 4 \dots \quad (4);$$

und für $p=1$ oder 2 erhält man, weil $F_{(1)} = 0$, $F_{(2)} = 2$, $f_{(0)} = 0$, $f_{(1)} = 0$ ist:

$$F_{(n)} - f_{(n-1)} = 2(n-1) \dots \quad (5).$$

Ferner wird aus (1), wenn $p = n-2$ gesetzt wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 . f_{(2)} + 4 \dots \quad (6);$$

also durch Verbindung von (4) und (6):

$$\begin{aligned}
&f_{(n+1)} - f_{(n-1)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 . f_{(2)}; \text{ also auch} \dots \quad (7)\\
&f_{(n+3)} - f_{(n+1)} = f_{(n+2)} - f_{(n)} + 2 . f_{(2)};\\
&f_{(n+5)} - f_{(n+3)} = f_{(n+4)} - f_{(n+2)} + 2 . f_{(2)};\\
&\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots\\
&\underline{f_{(p)} - f_{(p-2)} = f_{(p-1)} - f_{(p-3)} + 2 . f_{(2)};} \text{ durch Addition:}\\
&f_{(p)} - f_{(n-1)} = f_{(p-1)} - f_{(n-2)} + (p-n+1) . f_{(2)}
\end{aligned}$$

oder:

$$f_{(p)} - f_{(p-1)} - p \cdot f_{(2)} = f_{(n-1)} - f_{(n-2)} - (n-1) \cdot f_{(2)} \ldots \quad (8);$$

also für $n=2$:

$$f(p) - f(p-1) = (p-1) \cdot f(2). \quad \text{Demnach ist} \ldots \quad (9)$$

$$f(p+1) - f(p) = p \cdot f(2);$$

$$f(p+2) - f(p+1) = (p+1) \cdot f(2);$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(n) - f(n-1) = (n-1) \cdot f(2); \quad \text{durch Addition:}$$

$$f(n) - f(p) = \tfrac{1}{2}(n-p)(n+p-1) \cdot f_{(2)} \ldots \quad (10).$$

Hieraus wird für $p=0$ oder 1:

$$f_{(n)} = \tfrac{1}{2} n (n-1) \cdot f_{(2)}. \quad (11).$$

Aber nach (5) ist:

$$F_{(n)} = f_{(n-1)} + 2(n-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) f_{(2)} + 2(n-1);$$

folglich ist

$$F_{(n)} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \cdot f_{(2)} + 2(n-1) \ldots \quad (12);$$

und da eine Curve der 0ten Ordnung gewiss auch keine Tangenten besitzt, also $F_{(0)}=0$ ist, so ist für $n=0$:

$$f_{(2)} = 2 \ldots \quad (13);$$

und setzt man diesen Werth von $f_{(2)}$ in (11) und (12), so findet sich:

$$f_{(n)} = n(n-1) \ldots \quad (14)$$

und ebenso auch:

$$F(n) = n(n-1) \ldots \quad (15).$$

2) Durch einen jeden $p$fachen Punkt, welchen eine Curve der $n$ten Ordnung besitzt, wird die Klassenzahl derselben um $p(p-1)$ Einheiten erniedrigt.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens zugleich eine Curve der $n(n-1)$ten Klasse.

Corollar. Eine Curve der 3ten, 4ten, 5ten.... Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens eine Curve der 6ten, 12ten, 20ten.... Klasse.

Besitzt nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt, sonst aber keinen vielfachen Punkt, so ist $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q+r))$ten Ordnung und besitzt auch bloss in den Hauptpunkten einen $(n-(p+q))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(q+r))$fachen Punkt; also ist die Klasse von $\mathfrak{C}_1$ =

$$\begin{aligned}(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)-1)-(n-(p+q))(n-(p+q)-1)\\ -(n-(p+r))(n-(p+r)-1)-(n-(q+r))(n-(q+r)-1)\\ = n(n+1)-p(p+1)-q(q+1)-r(r+1).\end{aligned}$$

Und auch umgekehrt, indem $\mathfrak{C}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{C}$ gesetzt wird, findet sich die Klasse von $\mathfrak{C} =$

$$(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)+1)-(n-(p+q))(n-(p+q)+1)$$
$$-(n-(p+r))(n-(p+r)+1)-(n-(q+r))(n-(q+r)+1)$$
$$=n(n-1)-p(p-1)-q(q-1)-r(r-1),$$

wie es von vornherein zu erwarten stand.

4) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $n(n+1)$ten Klasse.

Endlich, da jedem vielfachen Punkte von $\mathfrak{C}$, der nicht Hauptpunkt ist, ein ebensovielfacher Punkt von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, so folgt:

5) Besitzt eine Curve der $n$ten Ordnung in den drei Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt und ausserdem noch einen beliebigen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt, so ist die ihr entsprechende Curve von derselben Klasse, als eine Curve der $(n+1)$ten Ordnung, welche einen $(p+1)$-, einen $(q+1)$-, einen $(r+1)$- und einen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt besitzt.

§. 13.

Konstruktion einiger Curven höherer Ordnung mittels des blossen Lineals, und Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf höhere Curven.

Aufgabe.

Eine Curve der dritten Ordnung mittels des blossen Lineals punktweise zu zeichnen, sobald ein Doppelpunkt B_1'' und ausserdem irgend sechs Punkte B_1, B_1', $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ derselben beliebig gegeben sind.

Auflösung.

Man verbinde den Doppelpunkt B_1'' (Taf. II. Fig. 2.) mit zweien der übrigen Punkte, z. B. mit B_1 und B_1', durch die Geraden P_1', P_1, und diese Punkte mit sich selber durch die Gerade P_1'', ziehe zwei beliebige Gerade A, A', welche die P_1'' resp. in $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1'$ schneiden, und von denen die eine, A, der P_1' in $\mathfrak{p}$, die andere, A', der P_1 in $\mathfrak{p}'$ begegnet; verbinde die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ mit einander durch die Gerade P'', nehme auf P'' irgend zwei Punkte B, B' an und verbinde B mit $\mathfrak{p}_1$ durch P', B' mit $\mathfrak{p}_1'$ durch P. Der Durchschnitt von P, P' heisse B''. Nun denke man sich zwei perspektivische Strahlbüschel B, B_1, deren persp. Durchschnitt A, und wieder zwei andere, B', B_1', deren persp. Durchschnitt A' ist, und zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Bezug auf diese zwei Paar Strahlbüschel geometrisch verwandt; bestimme in $\mathfrak{E}$ die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und lege durch die fünf Punkte B'', $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, d. h. man suche beliebig viele andere Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... desselben, was sich auf mehrfache Weise durch blosses Linienziehen bewirken lässt. Endlich bestimme man in $\mathfrak{E}_1$ die den Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... entsprechen

den Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$....; so gehören sämmtliche Punkte B_1'', B_1, B_1', $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$...., und zwar ersterer als Doppelpunkt, einer und derselben Curve dritter Ordnung an.

Beweis.

Da der Verbindungslinie P'' der Punkte B, B', insofern sie dem Strahlbüschel B oder B' angehört, in den Strahlbüscheln B_1, B_1' die Gerade P_1' oder P_1 entspricht, und da ebenso der Geraden P_1'' in den Strahlbüscheln B, B' die Geraden P', P entsprechen, so sind die Punktenpaare B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' die zugeordneten Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$. Und da nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ im Allgemeinen nur durch einen Hauptpunkt B'' geht, so ist die demselben entsprechende Curve von der $2.2-1=3$ten Ordnung und besitzt in B_1'' einen 2fachen und in jedem der Punkte B_1, B_1' einen $2-1=1$fachen Punkt (§. 8. 1.).

Sind überhaupt in einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ von einer Curve $\mathfrak{C}_1$ der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt B_1'' besitzt, dieser Punkt B_1'' und ausserdem $2n$ Punkte beliebig gegeben, von denen irgend zwei B_1, B_1' heissen mögen, und bestimmt man die Punkte B, B', B'' ebenso wie in der obigen Aufgabe, und noch die den übrigen $2n-2$ gegebenen Punkten entsprechenden Punkte, so ist nach §. 10. 1. durch diese $2n-2$ Punkte und den Punkt B'' eine Curve der $(n-1)$ten Ordnung, welche B'' zum $(n-2)$fachen Punkte hat, bestimmt, und ist die der $\mathfrak{C}_1$ entsprechende Curve $\mathfrak{C}$. Man würde also jene Curve $\mathfrak{C}_1$ mit dem blossen Lineal zeichnen können, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ gezeichnet vorläge. Nun aber lässt sich die der 2ten Ordnung, also auch die der 3ten mit einem Doppelpunkte, die der 4ten, 5ten, 6ten....$n$ten Ordnung mit einem 3-, 4-, 5-....$(n-1)$fachen Punkte mittels des blossen Lineals zeichnen. (Vgl. Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques par M. J. V. Poncelet. art. 204. in Crelle's Journal. Bd. 8. Hft. 2.).

1) Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt besitzt, lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald dieser vielfache Punkt und ausserdem $2n$ Punkte der Curve beliebig gegeben sind.

Es seien in Taf. II. Fig. 2. durch den (beliebigen) Punkt B_1 der Curve 3. O. $\mathfrak{K}_1$ die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... gelegt, welche den (ebenfalls beliebigen) Strahl P_1 des Doppelpunktes B_1'' in den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... und die Curve selbst noch in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$; $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1'$.... schneiden; und es sei auf jeder noch ein Punkt α_1', β_1', γ_1', δ_1'.... so bestimmt, dass α_1, α_1' mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; β_1, β_1' mit $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$ u. s. f. harmonisch sind. Dann sind nach §. 6. 4. die je vier solchen Punkten entsprechenden Punkte ebenfalls harmonisch, und da allen Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... ein und derselbe Punkt B entspricht, und die entprechenden von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$.... einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ angehören, so liegen, wie bekannt, alle Punkte, welche den α_1', β_1' γ_1' δ_1'.... entsprechen, auf einer Geraden, nämlich der harmonischen Polare von B für $\mathfrak{K}$, und folglich die Punkte α_1', β_1', γ_1', δ_1'.. selber auf einem Kegelschnitte, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht u. s. w.

2) Legt man durch den Doppelpunkt einer Curve dritter Ordnung irgend eine Gerade P_1, und durch irgend einen anderen Punkt B_1 derselben beliebig viele Gerade a_1, b_1, c_1, d_1.... und bestimmt auf jeder denjenigen Punkt, welcher zu den beiden neuen Punkten und zu dem der Geraden P_1 angehörigen der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher der Curve im Doppelpunkte, im Punkte B_1, in demjenigen Punkte, in welchem die Gerade P_1 dieselbe von Neuem schneidet, und ausserdem, wenn sie vorhanden sind, in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche von B_1 an dieselbe gehen, begegnet.

Den Strahlenpaaren, welche den Doppelpunkt B_1'' mit jenen Durchschnittspunkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$.... verbinden, entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Strahlenpaare, welche die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$.... des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ mit dem Punkte B'' verbinden; diese Strahlenpaare aber bilden, weil die Linien $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$.... durch einerlei Punkt B gehen, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 3. 3. eine Involution von Strahlen; also hat man nach §. 6. 1. den folgenden Satz:

3) Legt man durch irgend einen Punkt einer Curve dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzt, beliebig viele Gerade, so bilden die Strahlenpaare, welche den Doppelpunkt mit den neuen Durchschnitten dieser Geraden und der Curve verbinden, eine Involution von Strahlen, und zwar gehen die Hauptstrahlen dieser Involution, wenn sie vorhanden sind, nach den Berührungspunkten der beiden von jenem Punkte ausgehenden Tangenten.

Durch irgend einen Punkt p_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und durch die drei Punkte B_1, B_1', B_1'' denke man sich beliebig viele Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$.... gelegt; so wird im Allg. ein jeder derselben die Curve $\mathfrak{K}_1$ in noch zwei Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$; $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1'$.... schneiden, und auf jedem wird es einen Punkt α_1, β_1, γ_1, δ_1...., geben, welcher mit p_1, als zugeordnetem Punkte, und mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$.... vier harmonische Punkte des betreffenden Kegelschnittes bildet. Jenen Kegelschnitten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$... entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Gerade, welche durch einerlei Punkt p gehen, den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$.... die Durchschnitte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, und den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... solche Punkte, welche mit p, als zug. Punkte, und mit diesen Durchschnitten vier harmonische Punkte bilden, also sämmtlich der harm. Polare des Punktes p für $\mathfrak{K}$ angehören. Folglich liegen auch die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1.... alle auf einem Kegelschnitte u. s. w.

4) Haben eine Schaar von Kegelschnitten mit einer Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt und zwei einfache Punkte und unter sich noch einen vierten Punkt p_1 gemein, und bestimmt man auf einem jeden dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er noch ausserdem die Curve schneidet, und zu dem

Punkte p_1, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher mit jener Schaar und der Curve die nämlichen drei Punkte gemein hat und die letztere in denjenigen zwei Punkten schneidet, in welchen sie von zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Sind von einer Curve der 4ten Ordnung, welche drei Doppelpunkte besitzt, ausser diesen letzteren noch $\frac{4(4+3)}{2} - 3\frac{2(2+1)}{2} = 5$ einfache Punkte gegeben, so ist dieselbe, und mit ihr zugleich, als die ihr entsprechende Curve, ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt; da nun dieser mittels des Lineals sich zeichnen lässt, so folgt:

5) Eine Curve der vierten Ordnung mit drei Doppelpunkten lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald diese drei Doppelpunkte und ausserdem irgend fünf Punkte derselben gegeben sind.

Die Ausführung sei dem Leser überlassen. Sind die drei Doppelpunkte insbesondere drei **Rückkehrpunkte**, so entspricht nach §. 11. 2. der Curve ein Kegelschnitt, welcher die drei Hauptlinien der Ebene berührt, und den drei Tangenten in den Rückkehrpunkten entsprechen diejenigen Geraden, welche die Berührungspunkte des Kegelschnittes mit den Gegenecken des Hauptdreiecks verbinden; solche drei Geraden aber, wie bekannt, schneiden einander in einerlei Punkte; also:

6) Die drei Tangenten in drei Rückkehrpunkten einer Curve vierter Ordnung gehen durch einen und denselben Punkt.

Ferner erhält man auf ähnliche Weise, wie der Satz 2. des §. 13. gefunden wurde, den folgenden:

7) Besitzt eine Curve 4ter Ordnung drei Doppelpunkte, und denkt man sich auf irgend einem Strahle des einen dieser Punkte einen Punkt so bestimmt, dass er zu den beiden neuen Punkten der Curve und zu demjenigen, welcher der Verbindungslinie der beiden anderen Doppelpunkte angehört, der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher durch die drei Doppelpunkte und durch die Berührungspunkte derjenigen zwei Tangenten der Curve geht, welche sich in jenem Doppelpunkte schneiden.

Und wenn statt des ersten Doppelpunktes jrgend ein beliebiger Punkt der Ebene gesetzt wird:

8) Besitzt eine Curve vierter Ordnung drei Doppelpunkte, und legt man durch die letzteren und durch einen beliebigen Punkt p der Ebene eine Schaar Kegelschnitte, und bestimmt auf jedem dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er die Curve von Neuem schneidet, und zu dem Punkte p, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher auch die drei Doppelpunkte enthält u. s. w.

Es sei endlich $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt; durch B_1'' gehe eine beliebige Gerade a_1'', welche $\mathfrak{C}_1$ von Neuem in 2 Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ schneidet; durch die Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 sei ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ gelegt, welcher die Gerade a_1'' zum anderenmal in $\mathfrak{b}_1$ schneidet und mit $\mathfrak{C}_1$ noch einen (einzigen) Punkt J_1 gemein hat. Endlich sei $\mathfrak{b}_1'$ zu $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{b}_1$ der vierte harmonische, dem $\mathfrak{b}_1$ zugeordnete Punkt. Jetzt denke man sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ die Punkte B, B', B'' beliebig gewählt, und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt; so entspricht der $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 3ter Ordnung $\mathfrak{C}$, welche durch den Punkt B'' geht und einen dem O_1 entsprechenden Doppelpunkt O besitzt; dem Strahle a_1'' und den harmonischen Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$ entspricht ein Strahl a'' von B'' und vier harmonische Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ entspricht eine Gerade $\mathfrak{K}$, welche durch O, den dem J_1 entsprechenden Punkt J der Curve und durch $\mathfrak{b}$ geht; die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ liegen auf $\mathfrak{C}$, und nach 2. liegen alle Punkte $\mathfrak{b}'$, welche den verschiedenen Strahlen von B'' angehören, auf einem Kegelschnitte, welcher die Punkte B'', O, J enthält; da nun dieser Kegelschnitt nur durch einen einzigen Hauptpunkt B'' geht, so entspricht ihm in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve 3. O., welche in B_1'' einen Doppelpunkt besitzt und einfach durch B_1, B_1' und O_1 hindurch geht. Hieraus folgt:

9) Sind irgend eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, welcher durch diese vier Punkte geht, beliebig gegeben, und denkt man sich auf jedem Strahle jenes Punktes B_1'' zu den beiden Punkten, welche ausserdem noch der Curve 5ter Ordnung, und zu jenem, welcher noch dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ angehört, den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bestimmt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einer Curve 3ter Ordnung, welche an der Stelle jenes dreifachen Punktes einen Doppelpunkt besitzt, durch die drei Doppelpunkte der Curve 5ter Ordnung und ausserdem durch denjenigen Punkt, in welchem der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ diese Curve von Neuem schneidet, hindurchgeht.

Besondere Fälle.

§. 14.

Zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

Sind sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als auch B', B_1' projektivisch-gleich, d. h. schliessen je zwei Strahlen a, b des einen denselben spitzen Winkel ein als die entsprechenden Strahlen a_1, b_1 des anderen, so sind auch die von den Hauptlinien P', P'' und P_1'', P_1' einerseits, und die von P, P'' und P_1'', P_1 andererseits eingeschlossenen spitzen Winkel einander gleich. Es sind aber hierbei zwei Fälle denkbar: a) Entweder sind die in-

neren Winkel B, B' des Hauptdreiecks $BB'B''$ den inneren Winkeln B_1, B_1' des Hauptdreiecks $B_1B_1'B_1''$ gleich; oder b) es sind nur zwei innere Winkel B, B_1; dagegen der andere innere Winkel B' des einen Dreiecks dem Aussenwinkel B_1' des anderen gleich.

. Im Falle a) sind die Hauptdreiecke ähnlich, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ für einen Augenblick so aufeinander gelegt, dass die Hauptlinien P'', P_1'' in einerlei gerade Linie fallen, die Richtung von B nach B' dieselbe sei, als die von B_1 nach B_1', und dass die Punkte B'', B_1'' auf einerlei Seite jener geraden Linie liegen, so müssen sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als die Strahlbüschel B', B_1' ungleichliegend sein, d. h. folgen z. B. in B die Strahlen P'', a, b, c, d, P'.... von der Rechten zur Linken aufeinander, so gehen die entsprechenden Strahlen P_1' a_1, b_1, c_1, d_1, P_1''.... von der Linken zur Rechten. Sind nun die Strahlbüschel B, B' selber projektivisch-gleich, und sind z. B. a, b; a', b' irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Strahlen, so ist

$$\text{W}.\,a_1b_1 = \text{W}.\,ab = \text{W}.\,a'b' = \text{W}.\,a_1'b_1', \text{ also auch } \text{W}.\,a_1b_1 = \text{W}.\,a_1'b_1';$$

also sind auch die von den entsprechenden Strahlen gebildeten Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch-gleich, und zwar sind letztere gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem B, B' gleichliegend oder ungleichliegend sind.

Im Falle b) sind die Hauptdreiecke nicht ähnlich, es sei denn, sie wären rechtwinklig, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so wie oben aufeinander gelegt, so werden die Strahlbüschel B, B_1 ungleichliegend, dagegen die Strahlbüschel B', B_1' gleichliegend sein. Sind also die Strahlbüschel B, B' gleichliegend, so müssen die ebenfalls projektivisch-gleichen Strahlbüschel B_1, B_1' ungleichliegend sein, und umgekehrt.

Bekanntlich sind zwei perspektivische Strahlbüschel B, B' projektivisch gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihr perspektivischer Durchschnitt unendlich entfernt oder auf ihrem gemeinschaftlichen Strahle in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten senkrecht steht; und zwei schiefliegende projektivische Strahlbüschel B, B' sind gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihre Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, und ihre entsprechenden Strahlen auf demselben sich schneiden, oder ihre Mittelpunkte die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel sind, auf welcher die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen liegen; und umgekehrt. Hieraus folgt nun im Falle a):

1) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ entspricht in der anderen der dem Hauptdreiecke umschriebene Kreis; und daher bilden auch die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte (B'', B_1'') zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

2) Den drei Geraden, welche auf den Seiten des einen Hauptdreiecks in deren Mitten senkrecht stehen, entsprechen drei dem anderen Hauptdreiecke umschriebene gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf den betreffenden Seiten liegen.

3) Allen Kreisen der einen Ebene, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen, entsprechen in der anderen ebenfalls Kreise, welche bloss durch die zwei zugeordneten Hauptpunkte gehen.

4) Allen gleichseitigen Hyperbeln, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben, entsprechen ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben.

Ferner ergiebt sich aus 2. und aus Archiv Thl. III. S. 225. *a.*:

5) Dem Mittelpunkte der den beiden Hauptdreiecken umschriebenen Kreise entsprechen gegenseitig die Durchschnitte der Höhen dieser Dreiecke.

Dagegen findet im Falle *b*) Folgendes statt:

6) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen entspricht eine dem Hauptdreiecke der anderen umschriebene gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt auf einer bestimmten Seite dieses Dreiecks liegt; und daher bilden die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte keine projektivisch-gleichen Strahlbüschel.

7) Einer bestimmten von den drei Senkrechten in den Mitten der Hauptdreiecksseiten entspricht der dem anderen Hauptdreieck umschriebene Kreis; und daher gehen die beiden den Hauptdreiecken umschriebenen Kreise gegenseitig durch die ihren Mittelpunkten entsprechenden Punkte.

8) Allen Kreisen, welche bloss durch die beiden Hauptpunkte B, B' (oder B_1, B_1') gehen, entsprechen gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' (oder B, B') gehen und dieselben zu Endpunkten eines Durchmessers haben.

§. 15.

Zwei aufeinander gelegte Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$.

Denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ aufeinander gelegt, so ist ihre geometrische Verwandtschaft am Allgemeinsten durch zwei Kegelschnitte K, K' (Taf. II. Fig. 1.) bestimmt, deren einer die zug. Hauptpunkte B, B_1 und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a, a_1; b, b_1...., der andere zwei andere zug. Hauptpunkte B', B_1' und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a', a_1'; b', b_1'.... enthält.

Fallen zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ beider Ebenen zusammen, so gehen die Strahlen a, a', a_1, a_1' durch einerlei Punkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$, und folglich ist letzterer den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich, und da zwei Kegelschnitte im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keinen Punkt gemein haben, so folgt:

1) Zwei aufeinander gelegte geometrisch verwandte Ebenen besitzen im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keine Punkte, und nur in gewissen Grenzla-

gen auch drei oder einen, in welchen sich entsprechende Punkte vereinigen.

Sind insbesondere zwei Strahlbüschel B, B' perspektivisch, d. h. ist K eine Gerade, so werden sowohl in den Durchschnitten von K und K', als auch in denen des gemeinschaftlichen Strahles BB_1 und des Kegelschnittes K' entsprechende Punkte vereinigt; und sind zugleich B, B_1 und B', B_1' perspektivisch, so giebt es solcher Punkte allemal vier, es sei denn, dass einige zusammenfallen, nämlich im Durchschnitte der perspektivischen Durchschnitte, in dem der Geraden BB_1, $B'B_1'$, und in den Punkten, wo allemal die eine der beiden letzteren den persp. Durchschnitt der beiden anderen Strahlbüschel schneidet.

Dahingegen können im Allgemeinen keine zwei entsprechenden Geraden zusammenfallen, weil nur den Strahlen der Hauptpunkte wiederum gerade Linien entsprechen. Sind aber z. B. B, B_1 perspektivisch, so fallen längs BB_1 zwei entsprechende Gerade zusammen; und sind zugleich auch B', B_1' perspektivisch, und ist der gem. Strahl des einen Paares zugleich der perspektivische Durchschnitt des anderen, so müssen sich in jedem Punkte dieses Strahles zwei entsprechende vereinigen. Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so fallen nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. 9. a. entweder zwei oder bloss ein oder kein Paar entsprechende Strahlen derselben zusammen.

Man denke sich ferner zwei Punkte a, a_1, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. sowohl wenn a zu $\mathfrak{E}$, a_1 zu $\mathfrak{E}_1$, als auch wenn a_1 zu $\mathfrak{E}$, a zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird; und es seien a, α; a', α'; α_1, a_1; α_1', a_1' resp. die nach a, a_1 gehenden Strahlen von B, B', B_1, B_1'; so liegen einerseits die Durchschnitte von a und a_1; α und α_1 auf dem Kegelschnitte K, und die Gerade A, welche dieselben verbindet, trifft die Gerade BB_1 in einem Punkte $\mathfrak{k}$, welcher der harm. Pol der Geraden aa_1 für K ist; folglich geht aa_1 durch den harm. Pol von BB_1 für K; aber auch andererseits durch den harm. Pol von $B'B_1'$ für K'; also ist sie die Gerade, welche den Durchschnitt der Tangenten in B und B_1 mit dem der Tangenten in B' und B_1' verbindet.

Da nun die Punkte B, B_1 und der Durchschnitt von a, a_1 auf K liegen, und BB_1 den harmonischen Pol $\mathfrak{k}$ von aa_1 für K enthält, so sind, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 4. 2. die Punkte a, a_1 zwei zugeordnete harm. Pole für K; aber auch für K'; also das den Involutionen zug. harm. Pole für K und K' gemeinschaftliche Paar.

2) In zwei aufeinander gelegten geometrisch verwandten Ebenen giebt es im allgemeinsten Falle entweder nur ein einziges oder kein Paar Punkte, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen.

Fällt der Pol von $B'B_1'$ für K' mit dem von BB_1 für K zusammen, so gehen durch dieselben unzählige Gerade, deren jede zwei Punkte a, a_1 besitzt. Im Archiv Thl. V. Nr. XVIII. §. 6. 9. ist gezeigt worden, dass in dem Falle, wenn jener Pol auf einer gemeinschaftlichen Sekante von K, K' liegt, die Punktenpaare a, a_1, welche den verschiedenen Strahlen desselben angehören, einen Kegelschnitt bilden müssen. In jedem anderen Falle aber bilden sie keinen Kegelschnitt, sondern eine Curve höherer Ordnung.

Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, so sind der Punkt $\mathfrak{k}$, wo BB_1 vom persp. Durchschnitt derselben, und der Punkt $\mathfrak{k}_1$, wo BB_1 von der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ geschnitten wird, mit den Punkten B, B_1 harmonisch; und ausserdem sind die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{k}_1$ und dem dem persp. Durchschnitt K angehörigen Punkte $\mathfrak{k}_2$ harmonisch. Im Fall nun auch B', B_1' perspektivisch sind und $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ analoge Bedeutung als $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ haben, so giebt es, so lange weder die persp. Durchschnitte K, K' noch auch die Punkte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammenfallen, nur eine Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und entweder zwei oder keine Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$. Fallen nur K und K' zusammen, also auch $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_2'$, so giebt es keine Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, die zugleich mit $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und mit $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ harmonisch sind; und fallen nur $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so besitzt aus demselben Grunde nur ein einziger Strahl derselben Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, dann aber unzählige Paare solcher Punkte. Fallen endlich sowohl K, K' als $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so giebt es auf jedem Strahle der letzteren, d. h. des Durchschnittes von BB_1 und $B'B_1'$, unzählige Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; aber dann geht der gemeinsame persp. Durchschnitt nach dem Durchschnitte der Geraden BB' und B_1B_1', und dem Strahle BB' entspricht sowohl in B_1 als in B_1' der Strahl B_1B_1', ein Fall, der noch nicht hierher gehört.

Wenn im allgemeinen Falle die Kegelschnitte K, K' sich decken, so giebt es auf der Geraden, welche die harm. Poole von BB_1 und $B'B_1'$ verbindet, unzählige Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; nämlich je zwei zugeordnete harm. Pole derselben sind ein solches Paar.

Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so sind die Strahlen a, a_1 derselben, welche nach zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ gehen, in doppeltem Sinne entsprechend, also sind nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. §. 1. *b.* die Strahlbüschel involutorisch; hieraus folgt:

3) S i n d d i e b e i d e n P a a r S t r a h l b ü s c h e l B, B_1; B', B_1', i n A n s e h u n g d e r e r z w e i a u f e i n a n d e r g e l e g t e E b e n e n g e o m e t r i s c h v e r w a n d t s i n d, c o n c e n t r i s c h, s o e n t s p r e c h e n e n t w e d e r a l l e o d e r k e i n P a a r P u n k t e d e r s e l b e n e i n a n d e r i n d o p p e l t e m S i n n e.

Gilt letzteres von allen entsprechenden Punktenpaaren, so sollen die Ebenen i n v o l u t o r i s c h - v e r w a n d t, und je zwei entsprechende Systeme derselben zwei I n v o l u t i o n s - S y s t e m e heissen. Im Ganzen bleiben dann noch alle Erscheinungen, wie früher; einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht eine der $2n$ten Ordnung u. s. w., doch ist es einerlei, in welcher der beiden Ebenen liegend eine jede von beiden Curven vorgestellt wird: es fallen nämlich, was bei bloss concentrischen proj. Strahlbüscheln nicht stattfindet, jetzt auch das dritte Paar zugeordnete Hauptpunkte zusammen.

β.

Zwei Systeme von Geraden.

§. 16.

Sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Gerade A, A' mit den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$...., in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei

Gerade A_1, A_1' mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... und $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{d}_1'$.... gegeben, und ist

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{d}_1....) \text{ und zugleich}$$
$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1',\mathfrak{b}_1',\mathfrak{c}_1',\mathfrak{d}_1'....),$$

so entspricht jeder Geraden a der Ebene $\mathfrak{E}$, welche A, A' in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ schneidet, eine Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$, welche durch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ geht; insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden Ebene diejenige Gerade der anderen, welche die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen verbindet. Dem Durchschnitte p'' von A, A' entspreche in A_1 ein Punkt p_1' und in A_1' ein Punkt p_1; und umgekehrt: dem Durchschnitte p_1'' von A_1, A_1' entspreche in A ein Punkt p', in A' ein Punkt p, und es seien A'', A_1'' die Geraden, welche resp. p und p', p_1 und p_1' verbinden. Dies vorausgesetzt, so entspricht jedem Strahle von p'' die Gerade A_1'', und jedem Strahle von p_1'' die Gerade A''.

Es sei B irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen a, b, c, d.... die A in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., die A' in $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... schneiden; so hat man:

$$A_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{d}_1....) = A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}....) \equiv (a,b,c,d....) \equiv$$
$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1',\mathfrak{b}_1',\mathfrak{c}_1',\mathfrak{d}_1'....); \text{ also}$$
$$A_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{d}_1....) = A_1'(\mathfrak{a}_1',\mathfrak{b}_1',\mathfrak{c}_1',\mathfrak{d}_1'....).$$

Liegt B auf A'', so entspricht dem Strahle A'' von B ein durch p_1'' gehender Strahl, also sind die Geraden A_1, A_1' in Ansehung der den a, b, c, d.... entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... perspektivisch, und da demjenigen Strahle von B, welcher durch p'' geht, die Gerade A_1'' entspricht, so liegt der Projektionspunkt B_1 von A_1, A_1' auf A_1''. In jedem anderen Falle, wo B auf keiner der Geraden A, A', A'' liegt, umhüllen die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... nebst A_1, A_1', A_1'' einen Kegelschnitt $[B_1]$. Liegt der Punkt B auf der Geraden r, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A, A' verbindet, so wird der Kegelschnitt $[B_1]$ von der unendlich entfernten Geraden berührt, ist also eine Parabel; und ist B selbst unendlich entfernt, so berührt $[B_1]$ die Gerade r_1, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A_1, A_1' verbindet.

Die drei Geraden A, A', A'' und A_1, A_1', A_1'' werden Hauptlinien, die Punkte p, p', p'' und p_1, p_1', p_1'' Hauptpunkte, die von ihnen gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke, und je zwei gleichmarkirte Hauptlinien und Hauptpunkte, wie A'', A_1''; p', p_1'; A'', p_1'', zugeordnete genannt.

1. **Einem jeden Punkte, welcher auf einer Hauptlinie der einen Ebene liegt, entspricht wieder ein Punkt der zugeordneten Hauptlinie der anderen Ebene.**

2. **Einem jeden Strahle eines Hauptpunktes der einen Ebene entspricht ein und dieselbe Gerade, nämlich die zugeordnete Hauptlinie der anderen Ebene.**

3. **Einem jeden Punkte, welcher auf keiner Hauptlinie liegt, entspricht ein Kegelschnitt, welcher von den drei Hauptlinien der anderen Ebene und von den, den Strahlen des ersteren entsprechenden Geraden berührt wird, und umgekehrt. Dieser Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn jener Punkt auf der mit r (r_1) bezeichneten Geraden liegt.**

Es würde langweilig sein, diese Untersuchung noch weiter zu verfolgen, indem man sich bereits aus diesem Anfang derselben überzeugt, dass dieselbe kaum mehr als eine wiederholte Erzählung der unter α. gewonnenen Resultate in anderem Gewande liefern würde. Der Leser kann sich sogleich in den Besitz des hier zu Gewinnenden setzen, wenn er in den früheren Betrachtungen und Lehrsätzen die Ausdrücke: Punkt, Hauptpunkt, Gerade, Hauptlinie, Curve $n$ter Ordnung oder Klasse, Punkt oder Tangente einer Curve, $n$facher Punkt, Rückkehrpunkt u. s. w. resp. mit den Ausdrücken: Gerade, Hauptlinie, Punkt, Hauptpunkt, Curve $n$ter Klasse oder Ordnung, Tangente oder Punkt einer Curve, $n$fache Tangente, Wendungstangente u. s. w. vertauscht. Nur in einem besonderen Falle stellt sich Eigenthümliches heraus: Sind nämlich sowohl die Geraden A, A_1 als die Geraden A', A_1' **projektivisch-ähnlich oder gleich**, so entsprechen sich die unendlich entfernten Punkte derselben, und folglich auch die unendlich entfernten Geraden ihrer Ebenen gegenseitig; die Geraden A'' und A_1'' sind also in Ansehung ihrer entsprechenden Punkte ebenfalls ähnlich; jeder Parabel, welche die drei Hauptlinien der einen Ebene berührt, entspricht ein unendlich entfernter Punkt der anderen, und jeder Parabel, welche bloss zwei Hauptlinien berührt, entspricht wieder eine Parabel.

γ.

Ein System von Punkten und ein System von Geraden.

§. 17.

Von der Betrachtung dieser beiden Systeme gilt fast dasselbe als von der der beiden vorigen. Man erhält die Eigenschaften derselben, wenn man in α. die Ausdrücke für die Elemente der einen Ebene unverändert lässt, dagegen die für die Elemente der anderen mit den so eben genannten vertauscht. Nur dem §. 14. steht hier durchaus kein ähnlicher zur Seite, und das Analogon der Frage über die in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte dürfte wenigstens kein besonderes Interesse darbieten. Wichtiger dagegen wäre es zu untersuchen: welchem Orte diejenigen Punkte der einen Ebene angehören, deren entsprechende Geraden durch diese Punkte selber gehen? und umgekehrt; indem dieselbe Frage für reciprok-verwandte Figuren von besonderer Bedeutung ist. Schwerlich aber dürfte dieselbe hier ohne Hülfe der algebraischen Analysis beantwortet werden können, wesshalb ich sie übergehe.

Zweite Art der höheren geometrischen Verwandtschaften.

§. 18.

Es seien jetzt die in §. 4. betrachteten zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' so beschaffen, dass zwar dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B', insofern er zu B' gerechnet wird, in B_1' wiederum der gemeinschaftliche Strahl P_1'' von B_1, B_1' entspreche, d. h. dass sowohl P mit P'' als auch P_1 mit P_1'' zusammenfalle; dass dagegen dem Strahle P'' des Strahlbüschels B ein von P_1'' verschiedener Strahl P_1' in B_1, und umgekehrt: dem Strahle P_1'' von B_1 ein von P'' verschiedener Strahl P' in B entspreche. In diesem Falle muss einem jeden Punkte von P'' der einzige Punkt B_1, und einem jeden Punkte von P' der einzige Punkt B_1'; und ebenso einem jeden Punkte von P_1'' der Punkt B, und einem jeden von P_1' der Punkt B' entsprechen. Einer jeden Geraden A der Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht in $\mathfrak{E}_1$ offenbar ebenso wie früher ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' geht; weil aber jetzt denjenigen zwei Strahlen von B, B', welche nach dem Durchschnitte von A und P'' gerichtet sind, in B_1, B_1' die Strahlen P_1', P_1'' entsprechen, so muss, zufolge Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. II., der Kegelschnitt $[A_1]$ die Hauptlinie P_1' in B_1 berühren. Und umgekehrt: wird jedem Kegelschnitt, welcher durch die Hauptpunkte B, B' geht und die Hauptlinie P' berührt, in der anderen Ebene eine Gerade entsprechen. Dagegen entspricht jedem Kegelschnitt, welcher durch B, B' geht, aber P' nicht berührt, zwar wiederum ein Kegelschnitt, welcher durch B_1, B_1' geht, der aber die Hauptlinie P_1' nicht berührt.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine Curve der $n$ten Ordnung, welche durch keinen der Hauptpunkte B, B' gehe, und es sei $\mathfrak{C}_1$ die ihr entsprechende Curve; so entspricht den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P'' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1, und den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1'. Einer jeden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht ein Kegelschnitt, welcher mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen $2n$ Punkte, welche nicht in B, B' fallen, gemein hat; also wird $\mathfrak{C}_1$ von dieser Geraden in $2n$ Punkten geschnitten, ist folglich von der $2n$ten Ordnung. Demnach hat jeder Strahl des Punktes B_1 ausser diesem $n$fachen Punkte noch n Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Der Strahl P_1' aber kann keine Punkte der Curve besitzen, welche nicht mit B_1 zusammenfallen, weil sonst die Curve $\mathfrak{C}$ durch den Punkt B' gehen müsste, was gegen die Annahme ist; also sind längs P_1' ausser jenen n Punkten noch n Punkte mit B_1 vereinigt. Dennoch aber ist B_1 kein $2n$facher Punkt; weil sonst auch alle übrigen Strahlen desselben ausser ihm keinen Punkt mit $\mathfrak{C}_1$ gemein haben könnten.

Denkt man sich nämlich die jetzt in Rede stehende Art der Verwandtschaft aus der ersten durch allmähligen Uebergang entstanden, indem die Hauptlinien P, P_1 immer kleinere Winkel mit P'', P_1'' bilden, so sieht man, dass zwar längs der festen Geraden P_1' ein jeder der n Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1'' bildeten, sich mit einem der Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1

bilden, nämlich mit dem demselben Zweige angehörenden, vereinigt hat, und folglich längs P_1' $2n$ Punkte der Curve liegen; dass aber eine solche Vereinigung zweier Punkte auf keinem anderen Strahle des Punktes B_1 stattfindet. Ferner ersieht man hieraus, dass die Hauptlinie P_1' die n Zweige der Curve, welche durch B_1 (und B_1'') gehen, im Punkte B_1 berührt, und folglich diese Zweige selber einander in B_1 berühren, gleichwohl aber dieser Punkt kein Rückkehrpunkt, sondern nur ein vielfacher Punkt überhaupt ist, weil derselbe nicht den unmittelbaren Uebergang von einem Zweige zum anderen bildet, vielmehr der die Curve beschreibende Punkt sich continuirlich und auf demselben Zweige verharrend durch B_1 hindurch bewegt und erst später wieder auf einem anderen Zweige nach B_1 gelangt. Dies letztere erhellt auch aus dem Umstande, dass bei jenem allmähligen Uebergange nur die Geraden, welche den Punkt B'' mit den Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P'' verbinden, sich zu vereinigen streben, diese Durchschnitte selber aber unverrückt und getrennt von einander bleiben, weshalb auch die in B_1 vereinigten n Punkte noch immer als diskrete Punkte der Curve anzusehen sind. Man nennt diejenige Tangente einer Curve, längs welcher mehr als eine Berührung stattfindet, eine vielfache Tangente derselben, und zwar in dem Falle, wenn zwei oder mehrere der Berührungspunkte zusammenfallen, eine Wendungstangente, und den gemeinschaftlichen Berührungspunkt einen Wendungspunkt der Curve; insbesondere gelten die beiden letzten Ausdrücke mit Vorzug, wenn alle Berührungspunkte einer vielfachen Tangente sich vereinigen. Man sieht sogleich, dass die vielfachen Tangenten, die Wendungstangenten und die Wendungspunkte für Curven einer Klasse dasselbe sind, als die vielfachen Punkte, die Rückkehrpunkte und die Tangenten in derselben für Curven einer Ordnung. Im Falle der Curve $\mathfrak{C}_1$ ist demnach der Punkt B_1 ein vollkommener Wendungspunkt, und die Hauptlinie P_1' ist eine vollkommene Wendungstangente. Es gibt aber auch Fälle, wo B_1 nur theilweise ein vielfacher Punkt und theilweise ein Wendungspunkt ist.

Geht nämlich die Curve $\mathfrak{C}$ $p$mal durch B und $q$mal durch B', so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q))$ten Ordnung, besitzt in B_1' einen $(n-p)$fachen und in B_1 einen $(n-q)$fachen Punkt, und längs P_1' vereinigen sich $n-(p+q)$ Punkte mit einer gleichen Anzahl der bereits in B_1 vereinigten Punkte. Es müssen sich also in B_1 $n-(p+q)$ Zweige der Curve berühren, während die übrigen p Zweige die letzteren und einander in diesem Punkte durchschneiden.

Verfolgt man, wozu hier kein Raum mehr ist, die in §. 10. und §. 12. angestellten Betrachtungen, so wird man finden, dass ein Punkt einer Curve, in welchem sich $n-(p+q)$ Zweige berühren und von p Zweigen geschnitten werden, dieselbe Geltung hat, als zwei Punkte, von denen der eine ein $(n-q)$facher und der andere ein $(n-(p+q))$facher Punkt ist.

XIV.

Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Band VI. Heft 1. dieses Archives.

Von dem
Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Der Herr Herausgeber dieses Archives hat die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in einer Weise gegeben, welche von den Mängeln der Darstellung dieses Gegenstandes in unsern Lehrbüchern zwar frei ist, in mir aber ein Bedenken darüber zurückgelassen hat, ob dieselbe für den Schulunterricht durchweg geeignet sei. Man soll nämlich, um die Gleichung $x^3=ax+b$ aufzulösen,

$$x=(p+q\sqrt{-1})+(p_1+q_1\sqrt{-1})$$
$$=(p+p_1)+(q+q_1)\sqrt{-1}$$

setzen, darauf

$$x^3=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})\{p+p_1+(q+q_1)\sqrt{-1}\}$$
$$+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3$$
$$=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})x$$
$$+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3$$

entwickeln, und hierauf zur Bestimmung von p, p_1, q, q_1 die vier Gleichungen

$$pp_1-qq_1=\tfrac{1}{3}a,\ pq_1+qp_1=0;$$
$$p^3+p_1^3-3pq^2-3p_1q_1^2=b,$$
$$q^3+q_1^3-3p^2q-3p_1^2q_1=0$$

herleiten. Nun erst richtet sich die Untersuchung auf die Auffindung einer reellen Wurzel.

Dieser Anfang scheint mir für Schüler schwierig und abschreckend. Die Auflösung quadratischer Gleichungen ist ihnen so leicht geworden und beruht auf einem so einfachen Gedanken, der sich ihnen mit Nothwendigkeit aufgedrängt hat, dass sie Aehnliches auch bei den cubischen Gleichungen erwarten. Die sofortige Einführung des Imaginären muss sie nothwendig befremden, da ihnen dasselbe immer noch als Ausnahme erscheint, und ihnen der Gedanke, dass die Form $p+q\sqrt{-1}$ die allgemeinste Zahlform ist, zwar bekannt aber noch nicht geläufig ist. Sodann erschrecken sie vor den Schwierigkeiten, wenn ihnen statt einer leicht aufzufassenden Gleichung vier neue, dem Anscheine nach viel schwierigere, entgegen treten; und in der Muthlosigkeit, die sie erfasst, können sie keinen Schritt selbstständig vorwärts thun, und höchstens den Lehrer bewundern, der mit geschickter Hand die Schwierigkeiten zu beseitigen weiss.

Wenn ich im Folgenden den oft behandelten Gegenstand nochmals aufnehme, so geschieht dies in der Absicht, die Resultate meiner Erfahrungen über denselben mitzutheilen, was gewiss öfter von den Lehrern geschehen könnte, zum Nutzen und Frommen unseres Unterrichts und unserer Lehrbücher.

Den Schülern, denen man cubische Gleichungen vortragen will, sind die Sätze $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ bekannt, und die quadratischen Gleichungen geläufig; man wird also ohne Schwierigkeit die drei Wurzeln der reinen cubischen Gleichung finden.

Wenn man die gemischte quadratische Gleichung auch zuerst dadurch gelöst hat, dass man die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate machte, so wird man es doch nicht versäumen dürfen,

$$x^2+ax+b=0$$

auf eine reine quadratische Gleichung zu reduciren, indem man $x=y+z$ setzt, und z so bestimmt, dass der Coefficient von y Null werde. Dann geht man an die Behandlung von

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

so werden die Schüler den Rath geben, $x=y+z$ zu setzen, und z so zu bestimmen, dass y^2 wegfalle. Man findet dann

$$1)\quad y^3+py+q=0.$$

Sicher wird nun der eine oder der andere den Rath ertheilen, eine solche Substitution nochmals vorzunehmen, $y=u+v$ zu setzen, um auch die erste Potenz der Unbekannten wegzuschaffen, und zu einer reinen cubischen Gleichung zu gelangen. Ich pflege solchem Rathe zu folgen, und setze

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3, \\ py &= \qquad\qquad\qquad pu+pv, \\ q &= \qquad\qquad\qquad\quad q; \end{aligned}$$

folglich:

$$2)\quad 0=u^3+3v\,.\,u^2+(3v^2+p)\,u+(v^3+pv+q).$$

Es erhellet dann, dass man durch $3v^2+p=0$ zu einer Gleichung $u^3+\alpha u^2+\beta=0$ gelangen würde, so wie, dass nicht zugleich $3v^2+p=0$ und $3v=0$ sein kann, wenn nicht p selbst Null ist, d. h. wenn man nicht schon eine reine cubische Gleichung hat.

Nun muss der Lehrer weiter helfen: Die Aufgabe, die Wurzeln von $y^3+py+q=0$ zu finden, ist gelöst, wenn man u und v so bestimmen kann, dass der Gleichung 2) Genüge geschieht. Zur Bestimmung zweier Unbekannten gebraucht man zwei Gleichungen. Diese ergeben sich, wenn man die Gleichung 2) so ordnet:

$$3)\quad (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0.$$

Da in der Gl. 1) das absolute Glied nicht Null ist, so kann Null keine Wurzel derselben sein, mithin kann man nicht $u+v=0$ setzen. Es bleibt also, wenn man der Gl. 3) Genüge leisten will, nur übrig

$$4)\quad \begin{cases} u^3+v^3+q=0, \\ 3uv+p=0 \end{cases}$$

zu setzen.

Ich habe absichtlich vermieden, die Herleitung so zu ordnen: man setze $y=u+v$, dann ist

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \\ &= 3uv(u+v)+u^3+v^3, \end{aligned}$$

also auch

$$y^3=3uv\,.\,y+u^3+v^3.$$

Vergleicht man dies mit $y^3=-py-q$, so erhält man $3uv=-p$, $u^3+v^3=-q$. Dass man nämlich statt $u+v$ wieder rückwärts y schreibt, nachdem man eben erst $u+v$ statt y gesetzt hat, und dabei u und v doch noch beibehält, erscheint den Schülern immer als ein Kunstgriff. Schreibt man nun die Gl. 4) in der Form

$$5)\quad \begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}; \end{cases}$$

oder gar $\alpha+\beta=-q$, $\alpha\beta=-\dfrac{p^3}{27}$, so sind die Schüler auf ganz bekanntem Boden und sehen das Ziel schon vor Augen. Man kann also, ehe man weiter geht, die Frage aufwerfen: werden α und β, mithin u und v immer reell sein, und durch den ihnen geläufigen Satz

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$

sie jene Frage dahin beantworten lassen, dass α und β reell sein werden, wenn $q^2+\dfrac{4p^3}{27}$ positiv oder Null ist, imaginär dagegen,

wenn dieser Werth negativ ist. Für alle Fälle aber ist doch

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}};$$

und $u+v$ eine Wurzel der Gleichung $y^3+py+q=0$.

Um die beiden andern Wurzeln zu finden, subtrahirt man entweder von dem Ausdrucke y^3+py+q den Werth $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, und erhält

$$y^3+py+q=(y-(u+v))(y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p);$$

oder man dividirt y^3+py+q durch $y-(u+v)$, und ich ziehe dies letztere vor, weil die Schüler hierbei sicherer gehen. Man erhält so den Quotienten $y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p$, und den Rest $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, mithin für y^3+py+q das obige Product.

Sucht man die Werthe von y, welche dessen quadratischen Factor zu Null machen, so erhält man, nach Berüchsichtigung von $p=-3uv$,

$$-\frac{u+v}{2}\pm\frac{u-v}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1},$$

also imaginäre Wurzeln, wenn u und v reell sind. Es ist gut, wenn man den Grund hiervon dadurch aufzeigt, dass man jenen quadratischen Factor auf die Form bringt:

$$(y+\frac{u+v}{2})^2+3(\frac{u+v}{2})^2.$$

Nun wird man den irreducibeln Fall betrachten müssen, und gleich darauf hinweisen, dass u und v zwar imaginär sind, dass aber u^3 und v^3 conjugirte imaginäre Ausdrücke sind, und dass, wenn eine genauere Untersuchung auch u und v als solche erkennen liesse, nicht bloss $u+v$, sondern auch $(u-v)\sqrt{-1}$ reell sein, dass also in diesem Falle drei reelle Wurzeln vorhanden sein würden, deren Berechnung man sich entweder noch vorbehält, oder, was ich vorziehe, sofort ausführt, indem man den binomischen Lehrsatz zu Hülfe nimmt. Die Erfahrung hat mir gezeigt, dass die Schüler kaum irgend einer Reihenentwickelung mit gespannterem Interesse folgen, als gerade dieser. Es liegt dies wohl mit darin, dass sie eine so lebhafte Ueberzeugung von der Nothwendigkeit der Aufgabe selbst haben.

Hierauf habe ich gewöhnlich erst die Vereinfachung der cardanischen Formel durch die goniometrischen Functionen vorgenommen, und liess mich dann durch den Versuch, dem irreducibeln Falle dieselbe Wohlthat zu erzeigen, zum Ausdruck

$$\sqrt[3]{[r(\cos\omega\pm\sin\omega\sqrt{-1})]}$$

führen, um bei dieser Gelegenheit von den imaginären Ausdrücken der Form $\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}$ das Wenige zu lehren, was man gebraucht, um für $u+v$ die bekannte Formel zu finden. Für die

beiden andern Wurzeln ergeben sich die einfachen bekannten Ausdrücke, wenn man beachtet, dass $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist.

Die Beziehung zwischen den goniometrischen Functionen des dreifachen und einfachen Winkels pflege ich beim Vortrage der Trigonometrie zu benutzen, um die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$ aufzulösen. So natürlich dies den Schülern erscheint, und soviel Freude es ihnen macht, von den eine cubische Gleichung bildenden goniometrischen Formeln diese Anwendung zu machen, gerade so wunderbar kommt es ihnen vor, wenn man umgekehrt bei der Auflösung der cubischen Gleichungen in dem Momente, wo ihnen das Imaginäre im Wege steht, die ihnen vielleicht wieder entfallene Formel

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$$

zu Hülfe ruft. Diese Art Bewunderung soll die Mathematik, wie mir scheint, eher vermeiden als erstreben, denn sie stählt die Kräfte der Lernenden eben so wenig, als sie ihren Muth hebt. Etwas ganz Anderes ist es, wenn man bei der Auflösung der Gleichungen den Umstand benutzt, dass jeder positive ächte Bruch dem Quadrat eines Sinus gleich ist, und die Lernenden dann sehen, wie in Folge dieser Substitution eine überraschende Vereinfachung gewonnen wird; denn hier wird der Ausgang von einem einfachen Gedanken gemacht, von dem man einsieht, dass er auch in andern Fällen die trefflichsten Dienste leisten muss.

XV.

Ueber Poinsot's Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen.

Von

dem Herausgeber.

In dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Février. 1845. p. 48. hat Poinsot eine Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen vorgetragen, deren Princip so einfach ist, dass es sich kaum denken lässt, dass dieselbe

nicht schon einmal anderswo entwickelt worden sein sollte. Poinsot bezeichnet diese Methode aber als neu, und jedenfalls ist dieselbe nicht so allgemein bekannt, wie sie nach meiner Meinung in gewisser Rücksicht zu sein verdient, weshalb wir ihr hier, mit mehreren eigenen Bemerkungen und Zusätzen und überhaupt in grösstentheils eigenthümlicher Entwickelung, die folgenden Seiten widmen wollen.

Wenn A und B zwei beliebige gleichartige Grössen bezeichnen, deren grösstes gemeinschaftliches Maass gefunden werden soll, so nehme man die eine, etwa A, von der anderen B so oft weg, als es angeht. Bleibt dann ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Zweifache $2B$ von B, und nehme A von $2B$ wieder so oft weg, als es angeht. Bleibt bei dieser Operation wieder ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Dreifache $3B$ von B, und nehme A von $3B$ so oft weg, als es angeht. Findet man nun bei der Fortsetzung dieser Operation endlich ein Vielfaches mB von B, von welchem A sich n Mal, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, wegnehmen lässt, ohne dass ein Rest, welcher kleiner als A ist, übrig bleibt, d. h. findet man endlich ein Vielfaches mB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und ist mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B, welches es giebt, so ist der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B, und dasselbe also auf diese Weise gefunden. Kommt man aber bei Fortsetzung des obigen Verfahrens niemals auf ein Vielfaches von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, d. h. es giebt für dieselben gar kein gemeinschaftliches Maass.

Um dies zu beweisen, wollen wir zuerst annehmen, dass man bei der Anwendung des obigen Verfahrens ein Vielfaches mB von B gefunden habe, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und dass mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B sei, welches es giebt. Dann lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B ist. Da nämlich $A = m\frac{A}{m}$ ist, so wird A von $\frac{A}{m}$ gemessen. Weil ferner nach der Voraussetzung $mB = nA$ ist, so ist $B = n\frac{A}{m}$, und es wird folglich auch B von $\frac{A}{m}$ gemessen. Also ist $\frac{A}{m}$ ein gemeinschaftliches Maass von A und B. Gäbe es nun ein gemeinschaftliches Maass $M > \frac{A}{m}$ von A und B, so dass, wenn μ und ν zwei ganze Zahlen bezeichnen, $A = \mu M$ und $B = \nu M$ wäre, so wäre, weil nach der Voraussetzung $A < mM$ ist, $\mu M < mM$, folglich $\mu < m$ Weil aber $B = \nu M$ ist, so ist $\mu B = \mu\nu M = \nu . \mu M = \nu A$, und es gäbe also

ein niedrigeres Vielfaches μB von B als mB, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann es kein grösseres gemeinschaftliches Maass der beiden Grössen A und B als $\frac{A}{m}$ geben, und $\frac{A}{m}$ ist folglich das grösste gemeinschaftliche Maass von A und B, welches der erste Theil unserer Behauptung war.

Wenn die Grössen A und B commensurabel sind, d. h. wenn dieselben überhaupt ein gemeinschaftliches Maass M haben, so dass, wenn μ und ν ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es giebt also unter der gemachten Voraussetzung immer ein Vielfaches μB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen νA von A gleich ist; man muss folglich in diesem Falle bei Anwendung des obigen Verfahrens offenbar immer endlich einmal auf ein Vielfaches von B kommen, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist. Wenn man also bei Anwendung des obigen Verfahren niemals auf ein Vielfaches von B kommt, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, welches der zweite Theil unserer Behauptung war.

Bei Anwendung des obigen Verfahrens auf zwei ungleiche ganze Zahlen a und b dividirt man mit der einen, etwa mit a, in die andere b hinein. Bleibt bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben b und dividirt in die Summe wieder mit a hinein. Bleibt auch bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben wieder b und dividirt in die Summe mit a hinein. Diese Operation setzt man so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, was nach dem Vorhergehenden im vorliegenden Falle offenbar immer endlich einmal Statt finden muss, weil zwei ganze Zahlen jederzeit commensurabel sind. Dann dividirt man mit der Anzahl der ausgeführten Divisionen in a hinein, und der auf diese Weise erhaltene Quotient ist nach dem oben Bewiesenen das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden ganzen Zahlen a und b.

Folgendes Schema stellt diese Operation im Allgemeinen dar:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} b=aq_1+r_1,\ 0<r_1<a;\\ r_1+b=aq_2+r_2,\ 0<r_2<a;\\ r_2+b=aq_3+r_3,\ 0<r_3<a;\\ r_3+b=aq_4+r_4,\ 0<r_4<a;\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ r_{m-2}+b=aq_{m-1}+r_{m-1},\ 0<r_{m-1}<a;\\ r_{m-1}+b=aq_m. \end{array}\right.$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m ist, so ist $\frac{a}{m}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Verwechselt man, was natürlich verstattet ist, a und b mit einander, so erhält man folgendes Schema:

$$2)\left\{\begin{array}{l} a=bq_1'+r_1',\ 0<r_1'<b;\\ r_1'+a=bq_2'+r_2',\ 0<r_2'<b;\\ r_2'+a=bq_3'+r_3',\ 0<r_3'<b;\\ r_3'+a=bq_4'+r_4',\ 0<r_4'<b;\\ \text{u. s. w.}\\ r'_{m'-2}+a=bq'_{m'-1}+r'_{m'-1},\ 0<r'_{m'-1}<b;\\ r'_{m'-1}+a=bq'_{m'}. \end{array}\right.$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, so ist $\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{m'},$$

also $m'a=mb$; und weil nun

$$a=m\frac{a}{m},\ b=m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a:\frac{a}{m}=m,\ b:\frac{b}{m'}=m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahlen sein, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m}=\frac{b}{m'}$ offenbar nicht das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. Wegen der Gleichung $m'a=mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in mb auf; also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m' relative Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, oder das grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m}=\frac{b}{m'}$ der beiden ganzen Zahlen a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\ mb=a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2), wenn man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$5)\ m'a=b(q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}).$$

Also ist nach 4):

$$6)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\ \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\ m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_m$$

und

$$9)\ m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\ a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\ b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

und der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im Nachstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Einfachheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

```
77|91|1
   77
   14
   91
77|105|1
   77
   28
   91
77|119|1
   77
   42
   91
77|133|1
   77
   56
   91
77|147|1
   77
   70
   91
77|161|2
  154
    7
   91
77|98|1
   77
   21
   91
77|112|1
   77
   35
   91
77|126|1
   77
   49
   91
77|140|1
   77
   63
   91
77|154|2
  154
    0
```

Hier ist $m=11$. Also ist $\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

```
91|77|0
    0
   77
   77
91|154|1
    91
    63
    77
91|140|1
    91
    49
    77
91|126|1
    91
    35
    77
91|112|1
    91
    21
    77
91|98|1
   91
    7
   77
91|84|0
    0
   84
   77
91|161|1
    91
    70
    77
91|147|1
    91
    56
    77
91|133|1
    91
    42
    77
91|119|1
    91
    28
    77
91|105|1
    91
    14
    77
91|91|1
   91
    0
```

Hier ist $m' = 13$. Also ist $\frac{b}{m'} = \frac{91}{13} = 7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a = 77$ und $b = 91$.

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck des Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in die Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und steht der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obigen Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusserst leichte und kurze Rechnung:

```
77|91|1
   77
   14|77|5
      70
       7|14|2
         14
          0
```

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, wie vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, so braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folgende Rechnung zu machen:

```
43134|269087|6
      258804
       10283|43134|4
             41132
              2002|10283|5
                   10010
                     273|2002|7
                         1911
                           91|273|3
                              273
                                0
```

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 und 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ setzt,

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien A und B mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie B, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie A so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem $m$ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie A in m gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien A und B entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

XVI.

Ueber eine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen.

Von
dem Herausgeber.

An die in dem vorhergehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen lässt sich, wenn man dieselben noch etwas weiter als dies in diesem Aufsatze geschehen ist verfolgt, die Entwickelung einer Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades anschliessen, welche von mir bei Anfertigung des vorhergehenden Aufsatzes, der auch mehrere mir eigenthümliche Betrachtungen enthält, gefunden wurde, und mir der Beachtung nicht ganz unwerth zu sein scheint, wenn sie auch öfters in ziemlich weitläufige Rechnungen führt.

Betrachten wir nämlich wieder das aus dem vorhergehenden Aufsatze bekannte Schema

$$b=aq_1+r_1,\ 0<r_1<a;$$
$$r_1+b=aq_2+r_2,\ 0<r_2<a;$$
$$r_2+b=aq_3+r_3,\ 0<r_3<a;$$
$$r_3+b=aq_4+r_4,\ 0<r_4<a;$$
u. s. w.
$$r_{m-2}+b=aq_{m-1}+r_{m-1},\ 0<r_{m-1}<a;$$
$$r_{m-1}+b=aq_m;$$

so überzeugen wir uns auf der Stelle, dass die nicht verschwindenden Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{m-1}$$

in allen Fällen sämmtlich unter einander ungleich sein müssen, weil, wenn unter diesen Resten zwei einander gleiche, die wir im Allgemeinen durch r_k und r_{k+i} bezeichnen wollen, vorkämen, nach der Natur des obigen Verfahrens offenbar die nicht verschwindenden Reste

$$r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, r_{k+3}, \ldots r_{k+i-1}$$

ins Unendliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen verschwindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich jederzeit endlich einmal der Fall sein muss.

Sind nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes gemeinschaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die Einheit, und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht verschwindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{a-1}$$

welche alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung genommenen ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots, a-1$$

sein, und es muss also unter den Resten

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{a-1}$$

in allen Fällen die Einheit vorkommen.

Bezeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{a-1}$$

welcher der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, so haben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$b=aq_1+r_1,$$
$$r_1+b=aq_2+r_2,$$
$$r_2+b=aq_3+r_3,$$
$$r_3+b=aq_4+r_4,$$
u. s. w.
$$r_{k-2}+b=aq_{k-1}+r_{k-1},$$
$$r_{k-1}+b=aq_k+1;$$

durch deren Addition sich die Gleichung

$$bk=a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)+1$$

oder

$$bk-a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)=1$$

ergiebt.

Haben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx-ay=1,$$

wo a und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach dem Vorhergehenden offenbar die Werthe

$$x=k,\ y=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Haben wir ferner die unbestimmte Gleichung des ersten Gra des zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx+ay=1,$$

wo a und b wieder relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern, weil nach dem Obigen

$$bk+a\{-(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)\}=1$$

ist, offenbar die Werthe

$$x=k,\ y=-(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Ist die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx-ay=-1,$$

wo wieder a und b relative Primzahlen sind, gegeben, so kann man dieselbe immer auf die Form

$$ay-bx=1$$

bringen, und nun auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichung

$$bx-ay=1$$

auflösen.

Soll endlich die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx+ay=-1,$$

wo auch jetzt a und b relative Primzahlen sind, aufgelöst werden, so liefern, weil nach dem Obigen

$$b(-k)+a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)=-1$$

ist, offenbar die Werthe

$$x=-k,\ y=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Um das Vorhergehende auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Gleichung

$$12x-7y=1$$

betrachten. Da hier $a=7$, $b=12$ ist, so hat man Behufs der Auflösung dieser Gleichung folgende Rechnung zu machen:

$$\begin{array}{c}
7\,|\,12\,|\,1 \\
\underline{7} \\
5 \\
12 \\
7\,|\,\overline{17}\,|\,2 \\
\underline{14} \\
3 \\
12 \\
7\,|\,\overline{15}\,|\,2 \\
\underline{14} \\
1
\end{array}$$

Weil nun $k=3$ und $q_1+q_2+q_3=1+2+2=5$ ist, so ist $x=3$, $y=5$; und wirklich ist

$$12.3-7.5=1.$$

Für die Gleichung $12x+7y=1$ ist nach dem Obigen $x=3$, $y=-5$ eine Auflösung; und wirklich ist auch

$$12.3+7.(-5)=1.$$

Man kann diese Gleichung aber auch auf die Form

$$7y+12x=1$$

bringen, und durch folgende Rechnung eine neue Auflösung derselben finden:

$$\begin{array}{c}
12\,|\,7\,|\,0 \\
\underline{0} \\
7 \\
7 \\
12\,|\,\overline{14}\,|\,1 \\
\underline{12} \\
2 \\
7 \\
12\,|\,\overline{9}\,|\,0 \\
\underline{0} \\
9 \\
7 \\
12\,|\,\overline{16}\,|\,1 \\
\underline{12} \\
4 \\
7 \\
12\,|\,\overline{11}\,|\,0 \\
\underline{0} \\
11 \\
7 \\
12\,|\,\overline{18}\,|\,1 \\
\underline{12} \\
6 \\
7 \\
12\,|\,\overline{13}\,|\,1 \\
\underline{12} \\
1
\end{array}$$

Also ist $k=7$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+q_7=0+1+0+1+0+1+1=4,$$

folglich nach dem Obigen $x=-4$, $y=7$ eine Auflösung unserer Gleichung; und in der That ist auch

$$12.(-4)+7.7=1.$$

Wenn die Gleichung

$$12x-7y=-1$$

gegeben ist, so bringt man dieselbe auf die Form

$$7y-12x=1,$$

und erhält durch eine der unmittelbar vorhergehenden ganz gleiche Rechnung die Auflösung $x=4$, $y=7$; und in der That ist auch

$$12.4-7.7=-1.$$

Hat man endlich die Gleichung

$$12x+7y=-1 \text{ oder } 7y+12x=-1$$

aufzulösen, so findet man nach dem Obigen leicht die beiden Auflösungen $x=-3$, $y=5$ und $x=4$, $y=-7$; und in der That ist auch

$$12.(-3)+7.5=-1 \text{ und } 12.4+7.(-7)=-1.$$

Eine Auflösung der Gleichung

$$15x+22y=1$$

ergiebt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r|c|l}
22 & 15 & 0 \\
 & 0 & \\
\hline
 & 15 & \\
 & 15 & \\
22 & 30 & 1 \\
 & 22 & \\
\hline
 & 8 & \\
 & 15 & \\
22 & 23 & 1 \\
 & 22 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}$$

Weil nun $k=3$ und

$$q_1+q_2+q_3=0+1+1=2$$

ist, so ist nach dem Obigen $x=3$, $y=-2$ eine Auflösung unserer Gleichung; und in der That ist auch

$$15.3+22.(-2)=1.$$

Eine zweite Auflösung ergiebt sich mittelst der folgenden Rechnung:

15|22|1
15
7
22
15|29|1
15
14
22
15|36|2
30
6
22
15|28|1
15
13
22
15|35|2
30
5
22
15|27|1
15
12
22
15|34|2
30
4
22
15|26|1
15
11
22
15|33|2
30
3
22
15|25|1
15
10
22
15|32|2
30
2
22
15|24|1
15
9
22
15|31|2
30
1

Also ist $k=13$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+\ldots+q_{13}$$
$$=1+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2=19,$$

folglich nach dem Obigen $x=-19$, $y=13$; und in der That ist auch

$$15.(-19)+22.13=1.$$

Dass durch das Obige die vollständige Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Grössen gegeben ist, kann aus den Elementen der Algebra als bekannt vorausgesetzt werden, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Es frägt sich, ob sich das obige völlig allgemeine, und in theoretischer Rücksicht, wie ich glaube, höchst einfache Verfahren, nicht durch zweckmässige Abkürzungen, deren es in vielen Fällen allerdings sehr bedarf, für die Praxis brauchbarer machen lässt. Desfallsige Mittheilungen von Seiten der Leser würden mir, da anderweitige Arbeiten mich zur Zeit hindern, das Obige noch weiter zu verfolgen, sehr angenehm sein, und immer so bald als irgend möglich im Archive abgedruckt werden.

XVII.

Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre.

Von

dem Herausgeber.

In der Abhandlung: Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. Par M. Poinsot, welche in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Janvier et Février 1845. p. 1.—p. 101. abgedruckt ist, hat der berühmte Verfasser die Beweise mehrerer der wichtigsten Sätze der Zahlenlehre auf so eigenthümliche und an sich so einfache Betrachtungen gegründet, dass wir durch eine Darstellung dieser Beweise, die wir im Folgenden zu geben versuchen wollen, die Leser des

Archivs uns zu verbinden hoffen. Ausser diesen von Poinsot „Démonstrations nouvelles tirées de la considération de l'ordre" genannten Beweisen, auf die wir uns in dem vorliegenden Aufsatze absichtlich beschränken werden, enthält übrigens die genannte Abhandlung noch mehrere andere neue Beweise und eigenthümliche Untersuchungen, deren Mittheilung in dem Archive wir uns für die Folge noch vorbehalten.

§. 1.

Auf dem Umfange eines Kreises denken wir uns in einer bestimmten Ordnung und sämmtlich in gleichen Abständen von einander eine beliebige Anzahl, etwa n, Punkte, welche also den Umfang des Kreises in n gleiche Theile theilen.

Einen dieser Punkte werden wir immer als den Anfangspunkt oder den Nullpunkt annehmen und durch 0, die auf denselben in der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte folgenden Punkte aber nach der Reihe durch $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2, \ldots$ bezeichnen, so dass nämlich mit den durch

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

bezeichneten Punkten respective die durch

$$n, n+1, n+2, n+3, \ldots, 2n-1$$

bezeichneten Punkte, ferner wieder die durch

$$2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 3n-1$$

bezeichneten Punkte, eben so wieder die durch

$$3n, 3n+1, 3n+2, 3n+3, \ldots, 4n-1$$

bezeichneten Punkte, u. s. w. zusammenfallen.

Wenn nun die in Rede stehenden Punkte von dem 0ten an nach der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte so durchlaufen werden, dass man von dem 0ten zum $i$ten, vom $i$ten zum $2i$ten, vom $2i$ten zum $3i$ten, vom $3i$ten zum $4i$ten u. s. w. übergeht, so wollen wir im Folgenden der Kürze wegen sagen, dass man die Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen habe, oder wir wollen dies ein Durchlaufen der Punkte mit dem Intervalle i nennen.

Alles dieses vorausgesetzt, lässt sich nun zuvörderst der nachstehende Lehrsatz, welcher als die Hauptgrundlage alles Folgenden zu betrachten ist, beweisen.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden, so trifft man immer endlich einmal wieder auf den Nullpunkt; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist man auf keinen Punkt

mehr als *ein* Mal getroffen; wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, hat man, wenn wir das grösste gemeinschaftliche Maass von n und i durch μ bezeichnen, die ganze Peripherie $\frac{i}{\mu}$ Mal durchlaufen; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist mit Einrechnung des Nullpunktes $\frac{n}{\mu}$ die Anzahl der überhaupt getroffenen verschiedenen Punkte.

Beweis. Bezeichnen wir die ganze Peripherie mit Π, so ist $\frac{\Pi}{n}$ jeder der n gleichen Theile, in welche die Peripherie durch die n Punkte getheilt wird. Durchläuft man also die Punkte mit dem Intervalle i, so geht man dabei jedesmal über den Theil $i\frac{\Pi}{n}$ der Peripherie hinweg, und weil nun

$$ni\frac{\Pi}{n}=in\frac{\Pi}{n}=i\Pi$$

ist, so muss man offenbar, spätestens nachdem mit Einrechnung des Nullpunktes als Anfangspunkt der Bewegung n Punkte getroffen worden sind, jederzeit wieder auf den Nullpunkt zurückkehren, womit der erste Theil unsers Satzes bewiesen ist.

Entsprechen die Zahlen ki und $k'i$, wo k' grösser als k sein soll, einem und demselben von dem Nullpunkte verschiedenen Punkte, so ist offenbar

$$(k'-k)\,i\frac{\Pi}{n}$$

ein Vielfaches $m\Pi$ von Π, also

$$(k'-k)\,i\frac{\Pi}{n}=m\Pi,$$

und folglich

$$(k'-k)i=mn,$$

d. i. $(k'-k)i$ ein Vielfaches von n. Daher trifft der Punkt, welchem die Zahl $(k'-k)i$ entspricht, mit dem Nullpunkte zusammen, und es muss also, weil $(k'-k)i$ kleiner als $k'i$ ist, bevor man auf den Punkt, welchem die Zahl $k'i$ entspricht, trifft, der Nullpunkt mindestens schon ein zweites Mal getroffen worden sein. Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar der zweite Theil unseres Satzes, dass nämlich, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, kein Punkt zwei Mal getroffen werden kann.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dass man, wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, die ganze Peripherie q Mal durchlaufen habe, so ist offenbar, da die ganze Peripherie in n gleiche Theile getheilt ist und jedes Intervall i solcher Theile enthält, qn das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird. Also ist $\frac{i}{q}$ der grösste aliquote Theil von i, von

welchem n gemessen wird, wie sich leicht auf folgende Art zeigen lässt. Weil qn ein Vielfaches von i ist, so sei $qn=pi$. Dann ist $n=p\frac{i}{q}$, und n wird also von $\frac{i}{q}$ gemessen. Würde nun n auch von $\frac{i}{q'}$, wo $q'<q$ sein soll, gemessen, so sei $n=p'\frac{i}{q'}$. Dann wäre $q'n=p'i$, und qn wäre folglich offenbar nicht das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird, was gegen das Obige streitet. Folglich ist, wie vorher behauptet wurde, $\frac{i}{q}$ der grösste aliquote Theil von i, von welchem n gemessen wird, d. h. $\frac{i}{q}$ ist das grösste gemeinschaftliche Maass von n und i, also $\frac{i}{q}=\mu$, und folglich $q=\frac{i}{\mu}$, welches der dritte Theil des zu beweisenden Satzes war.

Bezeichnen wir endlich die Anzahl aller verschiedenen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, getroffenen Punkte, mit Einrechnung des Nullpunkts als Anfangspunkt der Bewegung, durch x, so ist offenbar

$$xi\frac{\Pi}{n}=q\Pi=\frac{i}{\mu}\Pi,$$

woraus auf der Stelle $x=\frac{n}{\mu}$ folgt, wie im vierten Theile des zu beweisenden Satzes behauptet wurde.

Unser Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

§. 3.

Wenn n und i relative Primzahlen sind, so ist $\mu=1$, also $\frac{i}{\mu}=i$ und $\frac{n}{\mu}=n$, was unmittelbar auf den folgenden Satz führt.

Erster Zusatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden und n und i relative Primzahlen sind, so hat man, wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, die ganze Peripherie i Mal durchlaufen, und bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist man auf jeden der n Punkte *ein* Mal getroffen.

Dieser Satz kann aber auch auf folgende Art umgekehrt werden

Zweiter Zusatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden, und, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, jeder der n Punkte getroffen worden ist, so sind n und i jederzeit relative Primzahlen.

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich offenbar in das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird, weil, wenn $i'<i$ und $i'n=pi$ wäre, $p<n$ sein, und daher schon

wenn man die ganze Peripherie nur i' Mal durchlaufen hätte, der Nullpunkt wieder getroffen werden würde, nachdem man vorher über nur p, d. h. weniger als n Punkte hinweggegangen wäre, was gegen die Voraussetzung streitet. Also ist $\frac{i}{i'}$ der grösste aliquote Theil von i, von welchem n gemessen wird, was sich auf dieselbe Weise wie in dem ähnlichen Falle in dem dritten Theile des Beweises des vorhergehenden Lehrsatzes zeigen lässt. Daher ist $\frac{i}{i}=1$ das grösste gemeinschaftliche Maas von n und i, und n und i sind folglich relative Primzahlen, wie behauptet wurde.

Dritter Zusatz. Wenn daher bei jedem Intervalle, mit welchem man die n Punkte auch durchlaufen mag, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, alle n Punkte getroffen werden, so ist n jederzeit eine Primzahl.

Vierter Zusatz. Die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit allen Zahlen, die zu n relative Primzahlen sind, als Intervallen durchläuft, ist jederzeit der Anzahl der Zahlen gleich, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind.

Für jede zwei Intervalle, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind, müssen die Ordnungen, in denen die n Punkte durchlaufen werden, nothwendig von einander verschieden sein, wie auf der Stelle in die Augen fällt, wenn man nur überlegt, dass unter dieser Voraussetzung die unmittelbar auf den Nullpunkt folgenden Punkte in den beiden Ordnungen offenbar jederzeit von einander verschieden sein müssen. Wenn aber i zu n relative Primzahl und grösser als n ist, so ist, wenn

$$i=kn+i'$$

gesetzt wird, wo $i'<n$ sein soll, offenbar auch i' zu n relative Primzahl; und da ein Durchlaufen der n Punkte mit dem Intervalle i augenscheinlich ganz zu der nämlichen Ordnung dieser Punkte führen muss, wie ein Durchlaufen derselben mit dem Intervalle i', so ist klar, dass jedes Durchlaufen mit einem Intervalle, welches zu n relative Primzahl und grösser als n ist, zu einer Ordnung der n Punkte führen muss, welche schon früher bei einem Durchlaufen dieser n Punkte mit einem Intervalle, das zu n relative Primzahl und kleiner als n ist, herbeigeführt wurde. Verbindet man dies mit dem Obigen, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn n mit a und b relative Primzahl ist, so sind auch n und das Product ab relative Primzahlen.

Beweis. Wenn man auf dem Umfange eines Kreises n Punkte auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Weise anordnet und dieselben dann mit dem Intervalle a durchläuft, so werden, weil nach der Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Nimmt man jetzt die n Punkte in der Ordnung, in welcher sie bei diesem Durchlaufen mit dem Intervalle a nach und nach getroffen werden, und durchläuft sie in dieser Ordnung mit dem Intervalle b, so werden, weil nach der Voraussetzung auch n und b relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. wieder alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Auf der Stelle erhellet aber, dass diese beiden Operationen zusammen ganz auf die eine hinauslaufen, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit dem Intervalle ab durchläuft, und man sieht also aus dem Vorhergehenden, dass, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit dem Intervalle ab durchläuft, alle n Punkte getroffen werden, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Daher sind nach §. 3. Zweiter Zusatz. n und das Product ab relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

Aus dem vorhergehenden, für die ganze Zahlenlehre bekanntlich höchst wichtigen Satze, der sich, wenn auch unter einer etwas anderen Form, schon im siebenten Buche der Elemente des Euklides findet, lassen sich viele Folgerungen ziehen, von denen wir hier nur die folgenden in der Kürze hervorheben wollen.

Erster Zusatz. Wenn n mit jeder der Zahlen $a, b, c, d, e, \ldots$ relative Primzahl ist, so sind auch n und das Product $abcde\ldots$ relative Primzahlen.

Weil nämlich nach der Voraussetzung n mit a und b relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product ab relative Primzahlen. Weil also n mit c und ab relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product abc relative Primzahlen. Weil folglich n mit d und abc relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product $abcd$ relative Primzahlen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und die allgemeine Gültigkeit unsers Satzes fällt daher in die Augen.

Zweiter Zusatz. Wenn n mit a relative Primzahl ist, so sind auch n und die Potenz a^k jederzeit relative Primzahlen.

Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze, wenn man $a=b=c=d=e=\ldots$ setzt.

Dritter Zusatz. Wenn die Zahl n, welche mit jeder der Zahlen $a, b, c, d, e, \ldots$ relative Primzahl ist, in dem Producte $\alpha abcde\ldots$ aufgeht, so geht n jederzeit in α auf.

Bezeichnen wir das grösste gemeinschaftliche Maass von α und n durch μ, und setzen $\alpha=\lambda\mu$ und $n=\lambda'\mu$, so sind λ und λ' relative Primzahlen. Weil nun

$$\frac{\alpha abcde....}{n}=\frac{\lambda\mu abcde....}{\lambda'\mu}=\frac{\lambda abcde....}{\lambda'}$$

ist, und nach der Voraussetzung n in $\alpha abcde....$ aufgeht, so geht auch λ' in $\lambda abcde....$ auf. So wie aber n mit $a, b, c, d, e,....$ relative Primzahl ist, so ist natürlich auch λ' mit $a, b, c, d, e,....$ relative Primzahl, und λ' ist folglich mit $\lambda, a, b, c, d, e,....$, also nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit $\lambda abcde....$ relative Primzahl. Daher kann λ' nur dann in $\lambda abcde....$ aufgehen, wenn $\lambda'=1$ ist. Folglich ist $\lambda'=1$, also nach dem Obigen $n=\mu$, und daher $\alpha=\lambda n$, so dass also n in α aufgeht, wie behauptet wurde.

Vierter Zusatz. **Jede Zahl n kann nur auf eine einzige Art in von der Einheit verschiedene Primfactoren zerlegt werden.**

Sei nämlich, wenn sowohl $a, b, c, d,....$, als auch $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, sämmtlich unter einander und von der Einheit verschiedene Primzahlen bezeichnen, und die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta,....$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1,....$ sämmtlich grösser als Null sind, $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta....$ und $n=a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....$; so lässt sich auf folgende Art zeigen, dass die Producte

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.... \text{ und } a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....$$

identisch sein müssen.

Weil nach der Voraussetzung

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta....=a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....$$

und α grösser als Null ist, so ist $a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....$ durch a theilbar. Käme nun die von der Einheit verschiedene Primzahl a unter den von der Einheit verschiedenen, unter einander ungleichen Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ nicht vor, so wäre a mit jeder der Zahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, also nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch mit jeder der Potenzen $a_1^{\alpha_1}, b_1^{\beta_1}, c_1^{\gamma_1}, d_1^{\delta_1},......$, und folglich nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit dem Producte $a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....$ relative Primzahl, könnte folglich natürlich in diesem Producte nicht aufgehen, was gegen das Obige streitet. Also muss die Primzahl a unter den Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ vorkommen. Auf dieselbe Art muss aber überhaupt jede der Primzahlen $a, b, c, d,..$ unter den Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, und eben so umgekehrt jede der Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ unter den Primzahlen $a, b, c, d,....$ vorkommen, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die beiden Producte $abcd...$ und $a_1b_1c_1d_1...$ identisch sind. Also könnte eine Verschiedenheit der einander gleichen Producte

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.... \text{ und } a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}....,$$

in denen wir nun $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, $d=d_1$, u. s. w. zu setzen berechtigt sind, nur in einer Verschiedenheit der Exponenten α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1, u. s. w. begründet sein. Wäre aber z. B. $\alpha>\alpha_1$, so würde sich aus der Gleichung

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1} \ldots\ldots$$

die Gleichung

$$a^{\alpha-\alpha_1} b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots = b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1} \ldots\ldots,$$

wo $\alpha - \alpha_1 > 0$ ist, ergeben, und das Product $b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1} \ldots$ würde also durch a theilbar sein. Weil aber die von der Einheit verschiedene Primzahl a unter den von der Einheit verschiedenen Primzahlen $b, c, d, \ldots$ oder $b_1, c_1, d_1, \ldots$ nach dem Obigen nicht vorkommt, so ist a mit jeder der Zahlen $b_1, c_1, d_1, \ldots$, also nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch mit jeder der Potenzen $b_1^{\beta_1}$, $c_1^{\gamma_1}$, $d_1^{\delta_1}, \ldots$, und folglich nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit dem Producte $b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1} \ldots$ relative Primzahl, kann also in diesem Producte natürlich nicht aufgehen, was gegen das Obige streitet. Daher ist $\alpha = \alpha_1$, und ganz eben so $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$, u. s. w. Weil nun $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $d = d_1$, u. s. w. und $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$, u. s. w. ist, so sind die Producte

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots \text{ und } a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1} \ldots$$

identisch, und die Zerlegung der Zahl n in von der Einheit verschiedene Primfactoren ist folglich immer nur auf eine Art möglich, wie bewiesen werden sollte.

Fünfter Zusatz. Wenn die Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a}$ durch keine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, so giebt es auch keinen dieser Wurzelgrösse gleichen Bruch.

Wäre $\sqrt[n]{a} = \frac{x}{y}$, wo, wie anzunehmen offenbar verstattet ist, x und y relative Primzahlen sein sollen, und der Voraussetzung des Satzes gemäss y grösser als die Einheit angenommen wird, so wäre $a = \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, und folglich $\frac{x^n}{y} = ay^{n-1}$, also $\frac{x^n}{y}$ eine ganze Zahl. Weil aber x und y relative Primzahlen sind, so sind nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch x^n und y relative Primzahlen, und $\frac{x^n}{y}$ kann also, weil y grösser als die Einheit ist, offenbar keine ganze Zahl sein, was gegen das Vorhergehende streitet. Folglich kann unter den gemachten Voraussetzungen nicht $\sqrt[n]{a} = \frac{x}{y}$ sein, wie behauptet wurde.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn x und n relative Primzahlen sind, und p die Anzahl der Zahlen bezeichnet, welche kleiner als n und mit n relative Primzahlen sind, so ist $x^p - 1$ immer durch n theilbar oder ein Vielfaches von n.

Beweis. Auf dem Umfange eines Kreises ordne man n Punkte auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Art. Diese n

Punkte durchlaufe man mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Nun nehme man die n Punkte in der Ordnung, in welcher sie jetzt getroffen worden sind, und durchlaufe sie von Neuem mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. wieder auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Setzt man aber dieses Verfahren auf dieselbe Art weiter fort, so erhält man dadurch offenbar ganz dieselben Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit den Intervallen x, x^2, x^3, x^4,.... durchläuft. Da nun nach der Voraussetzung x, und nach §. 5. Zweiter Zusatz. also auch die sämmtlichen Potenzen von x mit n relative Primzahlen sind, so kann nach §. 3. Vierter Zusatz. die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man auf die obige Weise erhält, nicht grösser als p sein, und es muss folglich immer eine Ordnung der n Punkte wiederkehren. Die erste wiederkehrende Ordnung der n Punkte muss aber nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung derselben sein, weil offenbar ganz aus denselben Gründen, aus welchen eine spätere von der ersten ursprünglichen Ordnung verschiedene Ordnung wiedergekehrt sein sollte, schon früher die erste ursprüngliche Ordnung selbst wiedergekehrt sein müsste.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der auf die obige Weise erhaltenen verschiedenen Ordnungen der n Punkte durch p', so ist $p' \overline{\gtrless} p$. Wenn aber $p' < p$ ist, so lässt sich auf folgende Art leicht übersehen, dass p jederzeit ein Vielfaches von p' sein muss. Denken wir uns nämlich eine beliebige unter den auf die obige Weise erhaltenen sämmtlich unter einander verschiedenen p' Ordnungen der n Punkte nicht vorkommende Ordnung, so führt diese Ordnung, wenn man auf dieselbe das nämliche Verfahren wie vorher anwendet, natürlich auch auf p' sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen, welche aber nothwendig auch sämmtlich von den ersten unter einander verschiedenen p' Ordnungen verschieden sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, wie leicht erhellen wird, die ersten Ordnungen in den beiden Systemen nothwendig identisch sein müssten, was gegen die Voraussetzung streitet. Gäbe es nun noch eine weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommende Ordnung der n Punkte, so würde diese, wenn man sie dem obigen Verfahren unterwirft, auf dieselbe Weise wie vorher wieder zu p' weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommenden, unter einander verschiedenen Ordnungen führen. Setzt man diese Betrachtungen weiter fort und überlegt, dass nach §. 3. Vierter Zusatz. p die Anzahl aller überhaupt möglichen Ordnungen der n Punkte ist, so ist ersichtlich, dass p ein Vielfaches von p' sein muss, und daher $p = mp'$ gesetzt werden kann.

Weil nun nach dem Vorhergehenden, wenn man die n Punkte mit dem Intervalle $x^{p'}$ durchläuft, deren ursprüngliche Ordnung wieder herbeigeführt wird, so muss die Potenz $x^{p'}$ offenbar nothwendig einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich sein. Durch successive Multiplication oder auch mittelst

des Binomischen Lehrsatzes erhellet aber sogleich, dass dann auch jede Potenz von $x^{p'}$, und folglich auch $(x^{p'})^m = x^{mp'}$, d. h. nach dem Obigen x^p, einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich, oder, was dasselbe ist, $x^p - 1$ durch n theilbar oder ein Vielfaches von n ist, wie behauptet wurde.

§. 7.

Wenn n eine in x nicht aufgehende Primzahl ist, so sind x und n relative Primzahlen, und die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$$

sind offenbar alle Zahlen, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind. Da nun $n-1$ die Anzahl dieser Zahlen ist, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Lehrsatze unmittelbar der folgende Satz.

Zusatz. **Wenn n eine in x nicht aufgehende Primzahl ist, so ist $x^{n-1}-1$ jederzeit durch n theilbar.**

Ist z. B. $x=12$, $n=7$, so ist $12^6-1=2985983$ und $(12^6-1):7 = 426569$.

Dieser wichtige und merkwürdige Satz wird bekanntlich in der Zahlenlehre **Fermat's Satz** genannt.

§. 8.

Lehrsatz. **Wenn $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ die sämmtlichen Zahlen sind, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind, so ist immer die eine der beiden Grössen**

$$abcdefg \ldots \pm 1$$

durch n theilbar oder ein Vielfaches von n, wobei wir n grösser als die Einheit annehmen.

Beweis. Auf dem Umfange eines Kreises ordne man auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Art n Punkte, und durchlaufe dieselben mit dem Intervalle a, so werden, weil nach der Voraussetzung a und n relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Durchläuft man nun die n Punkte in der neuen Ordnung, in welcher sie jetzt getroffen worden sind, nach und nach mit jeder der Zahlen

$$a, b, c, d, e, f, g, \ldots$$

d. h. mit jeder Zahl, welche kleiner als n und zu n relative Primzahl ist, als Intervall, so erhält man, wenn p die Anzahl der obigen Zahlen bezeichnet, alle p verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche nach §. 3. Vierter Zusatz. jetzt überhaupt nur möglich sind. Ganz zu denselben Ordnungen muss man aber offenbar geführt werden, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag, \ldots\ldots$$

welche nach §. 4. sämmtlich zu n relative Primzahlen sind, durchläuft. Wenn man also die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag, \ldots\ldots$$

durchläuft, so erhält man nach dem Vorhergehenden p sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen der n Punkte; und da nun nach §. 3. Vierter Zusatz. überhaupt nur p verschiedene Ordnungen der n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung möglich sind, so muss unter den p verschiedenen Ordnungen, welche man erhält, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag, \ldots\ldots$$

durchläuft, jederzeit nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung der n Punkte selbst vorkommen. Also muss unter den obigen Producten immer eins vorkommen, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist. Wäre dieses Product aber das erste Glied der obigen Reihe, nämlich aa, und wäre also

$$aa = kn + 1,$$

so wäre

$$a(n-a) = an - aa = (a-k)n - 1,$$

und folglich das Product $a(n-a)$ einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich. $n-a$ ist offenbar kleiner als n, und kann nicht gleich a sein, weil, wenn $n-a=a$ wäre, $n=2a$ wäre, und daher n nur dann mit a relative Primzahl sein könnte, wenn $a=1$ wäre; dann wäre aber $n=2$, welchen Fall wir, weil in demselben die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes auf der Stelle erhellet, auszuschliessen berechtigt sind. Ferner fällt leicht in die Augen, dass $n-a$ jederzeit mit n relative Primzahl ist, weil, wenn $n-a=\lambda\mu$, $n=\lambda'\mu$, wo μ grösser als die Einheit sein soll, wäre, offenbar $a=(\lambda'-\lambda)\mu$, und daher a mit n nicht relative Primzahl sein würde. Hieraus sieht man, dass $n-a$ jederzeit in der Reihe der Zahlen $b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g, \ldots$ vorkommen muss, und es erhellet nun, dass sich die Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ immer so zu Producten mit zwei ungleichen Factoren unter einander verbinden lassen, dass jedes dieser Producte entweder einem um die Einheit vermehrten oder einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich ist. Leicht lässt sich endlich auch zeigen, dass unter diesen Producten nicht zwei von der Form ab und ac, wo $a,\ b,\ c$ unter einander ungleich sein sollen, vorkommen können. Sollte nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$ab = qn \pm 1,\ ac = q'n \pm 1$$

sein können, so wäre

$$a(b-c) = (q-q')n,$$

und folglich $a(b-c)$, also nach §. 5. Dritter Zusatz., weil nach der

Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, $b-c$ durch n theilbar, was ungereimt ist, da unter den gemachten Voraussetzungen das nicht verschwindende $b-c$ offenbar kleiner als das die Einheit übersteigende n ist. Sollte aber

$$ab = qn + 1, \quad ac = q'n - 1$$

sein können, so wäre, wie aus dem Obigen sich unmittelbar ergiebt, $a + c = n$, also $c = n - a$, und folglich

$$ab = qn + 1, \quad a(n-a) = q'n - 1,$$

also, wenn man addirt:

$$a(n-a+b) = a(n-(a-b)) = (q+q')n.$$

Daher wäre $a(n-(a-b))$, und folglich nach §. 5. Dritter Zusatz., weil nach der Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, $n-(a-b)$, also auch $a-b$ durch n theilbar, was ganz aus denselben Gründen, wie vorher bei $b-c$ ungereimt ist.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass man jederzeit das Product $abcdefg\ldots.$ auf eine solche Weise in lauter Producte mit zwei Factoren zerlegen kann, dass jedes dieser Producte mit zwei Factoren, durch deren Multiplication in einander das Product $abcdefg\ldots.$ entsteht, entweder ein um die Einheit vermehrtes oder ein um die Einheit vermindertes Vielfaches von n ist, woraus ferner durch successive Multiplication auf der Stelle folgt, dass immer das Product $abcdefg\ldots.$ selbst entweder ein um die Einheit vermehrtes oder ein um die Einheit vermindertes Vielfaches von n ist, oder dass immer eine der beiden Grössen

$$abcdefg\ldots. \pm 1$$

durch n theilbar sein muss, wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Wenn n eine Primzahl ist, so sind

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$$

die sämmtlichen Zahlen, welche kleiner als n und mit n relative Primzahlen sind. Kommt nun unter den Producten mit zwei Factoren, in welche sich auf die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Art das Product

$$1.2.3.4.5\ldots.(n-1)$$

zerlegen lässt, das Product

$$x(n-x) = qn - 1$$

vor, so ist

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = (x-q)n,$$

und es muss also die in dem Producte $(x-1)(x+1)$ aufgehende Primzahl n entweder in $x-1$ oder in $x+1$ aufgehen. Geht aber n in $x-1$ auf, und ist also $x-1=q'n$, so ist

$$x=q'n+1.$$

Wäre nun $q'>0$, so wäre $x>n$, was gegen die Voraussetzung ist, und es ist folglich $q'=0$, also $x=1$. Geht ferner n in $x+1$ auf, und ist also $x+1=q''n$, so ist

$$x=n-1+(q''-1)n.$$

Wäre nun $q''>1$, so wäre $x>n-1$, was gegen die Voraussetzung ist, und es muss folglich, weil in diesem Falle offenbar q'' nicht verschwinden kann, $q''=1$, also $x=n-1$ sein. Folglich ist entweder $x=1$ oder $x=n-1$. Für $x=1$ ist

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

und für $x=n-1$ ist auch

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

so dass also immer

$$x(n-x)=1.(n-1)$$

ist. Nimmt man hierzu, dass offenbar, wenn $n-k$ irgend ein Glied der Reihe $2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$ bezeichnet, niemals

$$1.(n-k)=q'''n+1$$

sein kann, und dass sich also 1 mit keiner der Zahlen 2, 3, 4, 5,...., $n-1$ zu einem Producte verbinden lässt, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, so wird leicht erhellen, dass unter den Producten mit zwei Factoren, in welche sich auf die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Art das Product $1.2.3.4\ldots.(n-1)$ zerlegen lässt, immer das Product $1.(n-1)=1.n-1$ vorkommen muss, dass aber jedes andere dieser Producte einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, woraus sich ferner mittelst successiver Multiplication sogleich ergiebt, dass das Product $1.2.3.4.5\ldots.(n-1)$ immer einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich, oder dass jederzeit die Grösse

$$1.2.3.4.5\ldots.(n-1)+1$$

durch n theilbar ist, welches uns zu dem folgenden Satze führt:

Wenn n eine Primzahl ist, so ist die Grösse

$$1.2.3.4.5\ldots.(n-1)+1$$

jederzeit durch n theilbar.

Dieser wichtige und merkwürdige Satz wird in der Zahlenlehre bekanntlich Wilsons Satz genannt.

XVIII.

Die Epochen der Geschichte der Menschheit; eine historisch-philosophische Skizze

von

Dr. E. F. Apelt,

ausserordentlichem Professor zu Jena.

Erster Band. Jena. Hochhausen 1845 *).

Die Leser des Archives werden sich vielleicht wundern, hier die Anzeige eines Werkes zu finden, das dem Titel nach nicht unter diejenigen zu gehören scheint, welche in demselben besprochen zu werden pflegen. Gleichwohl ist dasselbe der Mathematik und Physik sehr nahe verwandt, in so fern es das Verhältniss betrachtet, in welchem die genannten Wissenschaften zu dem Ganzen unserer wissenschaftlichen Erkenntniss überhaupt stehen und den im Verlaufe der Geschichte hervortretenden Einfluss schildert, welchen die fortschreitende Ausbildung der Naturwissenschaften (im weitesten Sinne) auf die geistige Cultur ausgeübt hat und noch ausübt. Am meisten macht sich dieser Einfluss da geltend, wo wir es mit geschichtlichen Ueberlieferungen zu thun haben, die nach unserer jetzigen Kenntniss der Naturgesetze viel von ihrer sonstigen Glaubwürdigkeit verlieren müssen. Seit die Naturwissenschaften aufkamen, haben die Wunder aufgehört und die Weissagungen sind verstummt; der teleskopische Blick hat das scheinbare Dach des Himmels durchbrochen, hinter welchem sonst der fromme Glaube die Wohnung der unsterblichen Geister suchte, jenes Firmament der Alten, das man als die gemeinschaftliche Gränze der sichtbaren Körperwelt und der unsichtbaren Geister-

---

*) Schon aus Archiv. Thl. I. Nr. XII. und Nr. XXXIV. ist bekannt und ersichtlich, dass auch ausführlichere Anzeigen wissenschaftlicher, in das Gebiet des Archivs einschlagender Werke in diese Zeitschrift selbst, nicht bloss in den Literarischen Bericht, aufgenommen werden sollen. Obgleich nun vorliegende Anzeige von ihrem unterzeichneten Herrn Vf. mir für den Literarischen Bericht zugesandt war, so habe ich es, des interessanten Inhalts derselben wegen, doch vorgezogen, sie dem Archive selbst einzuverleiben. G.

welt zu betrachten gewohnt war; die grossen astronomischen und geologischen Perioden, welche man durch das Studium der Natur kennen gelernt hat, haben den harmlosen Erzählungen der Väter von den vergangenen und künftigen Zeiten Anfang und Ende geraubt; die Naturgesetze endlich haben den vertraulichen Umgang aufgehoben, in welchem, jenen Sagen zufolge, das Menschengeschlecht mit höheren Wesen stand *).

Aber nicht nur die geschichtlichen Ueberlieferungen, selbst die eigenen religiösen Ueberzeugungen und ewigen Hoffnungen scheint der Naturalismus der Physik zu bedrohen. Was soll uns ein Gott bei einer Welt, die den Gesetzen der Mechanik gehorcht? Diese Gesetze sind selbstständig, werden mathematisch erkannt und erleiden eben desswegen keine Ausnahme; die Gottheit bliebe nur ein müssiger Zuschauer, der den Gang der Bewegungen in keiner Weise willkührlich ändern kann. Was soll uns die Freiheit da, wo es nur die eiserne Nothwendigkeit des Naturgesetzes giebt, wo selbst das Leben in der organischen Welt, dieses grösste aller physikalischen Räthsel, nach und nach unter die Herrschaft eben der Kräfte geräth, welche den Krystall formen und den Gestirnen des Himmels ihre Bahnen zeichnen? Wo endlich soll das Jenseits sein, auf das wir hoffen, da der Raum mit der ganzen Gesetzmässigkeit der Geometrie sich ins Unendliche hinauserstreckt und keine Gränze gedacht werden kann, die das Diesseits von dem Jenseits trennte?

Diess sind die Fragen, welche als letzte Consequenzen der Mathematik und Physik sich uns aufdrängen und mit deren historisch-philosophischer Entwickelung sich der Verfasser des oben genannten Werkes beschäftigt. Zuvörderst giebt er uns eine Uebersicht der Culturgeschichte im Allgemeinen, ein Bild, dessen schönste Partie die Zeichnung der griechischen Weltansicht ausmacht, in welcher noch physikalische und religiöse Ideen in friedlicher Vereinigung ein ästhetisches Ganzes bilden. Der Blick der Griechen reichte nur über das Mittelmeer und Vorderasien und verlor sich ringsum im Unbegränzten. Die menschliche Einbildungskraft ist von selbst geschäftig, den leeren Raum auszufüllen und das lückenhafte Bild zu ergänzen. Dichterische und religiöse Phantasieen des Volks, philisophische Ansichten der Denker und geologische Muthmassungen vereinigten sich, den fehlenden Stoff herbeizuschaffen, dem die Einbildungskraft leicht eine passende und ästhetische Form verleihen konnte. Aber schon die ersten geographischen Entdeckungen änderten dieses Bild. Soweit auch der Blick des Menschen vorwärts gedrungen war, überall fand er die Erde vom Meere umflossen, und so konnte leicht der Gedanke entstehen, dass ausser der bekannten Zone noch andere Länder-

---

*) M. s. „Anti-Orion zum Nutzen und Frommen des Herrn von Schaden" von dem nämlichen Verf. Diese Brochüre ist gerichtet gegen: Antwort auf den Angriff eines Herrn E. Apelt in der neuen Jenaischen Literaturzeitung von Dr. v. Schaden (Privatdozenten an der Universität zu Erlangen); dieser „Angriff" ist nämlich eine höchst originelle Recension des Orion des Herrn v. Schaden, welche auch in der „Antwort" des letzteren abgedruckt ist. Ref. erinnert sich nicht, etwas Ergötzlicheres gelesen zu haben, als Herrn v. Schadens mystisch-astronomische Träume und die Polemik gegen seinen Recensenten.

massen jenseits des Oceans vorhanden wären. Unbemerkt schmolzen die geographischen Vorstellungen von dem Vorhandensein anderer bewohnbarer Zonen mit der religiösen Idee einer anderen Welt zusammen und zogen sich in den ätherischen Duft dichterischer Phantasieen zurück. Der Garten der Hesperiden, das Elysium, die glückseligen Inseln, das Paradies der Christen sind geographische Phantasiegebilde, welche aus religiösen Ideen entstanden und hier bestimmter, dort unbestimmter an eine gewisse Oertlichkeit gebunden waren.

Die grossen geographischen Entdeckungen, namentlich die Erdumsegelungen, haben diese Phantasiegebilde zerstört; die Dichtung wurde von der Anschauung verdrängt, die mythische Kosmographie verwandelte sich in physische Geographie. Die letzte Folge hiervon war die Flucht der guten Geister von der Erde. Die seligen Gefilde, die schon anfangs über den Ocean zurückgewichen waren, erhoben sich von der Erde zu den Wolkensitzen und flüchteten unter die Sterne.

Aber auch von da sind sie vertrieben worden. Die Gesetze Kepplers, des Ersten, der die Natur richtig zu befragen versteht und dem sie antwortet, zerbrechen die krystallenen Sphären der Alten und rauben den Planeten ihre Führer; Newton zeigt, dass die Kraft, welche in den Tiefen der himmlischen Räume waltet und die Planeten in ihren Bahnen führt, keine andere ist, als die Schwere an unserer Erde. Die Geheimnisse schwinden aus der Sternenwelt, die fortschreitende Theorie greift sogar in einigen Fällen der Beobachtung vor und Laplace krönt das ruhmwürdig begonnene Werk mit der Mechanik des Himmels. So zerstörte die Astronomie sogar im Bau des Himmels den architektonischen Zauber und das Land der Verheissung schwand aus den Räumen des Aethers. Wohin auch das Fernrohr den Blick des Menschen trug, überall folgte ihm die Nothwendigkeit des Calcüls, Raum verweigernd einer ätherischen Welt. Die Mechanik des Himmels hat des Aristoteles Lichtwelt der Gestirne, den Himmel unserer Väter zertrümmert und uns dafür ein Weltgebäude massenhafter schwerer Körper geschenkt. Die schützenden Engel des Menschengeschlechts, alle Genien und gütigen Feen verliessen dessen Gesellschaft und wanderten in das Land der Sage oder der Dichtung.

Diess ist eine ungefähre Skizze der vier ersten Kapitel des Buches, bei der sich Ref. zum Theil der Worte des Verf. bedient hat. Im fünften Kapitel (II. 4.) giebt er uns eine historische Darstellung der verschiedenen Stufen religiöser Ausbildung im Völkerleben und ihres Verhältnisses zur Philosophie und Naturwissenschaft. Eine sehr schätzenswerthe Zugabe bildet der Anhang, welcher drei bemerkenswerthe Aufsätze enthält: I. Erläuterungen über die Epicykeltheorie und das Verhältniss der drei Weltsysteme; II. Kepplers Mysterium cosmographicum und III. Kepplers Induktion zur Entdeckung der wahren Gestalt der Planetenbahnen. In diesem Anhange zeigt sich der Verf. als guter Kenner der Mathematik, was um so bemerkenswerther ist, als sich die Philosophie ungefähr seit dem Anfange dieses Jahrhunderts der Mathematik zu schämen scheint und namentlich die sogenannten Philosophen mancher Schulen auf unsere Wissenschaft mit einer Geringschätzung herabblicken, wie sie nur aus grober Igno-

ranz darin entstehen kann. Jener Anhang hat das Verdienst, eine zwar gedrängte, aber vollständige Uebersicht über die Arbeiten Kepplers zu geben, wovon man selbst in den grösseren astronomischen Lehrbüchern kaum mehr als eine Notiz findet. Hierbei hat der Vf. Keppler mit Recht gegen Laplace und Delambre in Schutz genommen, die ihn wie einen Schüler Newton's beurtheilen und seine Spekulationen über die Kosmophysik und die Weltharmonie für blosse Träumereien halten, welche müssig neben seinen astronomischen Forschungen einhergehen und dieselben öfter beeinträchtigt haben; in der That sind sie aber die Quelle seiner grossen Entdeckungen, indem gerade die mystische Naturansicht die Erfindungskraft Kepplers leitete. Den eigenthümlichen Gedankengang desselben theilt uns der Verf. in der heutigen Sprache der Mathematik mit.

Diese Anzeige möge hinreichen, um die Mathematiker und Physiker auf ein Werk aufmerksam zu machen, das sie des bescheidenen Titels wegen leicht übersehen könnten. Der zweite Band, welcher u. A. die historische Entwickelung der Entscheidung jenes Streites zwischen dem Naturalismus der Physik und den religiösen Ideen enthalten wird, soll, wie es heisst, dem ersten rasch nachfolgen. Möge derselbe ein seinem Inhalte nach eben so gediegenes und seiner Form nach eben so ansprechendes Ganzes bilden, wie der erste.

Jena. Schlömilch.

XXI.

Auflösung des Keplerschen Problems nach Newton, verglichen mit der jetzt noch gebräuchlichen numerischen Auflösung.

Von dem
Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,
astronomischen Rechner an der K. Sternwarte zu Berlin.

Jeder, welcher sich auch nur mit den ersten Theilen der theorischen Astronomie beschäftigt hat, kennt das Problem, wovon hier die Rede sein soll. Die Gleichungen, welche zwischen den einzelnen Grössen stattfinden, werden in der neuern Zeit gewöhn-

lich auf dem kürzern analytischen Wege hergeleitet und auf demselben gelangt man zu den verschiedenen indirecten Auflösungen, da eine directe, der Natur der Sache nach, nicht möglich ist. Wenn so auch die analytische Darstellung vollkommen genügt, um die in der theorischen Astronomie vorkommenden Aufgaben zu lösen, so glaube ich doch, dass es für manchen Leser, welcher Newtons Principia mathematica philosophiae naturalis nicht kennt, interessant und vielleicht auch lehrreich sein wird, die synthetische Weise kennen zu lernen, auf welche Newton zu denselben Resultaten gelangt ist, die noch heute gelten. Ich werde daher hier einige Sätze aus Abschnitt VI. des ersten Buches jenes Werkes mittheilen und die Resultate mit den Ausdrücken von Gauss in der Theoria motus corporum coelestium vergleichen.

Zuerst zeigt Newton in einem Lehnsatze durch Raisonnement, dass keine elliptische Figur existire, deren, durch beliebige gerade Linien abgeschnittener Flächenraum allgemein mittelst Gleichungen dargestellt werden könne, welche in der Zahl ihrer Glieder und Dimensionen begrenzt sind. Er schneidet daher den, der Zeit proportionalen Theil der Fläche einer Ellipse mittelst einer geometrisch irrationalen Curve ab, und zwar folgendermassen.

§. 1.

Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse, man soll seinen, einer gegebenen Zeit entsprechenden Ort in derselben finden.

Auflösung. In der Ellipse APB (Taf. II. Fig. 3.) sei A der Hauptscheitelpunkt, S der Brennpunkt, O das Centrum und P der zu findende Ort des Körpers. Man verlängere OA über A hinaus bis G, so dass

$$OG:OA = OA:OS$$

wird, und errichte hierauf GH perpendikulär auf AG. Hierauf beschreibe man aus O als Mittelpunkt und mit dem Radius OG den Kreis EFG, lasse den letztern auf der geraden Linie GH als Basis fortrollen, so dass der Punkt A die gestreckte Cycloide ALJ beschreibt. Ist diess geschehen, so nehme man die Linie GK in dem Verhältniss zur Peripherie GFE des Kreises an, in welchem die Zeit, worin der Körper den elliptischen Bogen AP zurücklegt, zur ganzen Umlaufszeit in der Ellipse steht. Errichtet man nun auf GH das Perpendikel KL, welches die Cycloide in L schneidet, und zieht

$$LP \text{ parallel } GK;$$

so ist der Durchschnittspunkt P der erstern mit der Ellipse der verlangte Punkt.

Man beschreibe nämlich aus O als Mittelpunkt mit dem Radius OA den Kreis AQB, so dass dieser und LP sich in Q schneiden, und ziehe die Linien SQ und OQ, endlich fälle man von S auf die Richtung der letzteren das Perpendikel SR. Der elliptische Sector ASP ist alsdann proportional dem Kreissector ASQ. Ver-

längert man nämlich QP bis zum Durchschnittspunkt W mit AB und setzt die halbe grosse Axe der Ellipse $=a$, die halbe kleine $=b$; so ist

$$ASP + SPW : ASQ + SQW = b:a,$$
$$SPW : SQW = PW : QW = b:a,$$

$$\text{also } ASP : ASQ = b:a \text{ oder } ASP = \frac{b}{a} . ASQ.$$

Es ist aber

$$ASQ = OQA - OQS = \tfrac{1}{2}OQ . QA - \tfrac{1}{2}OQ . RS,$$

mithin, da $\frac{1}{2}OQ$ gegeben und constant $= \frac{1}{2}a$ ist, der Flächeninhalt von APS proportional dem Unterschiede

$$QA - RS.$$

Nun ist aber $RS : \sin AQ = OS : OQ$
$$= OS : OA$$
$$= OA : OG$$
$$= AQ : GF;$$

also

$$AQ - RS : GF - \sin AQ = AQ : GF = OS : OA$$

und

$$AQ - RS = \frac{OS}{OA}(GF - \sin AQ).$$

Der Flächeninhalt des Sectors ASP ist demnach proportional dem Unterschiede $GF - \sin AQ$, d. h., nach der Gleichung der Cycloide, der Linie GK.

§. 2.

Zusatz. In der Darstellung des vorigen Paragraphen kann man dieselbe Gleichung wiederfinden, welche in der Theoria motus zwischen der excentrischen und mittlern Anomalie aufgestellt ist. Setzt man nämlich wie dort $OA = a$ und ausserdem $OS = a.e$, W. $QOA = E$; so wird aus der Proportion $OG : OA = OA : OS$

$$OG = \frac{a}{e}.$$

Ferner wird

$$GF = OG . E = \frac{a}{e} . E, \sin AQ = a \sin E;$$

also der Sector ASP proportional

$$a(E - e \sin E).$$

Dieser Sector ist aber der Zeit proportional, welche der Körper gebraucht hat, um vom Perihel A bis zum Punkt P zu gelangen; folglich ist auch diese Zeit proportional

$$E - e \sin E.$$

Dass man aus der vorliegenden Figur auch alle die Relationen herleiten könne, welche in der Theoria motus. pag. 8. zusammengestellt sind, ersieht man leicht folgendermassen. Fügt man zu den bereits eingeführten Bezeichnungen noch hinzu:

$$e = \sin\varphi,\; a^2 . e^2 = a^2 - b^2 \text{ oder } b^2 = a^2 - a^2 e^2$$
$$\text{d. h. } b = a\cos\varphi,$$
$$SP = r \text{ und W. } ASP = v;$$

so wird

$$SW = -r\cos v = SO + OW = ae - a\cos E,$$

also

$$r\cos v = a(\cos E - e), \text{ wie Nr. IX. a. a. O.}$$

Ferner

$$PW = r\sin v = \frac{b}{a} QW = a\cos\varphi\sin E, \text{ wie Nr. VIII.}$$

$$SP^2 = r^2 = SW^2 + PW^2$$
$$= a^2(\cos E^2 + \sin\varphi^2 - 2e\cos E + \cos\varphi^2 \sin E^2)$$
$$\text{oder } r = a(1 - e\cos E), \text{ wie Nr. III. u. s. w.}$$

Wegen der Uebereinstimmung der vorstehenden Gleichungen mit denen in der Theoria motus, muss also auch die dortige Gleichung zwischen der mittlern und excentrischen Anomalie

$$M = E - e\sin E$$

hier stattfinden. Da ferner nach §. 1.

$$ASQ = \tfrac{1}{2} OQ . (QA - RS) = \tfrac{1}{2} a^2 (E - e\sin E)$$

und

$$ASP = \frac{b}{a} ASQ = \tfrac{1}{2} a^2 \cos\varphi (E - e\sin E);$$

so wird auch

$$ASP = \tfrac{1}{2} a^2 \cos\varphi . \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ (Theor. mot. pag. 6.)}$$
$$= \tfrac{1}{2} kt\sqrt{p} . \sqrt{1+\mu} = \tfrac{1}{2} \int rr dv.$$

ASP ist also der, in der Zeit t beschriebene Sector.

§. 3.

Anmerkung. Wegen der schwierigen Construction dieser Curve (der Cycloide) ist in der Praxis zweckmässiger eine

Construction anzuwenden, welche der Wahrheit sehr nahe kommt.

Man suche einen bestimmten Winkel B, welcher sich zu dem Winkel $57^0,29578 = 206264'',808$, den ein dem Radius gleicher Bogen unterspannt, verhält, wie die Entfernung SH (Taf. II. Fig. 4.) beider Brennpunkte von einander zur grossen Axe AB. Ferner suche man eine Linie L, welche sich zum Radius verhält, wie AB zu SH. Hat man beide einmal gefunden, so löst man die Aufgabe durch folgende Analyse.

Nach irgend einer Methode oder Conjectur bestimme man den Ort P ziemlich nahe und fälle von ihm auf die grosse Axe das Perpendikel PR, so erhält man die entsprechende Ordinate QR des um die Ellipse beschriebenen Kreises AQB aus dem Verhältniss beider Axen der Ellipse, und es ist alsdann

$$QR = AC.\sin ACQ.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Winkel ACQ, welchen man nur nahebei durch Rechnung zu bestimmen braucht. Man kennt ferner auch den der Zeit proportionalen Winkel, welcher sich nämlich zu 360^0 verhält, wie die zur Beschreibung des Bogens AP erforderliche Zeit zur ganzen Umlaufszeit. Dieser Winkel sei $= N$. Hierauf bestimme man die Winkel D, E, F, G, H, J, etc. aus den Proportionen:

$$D : B = \sin ACQ : \text{Radius};$$

$$E : N - ACQ + D = L : L \mp \cos ACQ, \ \mp \text{ jenachdem } ACQ \lessgtr 90^0;$$

$$F : B = \sin(ACQ + E) : \text{Radius};$$

$$G : N - ACQ - E + F = L : L \mp \cos(ACQ + E),$$
$$\mp \text{ jenachdem } ACQ + E \lessgtr 90^0;$$

$$H : B = \sin(ACQ + E + G) : \text{Radius};$$

$$J : N - ACQ - E - G + H = L : L \mp \cos(ACQ + E + G),$$
$$\mp \text{ jenachdem } ACQ + E + G \lessgtr 90^0;$$

u. s. w. f.

Man kann auf diese Weise beliebig fortfahren, und nimmt man zuletzt den Winkel

$$ACq = ACQ + E + G + J + \text{etc.},$$

so ergibt sich aus seinem Cosinus $= Cr$ und der Ordinate pr, welche letztere aus der Proportion

$$pr : \sin ACq = b : a$$

bekannt wird, der verbesserte Ort p des Körpers.

Wird in einem einzelnen Falle der Winkel

$$N - ACQ + D$$

negativ, so muss bei E überall das Zeichen $+$ in $-$ und umgekehrt

— in + verwandelt werden. Dasselbe gilt von den Zeichen der Winkel G und J, wenn respective

$$N-ACQ-E+F \text{ und } N-ACQ-E-G+H$$

negativ werden.

Die unendliche Reihe

$$ACQ+E+G+J+\text{etc.}$$

convergirt übrigens sehr schnell, so dass man kaum jemals über das zweite Glied E hinaus zu gehen nöthig haben wird. Die Rechnung gründet sich auf den Satz, dass der Flächenraum ASP sich verhält, wie der Unterschied zwischen dem Bogen AQ und dem Perpendikel von S auf CQ.

§. 4.

Zusatz. In dem Verfahren, welches Newton nach dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellt hat, ist vollständig dasjenige enthalten, welches man in der Regel gegenwärtig bei numerischen Rechnungen anzuwenden pflegt. Dasselbe ist im Berliner astronomischen Jahrbuch von 1838. pag. 281. dargestellt und daselbst zugleich gezeigt worden, dass es mit dem in der Theoria motus. pag. 11. mitgetheilten identisch ist. Von der Uebereinstimmung des erstern Verfahrens mit dem im vorigen Paragraphen enthaltenen überzeugt man sich leicht folgendermassen Setzt man der früher eingeführten Bezeichnung gemäss:

$$B=\frac{SH}{AB}\omega=e\omega=e'', \text{ wo } \omega=206264'',8;$$

$$N=M,$$

$$ACQ=E',$$

$$L=\frac{AB}{SH}=\frac{1}{e},$$

$$E=\Delta E;$$

so wird

$$D=e''\sin E;$$

$$\Delta E=\frac{\frac{1}{e}(M-E'+e''\sin E')}{\frac{1}{e}\mp\cos E'}=\frac{M-E'+e''\sin E'}{1\mp e\cos E'},$$

$$\mp \text{ jenachdem } E'\lessgtr 90^\circ.$$

Wir haben bereits oben die Gleichung

$$\frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}=M=E-e\sin E$$

betrachtet. Da nun der Flächenraum ASP proportional der Zeit t, also nach dieser Gleichung

$$E - e \sin E$$

ist; so folgt, weil $AQ = a.E$ und das Perpendikel von S auf CQ oder

$$SV = SC.\sin SCQ = ae \sin E,$$

also

$$AQ - SV = a(E - e \sin E),$$

dass auch ASP proportional dem Unterschiede

$$AQ - SV$$

sein wird.

XX.

Welche Lage muss man einem Stahlstabe geben, damit er das Maximum der magnetisirenden Wirkung eines kreisförmigen electrischen Stromes erfahre?

Von dem
Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

---

§. 1.

Zu der Beantwortung dieser Frage wurde ich geführt, als ich das in Pogg. Ann. LXII. S. 249. beschriebene Verfahren zur Magnetisirung einiger Stahlstäbe anwandte. Es fiel mir dabei nämlich eine Stelle im Repert. der Physik von Dove und Moser ein (I. S. 263.), wo ein von Barlow beschriebener Versuch als fast fabelhaft klingend bezeichnet wird. Jene Stelle heisst: „So kräftig ist die Wirkung einer Spirale, dass, wenn eine kleine Magnetnadel (or bar) in sie so hineingelegt wird, dass sie auf dem untern Theile der Windungen ruht, diese Nadel im Momente der Verbindung der Spirale mit der galvanischen Kette aufspringt, und in der Axe der Spirale den Gesetzen der Schwere entgegen schwe-

bend bleibt. Diese Erscheinung zeigt sich selbst bei senkrechter Stellung der Spirale, und man sieht auf diese Weise einen schweren Körper ohne materiellen Zusammenhang mit andern Körpern gehalten durch eine unsichtbare Kraft wie die fabelhafte Statue des Dinochares."

Ich wiederholte nun diesen Versuch mit meinem Magnetisircylinder, einer Spirale aus 30 Fuss Kupferdraht, welcher auf einen hohlen hölzernen Cylinder von 1 Zoll Höhe, 1¼ Zoll innerem Durchmesser und geringer Wanddicke gewickelt war, und den Strom eines Platin-Zink-Elements leitete, und fand die Beschreibung allerdings mindestens ungenau. Eisenstäbchen wie Magnetnadeln blieben ruhig auf dem untersten Theile der Windungen liegen, wenn die Axe der Spirale horizontal lag. Hielt ich ein Eisenstäbchen mit dem einen Ende an die innere Wand des Cylinders, so wurde es im Momente der Schliessung der Kette lebhaft nach innen gezogen, so dass es zu beiden Seiten gleich weit aus dem Cylinder hervorragte, blieb aber wiederum auf dem untersten Theile der inneren Wand liegen. Als ich die Axe des Cylinders vertikal stellte, schwebte der Stab in dem Cylinder in vertikaler Lage, aber immer sich an die Seitenwand anlegend, und jeder Versuch, denselben in der Axe des Cylinders frei schwebend zu erhalten, war vergeblich, eben so vergeblich, als wenn Jemand versuchen wollte, einem Magneten seinen Anker gerade in der Entfernung darzubieten, in welcher die anziehende Kraft des Magneten und die Schwere des Ankers im Gleichgewicht sind, so dass der Anker frei in der Luft schwebte.

Diese Versuche nun, sowie der Umstand, dass die Dicke einiger von den zu magnetisirenden Stäben bedeutend geringer war als die innere Weite des Cylinders führten mich zu der obigen Frage, deren Beantwortung für die vortheilhafteste Benutzung solcher Spiralen zum Magnetisiren nicht unwichtig ist. Da ich weder in Poggendorffs Annalen, noch in Gehlers Wörterbuche, noch in den Lehrbüchern der Physik Auskunft fand, so versuchte ich selbst die Beantwortung, und theile diesen Versuch hier mit.

§. 2.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir uns auf den Fall beschränken, wo der Stab mit der Axe des Cylinders parallel ist, so wie dass wir statt des spiralförmigen Drahtes uns die Peripherie eines Kreises als Leiter des electrischen Stromes vorstellen.

Als bewiesen wird vorausgesetzt:

1) Ein geradliniger electrischer Strom wirkt vertheilend auf ein ausserhalb liegendes magnetisches Theilchen in einer Richtung, welche auf der durch dies Theilchen und den Leitungsdraht gelegten Ebene senkrecht ist.

2) Denkt man sich mit dem Strome schwimmend und das magnetische Theilchen anblickend, so wird in der bezeichneten Richtung der Nordpol links, der Südpol rechts bewegt.

3) Die Wirkung eines jeden Elementes des Stromleiters ist der Länge dieses Elementes direct, und dem Quadrate des Abstandes dieses Elementes vom magnetischen Theilchen um-

gekehrt proportional, ausserdem aber noch direct proportional dem Sinus des Winkels, welchen die Verbindungslinie jenes Elementes und des magnetischen Theilchens mit der Stromesrichtung bildet.

4) Bei einem krummen Leitungsdrahte wird als Richtung jedes Elementes die entsprechende Tangente genommen.

Nun sei (Taf. II. Fig. 5.) A der Mittelpunkt des Kreises, dessen Peripherie den Strom leitet, B der Punkt seiner Ebene, in welchem dieselbe von dem Stabe durchstochen wird. Das Element D des Kreises wirke auf den Punkt F des Stabes vertheilend. Durch F und die Tangente ED lege man eine Ebene, und auf dieser sei FG senkrecht, so wird das nordmagnetische Element des Punktes F von F nach G bewegt, wenn der Strom von C nach D geht, wie die Pfeile andeuten, und die Bewegung in dem obern Theile des Kreises von hinten nach vorn geschieht. Es messe FG die Intensität dieser Zerlegung, und GH sei senkrecht auf BF, dann misst FH die Intensität, mit welcher das Element bei D den Magnetismus in F in der Richtung der Länge des Stabes zerlegt.

Bezeichnet man nun den Radius des Kreises mit r, AB mit r', und den zum Winkel DAC gehörenden Bogen des Normalkreises mit φ, endlich mit c eine constante Grösse, welche von der Intensität des Stromes abhängt, so ist

$$FG = \frac{c \,.\, r d\varphi \,.\, \sin FDE}{DF^2},$$

und weil $FH = FG \,.\, \cos GFH$ ist,

$$FH = \frac{c \,.\, r d\varphi \,.\, \sin FDE \,.\, \cos GFH}{DF^2}.$$

Vermindern wir den Abstand BF, so wächst $\sin FDE$ und $\cos GFH$, während DF^2 kleiner wird; also wirkt Alles zusammen, um den Werth von FH wachsen zu lassen. Es ist klar, dass von allen Punkten des Stabes der Punkt B das Maximum der Wirkung erfährt. Nun zieht man aber in der Praxis den Stab in dem Cylinder hin und zurück, so dass abwechselnd das eine und das andere Ende des Stabes in den Punkt B kommt, mithin jeder Theil des Stabes die Wirkung erfährt, die in B ausgeübt wird, und dann die hier hervorgebrachte Vertheilung nach Maassgabe seiner Coercitivkraft beibehält; also haben wir nur nöthig, die Wirkung des kreisförmigen Stromes auf ein in seiner Ebene in B befindliches magnetisches Theilchen aufzusuchen, und dann zu bestimmen, welche Lage der Punkt B in der Ebene des Kreises haben muss, damit die Wirkung ein Maximum sei.

Das Element bei D wirkt auf B mit der Kraft

$$dW = \frac{c r d\varphi \,.\, \sin BDE}{DB^2} = \frac{c r d\varphi \,.\, \cos BDA}{DB^2},$$

denn die frühere Ebene FDE ist jetzt die Ebene des Kreises, und das Loth FG fällt in die Richtung BF, mithin ist $\cos GFH = 1$.

Nun ist

$$\cos BDA = \frac{AD - AB.\cos DAB}{DB} = \frac{r - r'\cos\varphi}{DB},$$

und

$$DB = \{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$1)\quad dW = \frac{crd\varphi\,(r - r'\cos\varphi)}{\{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird dieser Ausdruck integrirt und das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen, so erhält man die gesammte Wirkung des Kreisstromes auf den Punkt B, und kann nun die Veränderungen aufsuchen, welche mit diesem Werthe vorgehen, wenn man die Lage des Punktes B in der Ebene des Kreises, also r', sich verändern lässt.

Es ist gut, gleich von vorne herein auch den Fall ins Auge zu fassen, dass $r' > r$ wird, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreises, aber doch in seiner Ebene, etwa in B' (Taf. II. Fig. 6.), liegt. Man ziehe von B' die Tangenten $B'M$, $B'L$ an den Kreis, und verlängere $B'A$ bis zur Peripherie in P; dann wirken die Theile MCL und LPM in entgegengesetztem Sinne auf das magnetische Theilchen in B', und zwar ist die von LPM bewirkte Vertheilung des Magnetismus gleichartig mit der von dem Kreisstrome bei dem innerhalb des Kreises liegenden Punkte B bewirkten Vertheilung, die von dem Bogen MCL ausgeübte ist die entgegengesetzte. Ueberwiegt die letztere, so kehrt sich in dem Punkte B' der Südpol dem Beschauer zu, während in B der Nordpol der zugewandte Pol ist. Da in L und M die Tangenten mit den Verbindungslinien $B'L$, $B'M$ zusammenfallen, so ist die von diesen Punkten auf B' ausgeübte Wirkung Null.

Unser Differential (1) wird nun für alle Punkte auf MCL negativ, weil $r - r'\cos\varphi$ negativ wird, dagegen für alle Punkte auf LPM positiv, in L und M dagegen, wo $\varphi = \text{arc}(\cos = \frac{r}{r'})$, wird dasselbe Null. Die Integration zwischen den Gränzen 0 und 2π liefert uns die algebraische Summe der Wirkungen, mithin die resultirende Wirkung der Grösse und Richtung nach. Es ist nämlich die Wirkung des ganzen Kreises offenbar das Doppelte der Wirkung des Halbkreises CLP, mithin

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dW = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} dW = 2\left\{\int_{\varphi=0}^{\varphi=\text{arc}(\cos=\frac{r}{r'})} dW + \int_{\varphi=\text{arc}(\cos=\frac{r}{r'})}^{\varphi=\pi} dW\right\}$$

§. 3.

Wenden wir uns nun zur Integration der Gleichung 1)

$$dW = \frac{cr\,(r - r'\cos\varphi)}{(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.d\varphi.$$

Dieselbe wird sich ausführen lassen, wenn man im Stande ist, den Werth

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$, oder noch besser in eine nach den Cosinus der Vielfachen von φ geordnete Reihe zu entwickeln. Denn, wenn man hat

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=A+B\cos\varphi+C\cos2\varphi+D\cos3\varphi+\ldots.$$

so wird

$$\frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\left\{\begin{array}{l}Ar+Br\cos\varphi+Cr\cos2\varphi+Dr\cos3\varphi\ldots\\ \quad -Ar'\cos\varphi-Br'\cos\varphi.\cos\varphi\\ \qquad -Cr'\cos2\varphi.\cos\varphi\ldots\end{array}\right.$$

und wenn man hier überall

$$\cos p\varphi.\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi$$

setzt, so erhält man

$$2)\quad \frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{array}{l}(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\\ +(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi\\ +(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos2\varphi\\ +(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos3\varphi\\ \quad\text{u. s. w.}\end{array}$$

Mithin ist

$$dW=crd\varphi\left\{(Ar-\tfrac{1}{2}Br')+(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi\right.$$
$$\left.+(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos2\varphi+(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos3\varphi\ldots..\right\}$$

also das Integral

$$W=cr(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\varphi+cr(Br-\frac{A+C}{2}r')\sin\varphi$$
$$+\tfrac{1}{2}cr(Cr-\frac{B+D}{2}r')\sin2\varphi$$
$$+\tfrac{1}{3}cr(Dr-\frac{C+E}{2}r')\sin3\varphi$$
$$+\text{u. s. w.}$$

Da dies Integral zwischen den Gränzen

$$\varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi$$

zu nehmen ist, so reducirt sich dasselbe auf den äusserst einfachen Werth

$$3)\quad W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{2}Br'),$$

in welchem die Grössen A und B noch bestimmt werden müssen.

§. 4.

Die Bestimmung der Coefficienten A und B geschieht durch die Ausführung der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \ldots,$$

welche am schnellsten nach dem binomischen Lehrsatze und den bekannten Reihen für die Potenzen der Cosinus sich ausführen liesse. Die Nothwendigkeit aber, zur Beantwortung unserer Frage rasch convergirende Reihen zu gewinnen, erheischt einige Umwege, in deren Windungen die Darstellung von Lacroix in seinem Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. S. 112. ff. mir als Wegweiser gedient hat.

Bezeichnet man $\sqrt{-1}$ durch i, so hat man

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

wo e die bekannte Bedeutung hat. Dann ist

$$\begin{aligned} 4)\quad r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 &= r^2 - rr'(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r'^2 \\ &= (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}) \\ &= (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst

$$r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}),$$

dann ist

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = (r - r'e^{i\varphi})^{-m} . (r - r'e^{-i\varphi})^{-m},$$

und nun nach dem binomischen Lehrsatze

$$\begin{aligned} (r - r'e^{i\varphi})^{-m} = r^{-m}\{1 + m.\frac{r'}{r}.e^{i\varphi} &+ \frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 e^{2i\varphi} \\ &+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 e^{3i\varphi} \ldots\}, \end{aligned}$$

$$(r - r'e^{-i\varphi})^{-m} = r^{-m}\{1 + m.\frac{r'}{r}.e^{-i\varphi} + \frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 e^{-2i\varphi}$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 e^{-3i\varphi}\ldots\}.$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, und setzt man in dem Resultate überall wieder $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$ und $e^{pi\varphi} + e^{-pi\varphi} = 2\cos p\varphi$, so erhält man

$$5)\; r^{-2m}\left\{\begin{array}{l} 1 + m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4 + \left(\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^6\ldots \\ +2\left(m.\frac{r'}{r} + m^2.\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5\ldots\right)\cos\varphi \\ + P\cos 2\varphi + Q\cos 3\varphi + R\cos 4\varphi\ldots \end{array}\right\}$$

wo die Coefficienten P, Q, R...... nicht entwickelt sind, da wir ihrer zu unserer Aufgabe nicht bedürfen. Bezeichnet man

$$6)\left\{\begin{array}{l} \text{die Reihe } 1 + m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4 \ldots \text{ mit } \alpha \\ \text{u. die Reihe } 2\left(m.\frac{r'}{r} + m^2.\frac{m+1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2.\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5\ldots\right) \text{mit } \beta; \end{array}\right.$$

so hat man

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = r^{-2m}\{\alpha + \beta\cos\varphi\ldots\},$$

und da

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi\ldots$$

sein sollte, so hat man

$$7)\; A = \frac{\alpha}{r^3} \text{ und } B = \frac{\beta}{r^3},$$

wenn man in den Reihen 6) statt m den Werth $\frac{3}{2}$ substituirt, und α und β dann berechnet. Sobald aber $\frac{r'}{r}$ nicht ein sehr kleiner Bruch ist, convergiren die Reihen in 6) nur langsam, wesshalb man so unmittelbar nicht zum Ziele kommen kann.

Jene Reihen convergiren nun viel schneller, wenn man in denselben

$$m = -\tfrac{1}{2}$$

setzt, mithin $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{1}{2}} = r(\alpha + \beta\cos\varphi\ldots.)$ gewinnt.

Könnte man aus den Coefficienten dieser Reihe die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}}$ herleiten, so würde die oben erwähnte Schwierigkeit vermindert sein.

§ 5.

Dies wird sich thun lassen, wenn man aus

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}=r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi\ldots.)$$

herzuleiten weiss:

$$8)\quad (r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=r^{-2(m+1)}(\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi..),$$

so dass man α_1, β_1, $\gamma_1\ldots.$ als Functionen von α, β, $\gamma\ldots.$ erhält. Denn alsdann kann man auf dieselbe Weise von $-(m+1)$ zu $-(m+2)$ übergehen, mithin von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}-1$, von da zu $\frac{1}{2}-2$ oder $-\frac{3}{2}$. Nun ist aber

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=\frac{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

mithin auch

$$r^{-2(m+1)}\{\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi\ldots\}=\frac{r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi\ldots)}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

und wenn der Nenner weggeschafft wird:

$$\begin{aligned}&r^{-2}\{\alpha_1(r^2+r_1^2)+\beta_1(r^2+r_1^2)\cos\varphi+\gamma_1(r^2+r_1^2)\cos 2\varphi\ldots.\\&\qquad-2\alpha_1rr'\cos\varphi-2\beta_1rr'\cos\varphi\cos\varphi-2\gamma_1rr'\cos 2\varphi\cos\varphi\ldots.\}\\&=\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi+\delta\cos 3\varphi\ldots.\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Entwickelung statt $\cos p\varphi.\cos\varphi$ seinen Werth

$$\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi,$$

und bringt man dann alle Glieder auf eine Seite, so erhält man

$$\begin{aligned}&(\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha)\\&+(\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta)\cos\varphi\\&+(\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r^2\gamma)\cos 2\varphi\\&+\text{u. s. w.}=0.\end{aligned}$$

Dies giebt zur Bestimmung der Coefficienten α_1, β_1, $\gamma_1\ldots.$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha=0,\\&\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta=0,\\&\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r_2\gamma=0,\\&\qquad\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

durch deren Auflösung man erhält:

$$9)\quad \beta_1=\frac{\alpha_1(r^2+r'^2)-\alpha r^2}{rr'},$$

$$10)\ \gamma_1 = \frac{\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1 rr' - r^2\beta}{rr'},$$

$$11)\ \delta_1 = \frac{\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1 rr' - r^2\gamma}{rr'},$$

u. s. w.

Es können also die Coefficienten β_1, γ_1, δ_1.... der Entwickelung von $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}$ durch die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}$ ausgedrückt werden, wenn nur der erste der gesuchten Coefficienten, nämlich α_1, bekannt ist. Diesen zu ermitteln wird nun unsere nächste Aufgabe sein.

§. 6.

Könnten wir die Relation finden, welche zwischen den Coefficienten α, β, γ, δ.... der Entwickelung von $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}$ besteht, so muss dieselbe, nach Substituirung von $m+1$ statt m, auch gelten für die Coefficienten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... der gesuchten Entwickelung. Liesse sich z. B. γ durch α und β ausdrücken, so hätten wir auch γ_1 durch α_1 und β_1 ausgedrückt, und da auch die Formel 10) uns γ_1 als Function von α_1 und β_1 liefert, so giebt uns die Gleichsetzung dieser beiden Werthe von γ_1 den Werth des Coefficienten α_1.

Nehmen wir nun, um jenen Zusammenhang zwischen den Coefficienten α, β, γ.... aufzufinden, von

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m} = r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi....)$$

die Logarithmen, und darauf das Differential nach φ, so kommt zunächst

$$\frac{2mrr'\sin\varphi}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2} = \frac{\beta\sin\varphi+2\gamma\sin 2\varphi+3\delta\sin 3\varphi...}{\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi+\delta\cos 3\varphi...}.$$

Wenn dann die Nenner weggeschafft, statt $\sin\varphi.\cos p\varphi$ und statt $\cos\varphi.\sin p\varphi$ ihre Werthe, nämlich $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi-\frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$ und $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi+\frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$, gesetzt, und alle Glieder auf eine Seite geschafft werden, so erhält man

$$\begin{aligned}&\{2mrr'\alpha-(m-2)rr'\gamma-(r^2+r'^2)\beta\}\sin\varphi\\ &+\{mrr'\beta-(m-3)rr'\delta-2(r^2+r'^2)\gamma\}\sin 2\varphi\\ &+P\sin 3\varphi+Q\sin 4\varphi+...=0.\end{aligned}$$

Der Coefficient von $\sin\varphi$, den wir, wie die übrigen, gleich Null setzen müssen, liefert uns

$$12)\ \gamma = \frac{2mrr'\alpha-(r^2+r'^2)\beta}{(m-2)rr'}.$$

Vertauscht man m mit $m+1$ und α, β, γ.... mit α_1, β_1, γ_1...., so hat man

$$13)\ \gamma_1 = \frac{2(m+1)rr'\alpha_1 - (r^2+r'^2)\beta_1}{(m-1)rr'}.$$

Setzt man nun die beiden Werthe von γ_1 in 10) und 13) gleich, so erhält man eine Gleichung für α_1, β_1, und aus derselben

$$14)\ \beta_1 = \frac{4mrr'\alpha_1 + (m-1)r^2\beta}{m(r^2+r_1^2)}.$$

Allein es war nach 9) auch

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1(r^2+r'^2) - \alpha r^2}{rr'},$$

folglich kann man beide gleich setzen, und erhält eine Gleichung, in der α_1 die einzige Unbekannte ist. Daraus ergiebt sich

$$15)\ \alpha_1 = r^2 . \frac{(m-1)rr'\beta + m(r^2+r'^2)\alpha}{m(r^2-r'^2)^2},$$

und wenn dies berechnet ist, aus 9) oder 14) auch β_1.

§. 7.

Nun verfahre man, wie §. 5. schon angegeben ist, indem man auf dieselbe Weise von der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-(m+1)} = r^{-2(m+1)}\{\alpha_1 + \beta_1\cos\varphi + \gamma_1\cos 2\varphi \ldots\}$$

zu der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-(m+2)} = r^{-2(m+2)}\{\alpha_2 + \beta_2\cos\varphi + \gamma_2\cos 2\varphi \ldots\}$$

übergeht. Man erhält nach Analogie von 15), 9) und 14)

$$16)\ \alpha_2 = r^2 . \frac{mrr'\beta_1 + (m+1)(r^2+r'^2)\alpha_1}{(m+1)(r^2-r'^2)^2},$$

$$17)\ \beta_2 = \frac{\alpha_2(r^2+r'^2) - \alpha_1 r^2}{rr'},$$

$$18)\ \gamma_2 = \frac{4(m+1)rr'\alpha_2 + mr^2\beta_1}{(m+1)(r^2+r'^2)}.$$

In unserm Falle sollte nun $m = -\frac{1}{2}$ gesetzt werden, damit $m+2 = \frac{3}{2}$ werde, und aus der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{1}{2}} = r(\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos 2\varphi \ldots)$$

die Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}(\alpha_2 = \beta_2\cos\varphi + \gamma_2\cos 2\varphi \ldots)$$

hervorgehe.

Führt man dies aus, so erhält man aus 15) u. 9), 16) u. 17)

$$19)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3rr'\beta + (r^2 + r'^2)\alpha}{(r^2 - r'^2)} \cdot r^2, \\[2ex] \beta_1 = \dfrac{(r^2 + r_1^2)\alpha_1 - \alpha r^2}{rr'}, \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{(r^2 + r'^2)\alpha_1 - rr'\beta_1}{(r^2 - r'^2)^2} \cdot r^2, \\[2ex] \beta_2 = \dfrac{(r^2 + r'^2)\alpha_2 - \alpha_1 r^2}{rr'}. \end{cases}$$

Jetzt braucht man nur in den beiden letzten Werthen überall statt α_1, β_1 die durch die beiden ersten Formeln gegebenen Werthe zu substituiren und die Reductionen auszuführen, um folgende, sehr einfache Werthe zu erhalten:

$$20)\quad \alpha_2 = \frac{\alpha r^4}{(r^2 - r_1^2)^2},$$

$$21)\quad \beta_2 = \frac{-3\beta r^4}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

Es sind mithin von der Entwickelung

$$22)\quad (r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}\{\alpha_2 + \beta_2\cos\varphi + \gamma_2\cos 2\varphi \ldots\}$$

die ersten Glieder gefunden.

§. 8.

Die Lösung unserer Aufgabe hatten wir davon abhängig gemacht (cf. §. 3.), dass für

$$\frac{1}{(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die Reihe

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi \ldots.$$

gefunden würde. Dies ist in §. 7. geschehen, wenn wir die Parenthese auf der rechten Seite von 22) auflösen; mithin ist

$$A = r^{-3} \cdot \alpha_2, \quad B = r^{-3} \cdot \beta_2,$$

oder mit Benutzung der Formeln 20) und 21)

$$23)\quad A = \frac{\alpha r}{(r^2 - r_1^2)^2},$$

$$24)\quad B = \frac{-3\beta r}{(r^2 - r_1^2)^2}.$$

Unser Integral, welches die Gesammtwirkung des kreisförmigen Stromes ausdrückt, war nach §. 3.

$$W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{2}Br');$$

dieser Werth verwandelt sich jetzt in

$$25)\quad W = 2cr^2\pi\,\frac{\alpha r + \frac{3}{2}\beta r'}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

Drückt man die Entfernung r' in Theilen des Halbmessers r aus, setzt man also

$$r' = pr,$$

so verwandelt sich 25) in

$$26)\quad W = \frac{2c\pi}{r}\cdot\frac{\alpha + \frac{3}{2}p\beta}{(1-p^2)^2}.$$

Die Reihen aber, welche wir der Kürze wegen mit α und β bezeichnet haben, sind

$$27)\quad \alpha = 1 + \frac{1}{2^2}p^2 + \frac{1.1}{2^2.4^2}p^4 + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}p^6 + \frac{1.1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}p^8 \ldots,$$

$$28)\quad \beta = 2\left(-\tfrac{1}{2}p + \frac{1}{2^2}\cdot\tfrac{1}{4}p^3 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\tfrac{3}{6}p^5 + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\tfrac{5}{8}p^7 \ldots\right),$$

indem man in §. 4. Nr. 6) nur $m = -\frac{1}{2}$ und $\frac{r'}{r} = p$ zu setzen hat

Für $p = 0$, d. i. $r' = 0$, also für den Mittelpunkt des kreisförmigen Stromes, ist $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, mithin reducirt sich das Integral auf

$$\frac{2c\pi}{r},$$

was der bekannte Ausdruck für die Einwirkung des Kreisstromes auf ein in seinem Mittelpunkte befindliches magnetisches Theilchen ist. Diese Einwirkung ist nun ein Minimum im Vergleich mit derjenigen, welche alle andern Punkte innerhalb des Kreises erfahren. Denn die Berechnung des Integrals 26) giebt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für den Mittelpunkt des Kreises	1,000000
für $r' = \frac{1}{100}r$ dagegen	1,000075
„ $r' = \frac{1}{10}r$	1,007572
„ $r' = \frac{5}{10}r$	1,245620
„ $r' = \frac{9}{10}r$	3,9256
„ $r' = r$	unendlich gross.

Es wächst also die Wirkung vom Mittelpunkte, wo sie ein Minimum ist, bis zur Peripherie des Kreises

continuirlich, und würde bei gehöriger Annäherung an die Peripherie über alle Gränzen hinaus wachsen, wenn ein Leitungsdraht von unmerklicher Dicke einen starken electrischen Strom leiten könnte.

Für das Magnetisiren ergeben sich dann folgende Regeln:

1) Hat man nur Stahlstäbe von constanten Dimensionen zu magnetisiren, so gebe man dem Magnetisircylinder eine solche Weite, dass der Stab so eben in demselben sich hin und herziehen lässt.
2) Ist die Dicke des Stabes geringer als die innere Weite des Cylinders, so bewege man den Stab so in dem Cylinder hin und her, dass er die innere Seitenwand immer berührt, und lasse diese Berührung nach und nach jeder Seite des Stabes zu Theil werden.

Ferner ist aus dem Bisherigen offenbar, dass bei gewöhnlichen Electromagneten der Magnetismus in der Oberfläche des Eisens ohne Vergleich stärker entwickelt wird, als in dem Innern.

§. 9.

Es ist von Interesse, auch die Intensität der Einwirkung eines Kreisstromes auf einen ausserhalb des Kreises in seiner Ebene gelegenen Punkt zu untersuchen. Die bisher gefundenen Formeln scheinen diesen Fall nicht mit zu umfassen, weil die Reihen für α und β in §. 8. nicht convergent bleiben, wenn $p > 1$ gesetzt wird.

Nun sind wir aber bei der Entwickelung von

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

in eine Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von φ im §. 4. von der Betrachtung ausgegangen, dass

$$r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi})$$

gesetzt werden könne; es wurde aber dort schon bemerkt, dass mit demselben Recht

$$r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 = (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi})$$

gesetzt werden kann. Man kann also in der ganzen Entwickelung r mit r' vertauschen und wird dies thun, wenn $r' > r$ ist, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreisstromes liegt. Dann hat man zur Berechnung des Integrals

$$W = 2cr\pi\,(Ar - \tfrac{1}{2}Br'),$$

welches die Intensität der magnetisirenden Wirkung angiebt, die Formeln

$$29)\quad \alpha = 1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^4 + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^6 \ldots,$$

$$30)\quad \beta = 2\left\{-\tfrac{1}{2}.\frac{r}{r'} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{r}{r'}\right)^5 \ldots\right\},$$

$$31)\quad A = \frac{\alpha r_1}{(r'^2 - r^2)^2},$$

$$32)\quad B=\frac{-3\beta r'}{(r'^2-r^2)^2},$$

und das Integral nimmt jetzt die Form an

$$33)\quad W=2cr\pi.\frac{\alpha rr'+\frac{3}{2}\beta r'r'}{(r'^2-r^2)^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{r}{r'}=p$, also $r'=\frac{1}{p}.r$, mit p einen ächten Bruch bezeichnend, so ergeben sich für α und β aus 29) und 30) dieselben Reihen, welche wir im §. 8. Nr. 27) und 28) erhalten haben. Man kann also jeden der dort für α und β erhaltenen Werthe unmittelbar benutzen, um die Einwirkung des Stromes auf einen ausserhalb liegenden Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte

$$r'=\frac{1}{p}.r$$

ist, zu erfahren. Das Integral 33) nimmt durch die Substitution von $\frac{1}{p}r$ statt r' die Form an

$$34)\quad W=\frac{2c\pi}{r}.\frac{(\alpha p+\frac{3}{2}\beta)p^2}{(1-p^2)^2}.$$

Die Ausführung der Rechnung giebt, wenn wir wieder den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für $p=0$, also $r'=\infty$ die Grösse der Vertheilung $=0$,
„ $p=\frac{1}{100}$, „ $r'=100r$ „ „ „ „ $=-0{,}0000005$
„ $p=\frac{1}{10}$, „ $r'=10r$ „ „ „ „ $=-0{,}0005056$
„ $p=\frac{5}{10}$, „ $r'=2r$ „ „ „ „ $=-0{,}08622$
„ $p=\frac{9}{10}$, „ $r'=1\frac{1}{9}r$ „ „ „ „ $=-2{,}227$.

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Pole des magnetischen Theilchens ausserhalb des Kreises die entgegengesetzte Lage haben.

Besonders bemerkenswerth ist die Vergleichung der für $r'=0$ und $r'=2r$ gefundenen Werthe, wonach die Einwirkung eines Kreisstromes auf einen um den Radius von der Peripherie entfernten ausserhalb liegenden Punkt beinahe 9 Procent derjenigen Wirkung beträgt, welche der Mittelpunkt des Kreises erfährt.

§. 10.

Ich habe das Integral noch für einige andere Werthe von p berechnet, und lasse die Resultate in Verbindung mit den §. 8. und §. 9. gegebenen hier folgen, indem ich die Entfernung r' als Ab-

stand vom Mittelpunkte, den von dem Factor $\frac{2c\pi}{r}$ befreiten Werth des Integrals als magnetische Vertheilung bezeichne.

Abstand vom Mittelpunkte.	Magnetische Vertheilung.
0	1
$\frac{1}{10}r$	1,0076
$\frac{2}{10}r$	1,0288
$\frac{3}{10}r$	1,0731
$\frac{4}{10}r$	1,1413
$\frac{5}{10}r$	1,2456
$\frac{6}{10}r$	1,4105
$\frac{7}{10}r$	1,6922
$\frac{8}{10}r$	2,2569
$\frac{9}{10}r$	3,9256
r	unendlich gross
$1\frac{1}{9}r$	—2,227
$1\frac{1}{4}r$	—0,7896
$1\frac{3}{7}r$	—0,3621
$1\frac{2}{3}r$	—0,1776
$2r$	—0,08622
$2\frac{1}{2}r$	—0,03891
$3\frac{1}{3}r$	—0,01502
$5r$	—0,00419
$10r$	—0,00051

XXI.

Allgemeine Sätze für eine Theorie der höheren Differential-Quotienten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann von der Theorie der höheren Differenzial-Quotienten ohne Uebertreibung behaupten, dass sie den unvollständigsten Theil der Differenzialrechnung bildet, welcher einer Begründung

aus allgemeinen Principien noch gänzlich entbehrt. In der That ist für dieselbe bis jetzt weiter nichts geschehen, als dass man eine Partie ganz specieller Funktionen, wie z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}, \frac{x}{a^2+b^2x^2}, \frac{e^x}{e^x+a}, \text{etc.}$$

behandelt und bald durch diesen, bald durch jenen Kunstgriff, wie ihn eben die Natur der Funktion zuliess, die Form der höheren Differenzial-Quotienten bestimmt hat. Diese Betrachtungsweise bringt aber den Nachtheil, dass man zu keinen allgemeinen Gesetzen gelangt, die auf alle solche Funktionen, welche die Veränderliche auf die nämliche Weise enthalten (z. B. als Quadrat, als Exponent von e etc.) gleichförmig anwendbar wären. — Der hieraus entspringende Mangel an Zusammenhang lässt sich nun dadurch beseitigen, dass man die Differenzial-Quotienten sehr allgemeiner Funktionen, wie z. B.

$$f(x^\lambda), f(e^x), \text{ u. dgl.},$$

welche die obengenannten Ausdrücke als spezielle Fälle enthalten, zu entwickeln versucht. Der Anfang eines solchen Calcüls sähe etwa so aus:

$$\frac{df(x^\lambda)}{dx}=\lambda x^{\lambda-1}f'(x^\lambda),$$

$$\frac{d^2f(x^\lambda)}{dx^2}=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}f'(x^\lambda)+\lambda^2x^{2\lambda-2}f''(x^\lambda),$$

$$\frac{d^3f(x^\lambda)}{dx^3}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}f'(x^\lambda)+3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3}f''(x^\lambda)$$
$$+\lambda^3x^{3\lambda-3}f'''(x^\lambda),$$

u. s. f. *)

Ebenso leicht findet man

$$\frac{df(e^x)}{dx}=e^xf'(e^x),$$

$$\frac{d^2f(e^x)}{dx^2}=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x),$$

*) Die Symbole $f'(x^\lambda)$, $f''(x^\lambda)$ etc. bezeichnen hier, dass man erst der Funktion f eine Veränderliche, etwa y, leihen, nach dieser schlechthin (als wäre sie unabhängig) differenziren und nach geschehener Differenziation $y=x^\lambda$ setzen solle. So wäre z. B. für $f(y)=ly$, $f'(y)=\frac{1}{y}$, $f''(y)=-\frac{1}{y^2}$ und $f'(x^\lambda)=\frac{1}{x^\lambda}$, $f''(x^\lambda)=-\frac{1}{(x^\lambda)^2}$, etc., woraus der Sinn jener Bezeichnung völlig erhellt.

$$\frac{d^3 f(e^x)}{dx^3} = e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x),$$

u. s. w.

Es ist nicht schwer, die allgemeine Form zu entdecken, unter welcher diese Gleichungen stehen. Bezeichnen wir nämlich mit

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots \overset{n}{A}_n$$

constante Coeffizienten, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n} f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n} f''(x^\lambda) + \ldots \\ \qquad \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n} f^{(n)}(x^\lambda)\end{array}\right\} \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots \\ \qquad \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x)\end{array}\right\} \quad (2)$$

wobei natürlich die Coeffizienten A in der zweiten Gleichung andere Werthe haben, als in der ersten. Aber eben diese Werthe zu finden, ist das Schwerste an der ganzen Betrachtung, da die Rekursionsskale, welche man leicht für die Coeffizienten verschiedener Ordnungen finden kann, zur independenten Bestimmung derselben nicht ausreicht. Durch eine eigenthümliche Methode indessen ist es dem Verfasser geglückt, diese Schwierigkeiten zu heben und die Resultate seiner Untersuchungen sind die folgenden Sätze, denen ihre synthetischen Beweise folgen mögen.

I. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\} \quad (3)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots \pm \lambda_n p_{p-1}\} \quad (4)$$

wobei p_1, p_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten p und $(p\lambda)_n$, $(\overline{p-1}\lambda)_n$, etc. den jedesmaligen $n$ten Coeffizienten der Exponenten $p\lambda$, $\overline{p-1}\lambda$, etc. bezeichnen.

Beweis.

Da die Formel 4) für $n=1$ ein Resultat liefert, welches mit der früheren direkten Formel für $\frac{df(x^\lambda)}{dx}$ übereinstimmt, so haben

wir bloss zu zeigen, dass dieselbe für die $(n+1)$te Ordnung gilt, wenn sie für die $n$te richtig ist. Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichung (3), indem wir sie in der Form von Nr. (1) benutzen, so kommt

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}}=(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n-1}f'(x^\lambda)+(2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n-1}f''(x^\lambda)$$

$$+(3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n-1}f'''(x^\lambda)+\ldots$$

$$+\lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda-n-1}f''(x^\lambda)+\lambda\overset{n}{A}_2 x^{\lambda-n-1}f'''(x^\lambda)+\ldots$$

$$=\frac{1}{x^{n+1}}\{(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda)+(2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda}f''(x^\lambda)$$

$$+(3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda}f'''(x^\lambda)+\ldots+\lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda}f''(x^\lambda)+\lambda\overset{n}{A}_2 x^{3\lambda}f'''(x^\lambda)+\ldots\}$$

und wenn wir

$$(\lambda-n)\overset{n}{A}_1=\overset{n+1}{A}_1,$$

$$(2\lambda-n)\overset{n}{A}_2+\lambda\overset{n}{A}_1=\overset{n+1}{A}_2,$$

$$(3\lambda-n)\overset{n}{A}_3+\lambda\overset{n}{A}_2=\overset{n+1}{A}_3,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

überhaupt

$$(p\lambda-n)\overset{n}{A}_p+\lambda\overset{n}{A}_{p-1}=\overset{n+1}{A}_p \qquad (5)$$

setzen,

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}}=\frac{1}{x^{n+1}}\{\overset{n+1}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda)+\overset{n+1}{A}_2 x^{2\lambda}f''(x^\lambda)+\overset{n+1}{A}_3 x^{3\lambda}f'''(x^\lambda)+\ldots\} \quad (6)$$

Vermöge der Gleichung (5) ist hier, wenn die Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$ nach Nr. (4) entwickelt werden,

$$\overset{n+1}{A}_p=(p\lambda-n)\frac{1.2..n}{1.2..p}\{(p\lambda)_n-(\overline{p-1}\lambda)_n p_1+(\overline{p-2}\lambda)_n p_2-\ldots\}$$

$$+\lambda\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(p-1)}\{(\overline{p-1}\lambda)_n-(\overline{p-2}\lambda)_n(p-1)_1+(\overline{p-3}\lambda)_n(p-1)_2-\ldots\}$$

oder

$$\overset{n+1}{A}_p=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(p-1)}\Big\{\frac{p\lambda-n}{p}(p\lambda)_n-\frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-1}\lambda)_n p_1$$

$$+\frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-2}\lambda)_n p_2-\ldots+\lambda(\overline{p-1}\lambda)_n-\lambda(\overline{p-2}\lambda)_n(p-1)_1+\ldots\Big\} \quad (7)$$

Nun ist überhaupt

$$\frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-r\lambda})_n p_r - \lambda(\overline{p-r\lambda})_n (p-1)_{r-1}$$

$$=(\overline{p-r\lambda})_n \left\{\frac{p\lambda-n}{p}p_r - \lambda(p-1)_{r-1}\right\}$$

$$=(\overline{p-r\lambda})_n p_r \left\{\frac{p\lambda-n}{p} - \lambda\frac{r}{p}\right\} = (\overline{p-r\lambda})_n p_r \frac{p\lambda-n-\lambda r}{p}$$

$$=\frac{n+1}{p}(\overline{p-r\lambda})_n \frac{\overline{p-r\lambda-n}}{n+1} p_r\,.$$

$$=\frac{n+1}{p}(\overline{p-r\lambda})_{n+1} p_r$$

Nimmt man nun in der Gleichung (7) je zwei untereinander stehende Glieder nach dieser Formel für $r=0, 1, 2,\ldots.$ zusammen, so ergiebt sich

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1.2\ldots(n+1)}{1.2\ldots p}\{(p\lambda)_{n+1} - (\overline{p-1\lambda})_{n+1}p_1 + (\overline{p-2\lambda})_{n+1}p_2 - \ldots\}.$$

Setzt man aber in der Gleichung (4) $n+1$ für n, so erhält man das Nämliche; es gilt also das Bildungsgesetz der Coeffizienten für die $(n+1)$te Ordnung, wenn es für die $n$te richtig ist, w. z. b. w.

Anwendungen.

Setzt man

$$\overset{n}{E}_p = 1.2\ldots n\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1\lambda})_n p_1 + (\overline{p-2\lambda})_n p_2 - \ldots\} \quad (8)$$

so wird nach (4)

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p,$$

folglich nach (3)

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{E}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots.n}\overset{n}{E}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\},$$

unter welcher Form das Theorem zu den elegantesten Anwendungen führt.

1) Es sei

$$f(y) = (a+y)^\mu,$$

so wird

$$f^{(p)}(y)=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)\frac{(a+y)^{\mu}}{(a+y)^{p}};$$

folglich

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^{\lambda})=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^{\lambda})^{\mu}}{(a+x^{\lambda})^{p}}$$

$$=\mu_p\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^{\lambda})^{\mu}}{(a+x^{\lambda})^{p}}.$$

Bringen wir diess in der Gleichung (9) für $p=1, 2, 3, \ldots n$ in Anwendung, so ergiebt sich:

$$\frac{d^n(a+x^{\lambda})^{\mu}}{dx^n}=\frac{(a+x^{\lambda})^{\mu}}{x^n}\Big\{\mu_1\overset{n}{E}_1\Big(\frac{x^{\lambda}}{a+x^{\lambda}}\Big)+\mu_2\overset{n}{E}_2\Big(\frac{x^{\lambda}}{a+x^{\lambda}}\Big)^2$$
$$+\mu_3\overset{n}{E}_3\Big(\frac{x^{\lambda}}{a+x^{\lambda}}\Big)^3+\ldots+\mu_n\overset{n}{E}_n\Big(\frac{x^{\lambda}}{a+x^{\lambda}}\Big)^n\Big\}\quad(10)$$

ein durch seine Allgemeinheit und Eleganz bemerkenswerthes Theorem.

2) Es sei

$$f(y)=e^{ay},$$

also

$$f^{(p)}(y)=a^p e^{ay}$$

und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^{\lambda})=\frac{a^p}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p e^{ax^{\lambda}},$$

so wird

$$\frac{d^n e^{ax^{\lambda}}}{dx^n}=\frac{e^{x^{\lambda}}}{x^n}\Big\{\overset{n}{E}_1\frac{ax^{\lambda}}{1}+\overset{n}{E}_2\frac{(ax^{\lambda})^2}{1.2}+\ldots+\overset{n}{E}_n\frac{(ax^{\lambda})^n}{1.2\ldots.n}\Big\}\quad(11)$$

Zu bemerken ist noch, dass es zwei spezielle Fälle giebt, in welchen sich die Reihe

$$(p\lambda)_n-(\overline{p-1}\lambda)_n p_1+(\overline{p-2}\lambda)_n p_2-\ldots,$$

welche zur Bestimmung von $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{E}_p$ dient, summiren lässt. Man findet nämlich für $\lambda=-1$:

$$\overset{n}{A}_p=(-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}(n-1)_{p-1}=(-1)^n\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}n_p$$

und daher nach Nr. (3)

$$\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2\ldots(n-1)}{x^n} \left\{ \frac{n_1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n_2}{1.x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{n_3}{1.2.x^3} f'''\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\ldots + \frac{n_n}{1.2\ldots(n-1)x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$(-1)^n \frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{1}{x^{2n}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)n_1}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)n_2}{x^{2n-2}} f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots. \quad (12)$$

Ferner findet man für $\lambda = +2$:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p} p_{n-p} 2^{2p-n},$$

und daraus für $p = 1, 2, \ldots. n$:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{(2x)^n} \left\{ \frac{1_{n-1}}{1} (2x)^2 f'(x^2) + \frac{2_{n-2}}{1.2} (2x)^4 f''(x^2) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(n-1)_1}{1.2\ldots(n-1)} (2x)^{2n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n_0}{1.2\ldots n} (2x)^{2n} f^{(n)}(x^2) \right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \left\{ f^{(n)}(x^2) + \frac{n.(n-1)_1}{(2x)^2} f^{(n-1)}(x^2) \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1).(n-2)_2}{(2x)^4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots \right\},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2.n_2 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$

$$+ 3.4.n_4 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + 4.5.6.n_6 (2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + \ldots. \quad (13)$$

wovon die in Archiv. Thl. IV. S. 364. etc. gegebenen Formeln nur spezielle Fälle sind.

II. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \ldots. + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \quad (14)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \ldots \pm 1^n p_{p-1}\} \ldots \quad (15)$$

Beweis.

Differenzirt man zu Behuf des Beweises von n auf $n+1$ die Gleichung (14), so wird

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = 1\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + 2\overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + 3\overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots$$

$$+ \overset{n}{A}_1 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots$$

Setzen wir dagegen

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = \overset{n+1}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n+1}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n+1}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots$$

und vergleichen diese Coeffizienten mit den vorigen, so ist

$$\overset{n+1}{A}_1 = 1\overset{n}{A}_1,$$

$$\overset{n+1}{A}_2 = 2\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_1,$$

$$\overset{n+1}{A}_3 = 3\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_2,$$

etc.

überhaupt für ein ganzes positives p:

$$\overset{n+1}{A}_p = p\overset{n}{A}_p + \overset{n}{A}_{p-1},$$

d. h. vermöge der Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$:

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots(p-1)}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots$$
$$+ (p-1)^n - (p-2)^n (p-1)_1 + (p-3)^n (p-1)_2 - \ldots\}.$$

Nimmt man je zwei unter einander stehende Glieder mit Hülfe des Satzes

$$p_r - (p-1)_{r-1} = (p-1)_r$$

zusammen, so wird

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots(p-1)}\{p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - \ldots\} \quad (16)$$

Man hat aber bekanntlich

$$(p-1)_r = \frac{p-r}{p} p_r,$$

folglich

$$(p-r)^n (p-1)_r = \frac{1}{p}(p-r)^{n+1} p_r,$$

und mithin durch Anwendung dieses Satzes für $p=0, 1, 2, \ldots$

$$\overset{n+1}{A_p} = \frac{1}{1.2\ldots.p}\{p^{n+1} - (p-1)^{n+1} p_1 + (p-2)^{n+1} p_2 - \ldots\}\ldots \quad (17)$$

was das Nämliche ist, als wenn man in der Formel (15) $n+1$ für n gesetzt hätte. Das dort ausgesprochene Bildungsgesetz ist demnach richtig.

Anwendungen.

Setzt man

$$\overset{n}{K_p} = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \ldots\ldots \quad (18)$$

so wird

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1}\overset{n}{K_1} e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{K_2} e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{K_3} e^{3x} f'''(e^x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\overset{n}{K_n} e^{nx} f^{(n)}(e^x)\ldots \quad (19)$$

was für die Anwendung bequemer ist.

1) Für $f(y) = l(a+y)$, also $f^{(p)}(y) = \frac{1.2\ldots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^p$ und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{K_p} e^{px} f^{(p)}(e^x) = \frac{(-1)^p}{p}\overset{n}{K_p}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

erhalten wir

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1}\overset{n}{K_1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2}\overset{n}{K_2}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{1}{n}\overset{n}{K_n}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n \quad (20)$$

2) Für $f(y) = (a+y)^\mu$ findet sich eben so leicht

$$\frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \left\{\mu_1 \overset{n}{K_1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \mu_2 \overset{n}{K_2}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \mu_n \overset{n}{K_n}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\} \quad (21)$$

also z. B. für $\mu = -1$:

$$\frac{d^n (a+e^x)^{-1}}{dx^n} = \frac{-1}{a+e^x}\left\{\overset{n}{K_1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \overset{n}{K_2}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\pm \overset{n}{K_n}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\} \quad (22)$$

Man kann leicht noch einen anderen etwas symmetrischeren Ausdruck finden, wenn man in (20) $n+1$ für n setzt und bemerkt, dass

$$\frac{d^{n+1}\,l(a+e^x)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}$$

ist. Man hat dann

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=\frac{1}{1}\overset{n+1}{K_1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}\overset{n+1}{K_2}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1}{3}\overset{n+1}{K_3}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\dots$$

$$\dots\pm\frac{1}{n+1}\overset{n+1}{K_{n+1}}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (23)$$

Aus der Vergleichung von (16) und (17) folgt aber

$$\frac{1}{p}\{p^{n+1}-(p-1)^{n+1}p_1+(p-2)^{n+1}p_2-\dots\}$$
$$=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\dots,$$

d. i.

$$\frac{1}{p}\overset{n+1}{K_p}=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\dots$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{p}\overset{n+1}{K_p}=\overset{n}{J_p}$$

setzen:

$$\overset{n}{J_p}=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\dots \quad (24)$$

Nach Nr. (23) ist nun für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten J:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=\overset{n}{J_1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{J_2}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\overset{n}{J_3}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\dots$$

$$\dots\pm\overset{n}{J_{n+1}}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (25)$$

Nimmt man x negativ, $a=-1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}}=\frac{1}{-e^x+1}=-\frac{1}{e^x-1}$$

ist, so erhält man

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}=\overset{n}{J_1}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)+\overset{n}{J_2}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2+\dots$$

$$\dots+\overset{n}{J_{n+1}}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1}. \quad (26)$$

Die Gleichungen (25) und (26) stimmen mit den Resultaten des Herrn **Malmsten** *) überein, wenn man statt

$$n,\ p,\ \overset{n}{J_p}$$

setzt:

$$i,\ k,\ \overset{(i,k)}{a},$$

erscheinen hier aber nur als spezielle Fälle der allgemeineren Formel (14). Man kann ebenso leicht die von **Laplace** und **Euler** entwickelten Formeln aus denselben ableiten. Für die weitere Ausführung dieses Gegenstandes verweise ich auf mein bald erscheinendes Handbuch der Differenzial- und Integral-Rechnung.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn ein Kreis und eine Ellipse, deren Gleichungen

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

sind, sich in vier Punkten schneiden, so ist das Product der Entfernungen der vier Durchschnittspunkte von der Hauptaxe der Ellipse jederzeit eine constante Grösse, nämlich der Grösse

$$\frac{b^4\{(a^2+\alpha^2+\beta^2-r^2)^2-4a^2\alpha^2\}}{(a^2-b^2)^2}$$

gleich.

Die Gleichung einer Parabel zu finden, wenn zwei berührende Linien derselben als Coordinatenaxen angenommen werden.

Wenn von einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte P zwei Tangenten PA, PB an den Kreis, und eine dritte, den gegen den Punkt P concaven Bogen AB in C schneidende gerade

*) Archiv. Theil VI. S. 45. und Theil III. S. 41.

Linie PC gezogen sind, so schneiden sich jederzeit die durch C an den Kreis gezogene Tangente, das auf die Linie PC durch ihre Mitte errichtete Perpendikel und die durch die Mittelpunkte der beiden Tangenten PA, PB gezogene gerade Linie in einem und demselben Punkte.

Wenn man eine Reihe Gleichungen von folgender Form hat:

$$\begin{aligned} a &= a, \\ a+x &= aa_1, \\ a+2x &= aa_1^2 a_2, \\ a+3x &= aa_1^3 a_2^2 a_3, \\ a+4x &= aa_1^4 a_2^3 a_3^2 a_4, \end{aligned}$$

u. s. w.

einen allgemeinen independenten Ausdruck der Grösse a_{n+1} zu finden, und überhaupt eine weitere Untersuchung der Reihe

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots . a_{n+1}, \ldots .$$

anzustellen.

Die Summe der Quadrate der Cosecanten der drei von den Spitzen eines sphärischen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten desselben gefällten Perpendikel ist der Summe der Quadrate der Cosecanten der Halbmesser der vier Kreise gleich, welche die drei Seiten des Dreiecks (oder deren Verlängerungen) berühren.

Man soll durch gewöhnliche Buchstabenrechnung beweisen, dass

$$\begin{aligned} &(p^2+Aq^2+Br^2+ABs^2)(p_1^2+Aq_1^2+Br_1^2+ABs_1^2) \\ &\quad = (pp_1 - Aqq_1 \mp Brr_1 \pm ABss_1)^2 \\ &\quad + A(pq_1+qp_1 \mp Brs_1 \mp Bsr_1)^2 \\ &\quad + B(pr_1+Aqs_1 \pm rp_1 \pm Asq_1)^2 \\ &\quad + AB(ps_1 - qr_1 \pm rq_1 \mp sp_1)^2 \end{aligned}$$

ist, dass also das Product zweier Grössen von der Form

$$p^2+Aq^2+Br^2+ABs^2,$$

wo A und B constante Grössen bezeichnen, immer wieder eine Grösse von derselben Form ist. Für $A=1$ und $B=1$ ist

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)(p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2)$$
$$=(pp_1-qq_1\mp rr_1\pm ss_1)^2$$
$$+(pq_1+qp_1\mp rs_1\mp sr_1)^2$$
$$+(pr_1+qs_1\pm rp_1\pm sq_1)^2$$
$$+(ps_1-qr_1\pm rq_1\mp sp_1)^2$$

d. h. das Product zweier Summen von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten. Bloss zur Uebung erster Anfänger in der Buchstabenrechnung werden diese längst bekannten aber wichtigen Sätze hier wieder aufgenommen.

Arithmetischer Satz.

Es ist immer:

$$1=\frac{a}{a},$$

$$1=\frac{ab}{a(a+b)}+\frac{ba}{b(b+a)},$$

$$1=\frac{abc}{a(a+b)(a+b+c)}+\frac{acb}{a(a+c)(a+c+b)}$$
$$+\frac{bac}{b(b+a)(b+a+c)}+\frac{bca}{b(b+c)(b+c+a)}$$
$$+\frac{cab}{c(c+a)(c+a+b)}+\frac{cba}{c(c+b)(c+b+a)},$$

$$1=\frac{abcd}{a(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)}+\frac{bacd}{b(b+a)(b+a+c)(b+a+c+d)}$$
$$+\frac{abdc}{a(a+b)(a+b+d)(a+b+d+c)}+\frac{badc}{b(b+a)(b+a+d)(b+a+d+c)}$$
$$+\frac{acbd}{a(a+c)(a+c+b)(a+c+b+d)}+\frac{bcad}{b(b+c)(b+c+a)(b+c+a+d)}$$
$$+\frac{acdb}{a(a+c)(a+c+d)(a+c+d+b)}+\frac{bcda}{b(b+c)(b+c+d)(b+c+d+a)}$$
$$+\frac{adbc}{a(a+d)(a+d+b)(a+d+b+c)}+\frac{bdac}{b(b+d)(b+d+a)(b+d+a+c)}$$
$$+\frac{adcb}{a(a+d)(a+d+c)(a+d+c+b)}+\frac{bdca}{b(b+d)(b+d+c)(b+d+c+a)}$$
$$+\frac{cabd}{c(c+a)(c+a+b)(c+a+b+d)}+\frac{dabc}{d(d+a)(d+a+b)(d+a+b+c)}$$
$$+\frac{cadb}{c(c+a)(c+a+d)(c+a+d+b)}+\frac{dacb}{d(d+a)(d+a+c)(d+a+c+b)}$$

$$+\frac{cbad}{c(c+b)(c+b+a)(c+b+a+d)}+\frac{dbac}{d(d+b)(d+b+a)(d+b+a+c)}$$
$$+\frac{cbda}{c(c+b)(c+b+d)(c+b+d+a)}+\frac{dbca}{d(d+b)(d+b+c)(d+b+c+a)}$$
$$+\frac{cdab}{c(c+d)(c+d+a)(c+d+a+b)}+\frac{dcab}{d(d+c)(d+c+a)(d+c+a+b)}$$
$$+\frac{cdba}{c(c+d)(c+d+b)(c+d+b+a)}+\frac{dcba}{d(d+c)(d+c+b)(d+c+b+a)},$$

u. s. w.

Man soll das sich hieraus ergebende allgemeine Gesetz allgemein beweisen.

XXIII.

Miscellen.

Der Akademiker Chasles hat bei einem Buchhändler in Paris ein handschriftliches Werk von Desargues, einem der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, aufgefunden: Brouillon-projet des coniques.

Académie des sciences de Paris.

(Séance du 21 juillet 1845.)

Géométrie. — M. Chasles lit une note sur quelques propriétés des arcs égaux de la lemniscate.

La lemniscate est, comme on sait, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère sur les tangentes à cette courbe. En outre, les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole issus du centre commun des deux courbes et de même direction ont leur produit constant. Ces deux propriétés de la lemniscate sont connues ainsi que la suivante qu'il est nécessaire de rappeler: Le rayon vecteur ou sa normale, menés par un point de la lemniscate, déterminent sur l'hyperbole deux points qui sont situés sur une même ordonnée, c'est-à-dire que

le point où la normale touche l'hyperbole est sur la même ordonnée que le point où le rayon vecteur rencontre l'hyperbole. — Cela posé, les rayons vecteurs menés aux extrémités d'un arc de la lemniscate étant prolongés comprennent un arc de l'hyperbole, et les normales aux deux rayons vecteurs touchent l'hyperbole en deux points qui déterminent un deuxième arc égal au premier. Chacun de ces deux arcs peut être considéré comme le correspondant de l'arc de la lemniscate. Il y a entre les arcs de la lemniscate et leurs correspondants sur l'hyperbole cette relation que donne un calcul très simple: à deux arcs égaux de la lemniscate correspondent sur l'hyperbole deux arcs dont la différence est rectifiable.

C'est par suite de ce théorème que les propriétés des arcs de l'hyperbole dont la différence est rectifiable donnent lieu à des propriétés des arcs égaux de la lemniscate. Voici ces propriétés.

Quand deux arcs d'une lemniscate sont égaux, les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de ces arcs forment un quadrilatère circonscriptible au cercle. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux entre eux, si par les extrémités de chacun de ces arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent à ces points, et qu'on prenne le point de concours de ces normales, tous ces points de concours seront sur une hyperbole décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère qui a servi à former la lemniscate.

Ce théorème fournit une construction très simple pour déterminer sur la lemniscate des arcs égaux à un arc donné, et par conséquent des arcs multiples.

Si à partir d'un point de la lemniscate, on prend, de part et d'autre, deux arcs égaux entre eux, mais d'une largeur quelconque, et que par les extrémités de ces deux arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent en ces points, le lieu géométrique du point de concours de ces deux normales sera une ellipse décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère correspondante à la lemniscate.

Par chaque point d'une lemniscate on peut mener un cercle tangent à la courbe en ce point et passant par le centre de la courbe. Ces cercles donnent lieu à quelques propriétés. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux, si par les extrémités de chacun d'eux on mène les deux cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant par le centre, le point d'intersection de ces deux cercles aura pour lieu géométrique une espèce de lemniscate qui sera le lieu des pieds des normales abaissées du centre de la courbe sur une hyperbole non équilatère. — Étant pris sur une lemniscate deux arcs égaux, si par leurs extrémités on mène quatre cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant tous quatre par le centre de la courbe, ces quatres cercles seront tangents à un même cercle.

In dem Journal des savants. Mars 1845. befindet sich ein Aufsatz von V. Cousin über Roberval, bekanntlich einen der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, aus welchem ich folgende Stelle entlehne, die wohl in einer vorzüg-

lich der Beförderung des mathematischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift zweckmässig einen Platz finden dürfte. Ausserdem enthält der Aufsatz noch manches andere Interessante, jedoch mehr in philosophischer, als in mathematischer Rücksicht.

Roberval, qui avait toute sa vie professé les mathématiques, avait employé ses dernières années de rédiger ses cours sous le noms d'Éléments de géométrie. Nous n'avons point à nous occuper de cet ouvrage, qui n'a jamais été publié et dont le manuscript subsiste. Après la mort de Roberval, en 1675, Lahire, dépositaire de ses papiers et de ses dernières volontés, revit le travail de son ami, et y mit une préface où il nous apprend quel avait été le dessein de Roberval dans la composition de ces Éléments. Cette préface de Lahire, ainsi que l'avant-propos, écrit tout entier de la main de Roberval, sont vraiment deux pièces intéressantes et qui ne sont point étrangères à la philosophie. Le but de Roberval avait été de ramener la géométrie au plus petit nombre possible de principes ou de définitions, de donner des démonstrations de tout ce qui peut être démontré, même des propositions qu'on a coutume de considérer comme indémonstrables. Leibnitz aussi s'est plaint souvent qu'on n'ait pas été assez loin dans l'analyse des principes, et il n'a cessé d'appeler l'attention des géomètres philosophes sur la nécessité de laisser le moins d'hypothèses possible dans les fondements des sciences mathématiques. Roberval, avant Leibnitz, eut la même pensée et se proposa de donner à ses Éléments de géométrie un caractère particulier de rigueur et d'évidence philosophique. Il s'attacha plus à la solidité qu'a l'élégance, et travailla surtout pour les esprits difficiles. „M. de Roberval, dit Lahire, ayant fait profession dès sa jeunesse, d'enseigner les mathématiques en public et en particulier, et ayant continué ces exercices pendant plusieurs années et jusqu'au temps d'une vieillesse fort avancée, l'on peut dire que jamais homme n'a eu plus de moyens de connoitre et la différence des génies qui s'appliquent à cette science, et quelles sont les méthodes les plus universelles et les plus assurées dont on peut se servir avec succès. C'est à ce propos qu'il nous a dit que, parmi cette infinité de différents esprits qu'il avoit enseignés, il en avoit remarqué particulièrement de deux sortes qui lui avoient donné beaucoup de peine; dont la première étoit de ceux qui admettent les propositions avec trop de facilité, et qui, sans beaucoup s'arrêter à examiner si les démonstrations que l'on leur en fait sont légitimes en toutes leurs parties, passent outre, et prétendent par ce moyen de s'avancer; l'autre, au contraire, étoit de certains esprits pointilleux et opiniâtres, qui s'arretent partout et trouvent des difficultés sur l'explication des théorèmes que l'on démontre, et même sur celle des premiers principes qui ne se démontrent pas; et qu'ensuite, après une observation de plusieurs années, faite avec beaucoup d'application sur les succès de ces deux espèces d'esprits, il disoit que les premiers réussissoient rarement dans l'étude de la mathématique, la pluspart s'en dégoûtant aisément avant que d'arriver à la méditation des connoissances plus élevées, et que ceux même qui continuoient de s'y appliquer devenoient le plus souvent chimériques et visionnaires dans leurs inventions, faisant à touts coups des paralogismes dans leurs raisonnements, et ne pouvant discerner la fausseté

de ceux qu'ils trouvoient dans les ouvrages des auteurs. Il ajoutoit que la plus grande partie de ceux qui ont prétendu avoir trouvé la quadrature du cercle, le mouvement perpétuel et la résolution des autres problèmes de cette nature, étoient des esprits de cette première espèce. Il mettoit, au contraire, dans la seconde la pluspart de ces grands génies qui ont produit de si belles choses dans les mathématiques, parce, disoit-il, que cette humeur, qui parôit dans les commencements trop scrupuleuse et importune, venant à se meurir avec le temps et avec le jugement, se change pour l'ordinaire en ce soin et cette application studieuse qu'il faut avoir pour bien examiner les raisonnements, pour bien connôitre la nécessité de la conclusion dans les prémisses, et pour ne se point laisser éblouir au brillant de l'apparence spécieuse d'un paralogisme. C'est donc pour cette sorte d'esprits qu'il a prétendu composer cet ouvrage, dans lequel il a tasché de s'expliquer d'une manière à ne laisser aucun doute, à applanir tout ce qui peut faire naître des scrupules dans l'esprit de ceux qui commencent, à fuir les expressions qui, pouvant avoir divers sens, deviennent obscures et équivoques, à faire le moins de suppositions qu'il luy a été possible, et à démontrer universellement tout ce qui peut être démontré, posant pour un principe inébranlable en mathématiques que rien n'y doit passer pour vrai qui ne soit démontré, s'il le peut être."

In den Blättern für literarische Unterhaltung. 1845. Nr. 71, Nr. 72 und Nr. 73 finden sich in einem interessanten Aufsatze über Claudine von Tencin *) folgende d'Alembert betreffende Stellen:

„Viele Biographen der berühmten Frau haben dem Gedächtnisse derselben einen unvertilgbaren Makel durch die Behauptung anzuhängen gesucht, dass dieselbe den schuldlosen Zeugen ihres Verhältnisses mit Destouches" (Chevalier und Provinzial-Commissair der Artillerie) „auf der Treppe der Kirche St. Jean le Rond seinem Schicksale preisgegeben; mit allen Zeichen der

---

*) War im Jahre 1681 zu Grenoble geboren, ward Nonne im Kloster Montfleuri bei Grenoble, in welchem jetzt die Congregation der Damen von St. Pierre einer Erziehung junger Mädchen vom Stande vorsteht, später Chanoinesse der Abtei Neuville bei Lyon, ward später mit Bewilligung des Pabstes ihres Gelübdes entbunden, lebte dann unter dem ihr von den Parisern beigelegten Namen: „la jolie chanoinesse" in Paris und starb als Marquise v. Tencin am 4ten December 1749 an der Brustwassersucht, nachdem sie an den, nicht auf ihren Wunsch, sondern von ihrer Familie entsendet, mit den Tröstungen der Religion an ihrem Bette erschienenen Priester die folgenden Worte als ihre letzten gerichtet hatte: „Mein Vater, ich bin jung und hübsch gewesen; es ist mir oft gesagt worden, und ich habe die Schwäche gehabt, es stets zu glauben; nun richten Sie und versagen Sie mir Ihren Segen nicht! — Dies war die Mutter d'Alemberts.

Wahrheit ausgestattete Documente rechtfertigen aber Claudine von Tencin gegen den Vorwurf einer so vollständigen Verleugnung alles natürlichen Gefühls, und der historisch erwiesene Umstand, dass wenige Tage nach der Geburt des Kindes von unbekannter Hand eine jährliche Pension von 1200 Fr. für dasselbe ausgesetzt ward, kann, sollte man meinen, allein als eine vollgültige Widerlegung der obigen Anschuldigung betrachtet werden. Es scheint, dass das Kind einem Polizeicommissair mit dem Auftrage übergeben ward, eine Amme für dasselbe zu suchen, und dass dieser es bei der Frau eines armen Glasers unterbrachte, welche es erwiesenermaassen mit der Zärtlichkeit einer Mutter aufzog. Das Kind aber, das, so von seinen Aeltern verleugnet, in der Hütte eines armen Handwerkers ein dürftiges Asyl fand, war bestimmt, durch den Glanz seines Genies das Dunkel seiner Geburt zu überstrahlen; der Sohn Claudinens von Tencin und des Chevalier Destouches war d'Alembert."

Claudine war reich und öffnete ihr Haus jetzt *) allen literarisch und artistisch berühmten Personen des 18ten Jahrhunderts, ein Hofstaat, welcher den unvergänglichern Eigenschaften dieser an Weihrauch gewöhnten Gottheit neue Huldigungen darbringen konnte. In den Zusammenkünften der gelehrten Welt bei der Marquise v. Tencin, in welchen Montesquieu, Marivaux, Piron, Duclos und viele Andere gewöhnliche Gäste waren, führte der ehrwürdige Fontenelle den Vorsitz. Nur Eine Zierde fehlte später diesen Cirkeln, d'Alembert, welcher sich durch seine Vorrede zu der „Encyclopädie" als einen der grössten Geister des Jahrhunderts angekündigt hatte, d'Alembert, den seine Mutter jetzt aus demselben Gefühle des Stolzes zu sich rief, aus dem sie früher ihn als hülfloses Kind von sich gestossen. Der Philosoph aber soll auf die Anträge einer Annäherung, welche Frau von Tencin ihm machte, geantwortet haben: Madame, je n'ai pas d'autre mère que la vitrière qui m'a nourri". Und d'Alembert bewies durch die That, dass diese Worte seine Ueberzeugung waren, indem er die ihm von verschiedenen Höfen und Akademien gemachten glänzenden Anträge von der Hand wies und 30 Jahre seines Lebens an der Seite seiner Adoptivmutter hinbrachte.

Einige Bemerkungen über die Wörter „Variation, variabel" u. s. w.

Von Herrn Doctor G. Strauch,
Lehrer der Mathematik zu Muri im Kanton Aargau.

Erstens. In jedem Lehrbuche über Algebra kommt ein Kapitel vor mit der Ueberschrift „Permutationen, Combina-

*) Dies bezieht sich natürlich auf eine spätere Zeit des Lebens Claudinens in Paris.

tionen und Variationen". Was man unter diesen Variationen zu verstehen habe, ist jedem Leser dieses Aufsatzes bekannt. Der Name Variation kommt aber auch in der höheren Analysis vor. Die beiderlei Variationen haben aber nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich. Zuweilen findet man, dass man den in die Algebra gehörigen Variationen noch ein Eigenschaftswort beifügt, und sie kombinatorische Variationen nennt; dagegen die in die höhere Analysis gehörigen Variationen hat man ganz ohne Eigenschaftswort gelassen.

Zweitens. Die Aenderungen, welche eine Funktion erleiden kann, sind von zweierlei Art; denn entweder kann man den in der Funktion enthaltenen veränderlichen Grössen Werthänderungen beilegen, das ursprüngliche Wesen der Funktion selbst aber ungestört lassen, oder man kann irgend eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergehen lassen.

A) Aenderungen der ersten Art. Es sei

$$\text{I)}\quad y=\varphi x\,,$$

gegeben, wo x jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x gehe über in $(x+h)$; so bekommt man

$$\text{II)}\quad y+Dy=\varphi(x+h),$$

und man sagt hier: y ist eine Funktion mit einer variabeln (veränderlichen) Grösse. Man sagt noch ferner:

a) Die Grösse x, welcher man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ beilegen kann, ist die unabhängige Variable oder auch die absolut unabhängige Variable.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{III)}\quad y=\varphi(x,w)$$

gegeben, wo sowohl x als auch w jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x und w gehen bezüglich über in $(x+h)$ und $(w+k)$; so bekommt man

$$\text{IV)}\quad y+Dy=\varphi[(x+h),(w+k)],$$

und hier sagt man: y ist eine Funktion mit zwei variabeln (veränderlichen) Grössen. Man sagt noch ferner:

a) Die beiden Grössen x und w, welchen man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ und $(w+k)$ beilegen kann, sind die unabhängigen Variabeln oder auch die absolut unabhängigen Variabeln.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von den Werthänderungen $(x+h)$ und $(w+k)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{V)}\quad y=\varphi(x,w)$$

gegeben, während noch gleichzeitig

$$\text{VI)}\quad w=fx$$

bestehen soll; so kann hier nur x jeden beliebigen Werth annehmen, dagegen der Werth des w ist abhängig vom Werthe des x, weil Gleichung VI) stattfindet. Wenn nun x in $(x+h)$ übergeht, so geht Gleichung VI) über in

$$\text{VII)} \quad w+k=f(x+h),$$

durch welche Gleichung vorgeschrieben ist, wie die Werthänderung $(w+k)$ abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$. Gleichung V) geht über in

$$\text{VIII)} \quad y+Dy=\varphi[(x+h),\ (w+k)]$$

und hier sagt man:

a) Die Grösse y ist die abhängige Variable.
b) Die Grösse x ist die absolut unabhängige Variable.
c) Die Grösse w ist die relativ unabhängige Variable, eben weil sie wohl von y unabhängig ist, während sie von x abhängt.

Es ist unnöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Diejenigen Zweige der höheren Analysis, welche, wenn die in einer Funktion befindlichen Variablen eine Werthänderung erleiden, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersuchen und anwenden lehren, sind der Differenzenkalkul und der Differentialkalkul.

B) Aenderungen der zweiten Art. Es sei

$$\text{IX)} \quad y=\varphi x,$$

und diese Funktion gehe über in

$$\text{X)} \quad y+\Delta y=\psi x.$$

Hier ist

$$\text{XI)} \quad \Delta y=\psi x-\varphi x$$

und den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $(\psi x-\varphi x)$ pflegt man Variation (besser aber Gesammtvariation) zu nennen.

Es sei ferner

$$\text{XII)} \quad y=\varphi(x,w)$$

und zugleich sei

$$\text{XIII)} \quad w=fx,$$

so dass Gleichung XII) gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XIV)} \quad y=\varphi(x,fx).$$

Wenn nun $w=fx$ übergeht in

$$\text{XV)} \quad w+\Delta w=Fx,$$

so geht dabei die Gleichung XII) oder XIV) über in

$$\text{XVI)} \quad y+\Delta y=\varphi(x,Fx).$$

Den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $[\varphi(x,Fx)-\varphi(x,fx)]$ nennt man auch hier Variation (besser aber Gesammtvariation).

Es ist nicht nöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Derjenige Zweig der höheren Analy-

sis, welcher, wenn eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergeht, die daraus folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt, wird Variationskalkul genannt.

Drittens. Ist es nun gleichgiltig, dass das Wort „Variation" schon in der Algebra und dann wieder im höchsten Zweige der Analysis vorkommt, und so zur Benennung von zweierlei Dingen gebraucht wird, die nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich haben?

Wenn man das in Gleichung III) vorkommende w, welchem man die ganz willkürliche Werthänderung $(w+k)$ beilegen kann, eine variable Grösse nennt; ist es dann gut, dass man auch das in Gleichung XII) vorkommende $w=fx$, welches in Fx übergeht, ebenfalls eine variable Grösse nennt?

So gewiss es höchst fatal ist, wenn in einer und derselben Wissenschaft durch ein einziges Wort zwei ganz verschiedene Begriffe bezeichnet werden; so gewiss ist es nöthig, dass hier abgeholfen werde. Wo aber abzuhelfen sei, darüber kann kein Bedenken stattfinden.

Ein Begriff, welcher schon einem früheren Zweige einer Wissenschaft angehört, kommt auch in den späteren Zweigen vor; dagegen ein Begriff, welcher erst einem späteren Zweige angehört, kommt in den früheren Zweigen nicht vor. Der terminus technicus, wodurch ein einem früheren Zweige der Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt also auch in den späteren Zweigen vor; dagegen der terminus technicus, wodurch ein einem späteren Zweige einer Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt in den früheren Zweigen nicht vor.

Ausserdem ist es Thatsache, dass es viele Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul giebt, in denen keine Spur des sogenannten Variations-Kalkuls vorkommt.

Man thut also am besten, dem höheren Zweige der Analysis, dem sogenannten Variationskalkul, einen anderen Namen zu geben, der so gewählt ist, dass sich für die daselbst vorkommenden Wörter „Variation" und „variabel" die entsprechenden Namen von selbst ergeben; denn

1) Dadurch wird in die früheren Zweige der Mathematik nicht die geringste Störung gebracht; und auch

2) Diejenigen Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul, welche nichts von dem sogenannten Variations-Kalkul enthalten, werden von dieser Namensänderung nicht im Geringsten berührt.

Nachdem nun die Zweckmässigkeit und beziehungsweise die Nothwendigkeit, dem sogenannten Variationskalkul einen anderen Namen zu geben, dargethan ist, fragt sich: welches Wort soll man wählen?

Es wäre dringend nöthig, ein Wort vorzuschlagen. Dieses müsste aus der Lateinischen Sprache entnommen sein, damit, wenn dessen Zweckmässigkeit von anderen Nationen anerkannt wird, sie es bequem auch in ihre Sprache aufnehmen können. Ich habe zwar schon selbst ein Wort gewählt, bin aber bereit, ein zweckmässigeres, wenn eins vorgeschlagen wird, sogleich anzunehmen.

XXIV.

Zur sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Dr. Anton Müller hat in seinem Buche „Die allgemeinsten Gesetze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinsten Gleichungen der gauchen Polygone, Heidelberg bei Groos. 1836" zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks 19 Gleichungen aufgestellt. Wir wollen im Folgenden diese Gleichungen auf einem dem dort betretenen ähnlichen Wege ableiten und dann zeigen, dass eigentlich nur sieben Gleichungen bestehen und die übrigen 12 aus ihnen abgeleitet sind.

Wir suchen im Folgenden die Relationen, die zwischen den ebenen und den Flächenwinkeln einer dreiseitigen körperlichen Ecke bestehen, da von einer solchen aus leicht auf ein sphärisches Dreieck geschlossen werden kann.

§. 1.

Es sei $PA_1A_2A_3$ (Taf. III. Fig. 1.) eine dreiseitige körperliche Ecke; man nenne die Winkel $A_1PA_2=a_1$, $A_2PA_3=a_2$, $A_3PA_1=a_3$; bezeichne ferner den Neigungswinkel von A_1PA_2 und A_2PA_3 durch $\widehat{a_1a_2}$, den von A_2PA_3 und A_3PA_1 durch $\widehat{a_2a_3}$, und den der Ebenen A_3PA_1 und A_1PA_2 durch $\widehat{a_3a_1}$. Man nehme im Innern der Ecke willkührlich einen Punkt O an und fälle von ihm aus Senkrechte auf die Ebenen der Ecke; OO_1 senkrecht auf A_1PA_2; OO_2 senkrecht auf A_2PA_3; OO_3 senkrecht auf

A_3PA_1. Man lege durch OO_1 und OO_2 eine Ebene, welche die Kante PA_2 in A_2 schneidet, so steht PA_2 senkrecht auf dieser Ebene; dessgleichen steht PA_1 senkrecht auf der durch OO_1 und OO_3; PA_3 auf der durch OO_2 und OO_3 gelegten Ebene. Diese drei Ebenen bilden abermals eine Pyramide. Ihre Linienwinkel sind $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$, $O_2OO_3 = 180 - \widehat{a_2a_3}$, $O_3OO_1 = 180 - \widehat{a_3a_1}$; ihre Neigungswinkel sind $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, $A_2O_2A_3 = 180 - a_2$, $A_3O_3A_1 = 180 - a_3$.

§. 2.

Da in dem Vierecke $PA_1O_1A_2$: $O_1A_1P = 90$, $O_1A_2P = 90$, $A_2PA_1 = a_1$, $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, so findet man:

$$\begin{aligned} PA_1 &= PA_2 \cos a_1 + A_2O_1 \sin a_1, \\ A_1O_1 &= PA_2 \sin a_1 - A_2O_1 \cos a_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} PA_2 &= PA_3 \cos a_2 + A_3O_2 \sin a_2, \\ A_2O_2 &= PA_3 \sin a_2 - A_3O_2 \cos a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} PA_3 &= PA_1 \cos a_3 + A_1O_3 \sin a_3, \\ A_3O_3 &= PA_1 \sin a_3 - A_1O_3 \cos a_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln auch gelten, wenn die Winkel a_1, a_2, a_3 stumpf sind; nur muss man die Linien PA_1, PA_2, PA_3, im Falle sie auf die andere Seite von P fallen, als hier angenommen ist, als negativ betrachten.

Eben so findet man aus dem Vierecke $A_2O_1OO_2$, da $OO_1A_2 = OO_2A_2 = 90$, $O_1A_2O_2 = \widehat{a_1a_2}$, $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$:

$$\begin{aligned} A_2O_1 &= A_2O_2 \cos \widehat{a_1a_2} + OO_2 \sin \widehat{a_1a_2}, \\ OO_1 &= A_2O_2 \sin \widehat{a_1a_2} - OO_2 \cos \widehat{a_1a_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} A_3O_2 &= A_3O_3 \cos \widehat{a_2a_3} + OO_3 \sin \widehat{a_2a_3}, \\ OO_2 &= A_3O_3 \sin \widehat{a_2a_3} - OO_3 \cos \widehat{a_2a_3} \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} A_1O_3 &= A_1O_1 \cos \widehat{a_3a_1} + OO_1 \sin \widehat{a_3a_1}, \\ OO_3 &= A_1O_1 \sin \widehat{a_3a_1} - OO_1 \cos \widehat{a_3a_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Auch diese Formeln gelten allgemein; nur müssten Linien, die auf entgegengesetzte Weise fallen, als hier angenommen, als negativ betrachtet werden.

Diese sechs Formeln sollen nun zur Herleitung der gesuchten Sätze dienen.

§ 3.

Man setze in (1) den Werth von A_2O_1 aus (4), so findet man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_2 \cos a_1 + A_2O_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 + OO_2 \sin \widehat{a_1a_2} \sin a_1, \\ A_1O_1 &= PA_2 \sin a_1 - A_2O_2 \cos \widehat{a_1a_2} \cos a_1 - OO_2 \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

In (7) setze man die Werthe von PA_2 und A_2O_2 aus (2), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 = PA_2 &[\cos a_1 \cos a_2 + \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \sin a_2] \\ &+ A_2O_2[\cos a_1 \sin a_2 - \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1] + OO_2 \sin \widehat{a_1a_2} \sin a_1, \\ A_1O_1 = PA_2 &[\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_2] \\ &+ A_2O_2[\sin a_1 \sin a_2 + \cos \widehat{a_1a_2} \cos a_1 \cos a_2] - OO_2 \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Man setze in (8) für A_3O_2 und OO_2 ihre Werthe aus (5):

$$\left.\begin{aligned} PA_1 = PA_3 &[\cos a_1 \cos a_2 + \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \sin a_2] \\ &+ A_3O_3[\cos a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} - \cos a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} + \sin \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \sin \widehat{a_2a_3}] \\ &+ OO_3[\cos a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3}], \\ A_1O_1 = PA_3 &[\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_2] \\ &+ A_3O_3[\sin a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} + \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} - \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2a_3}] \\ &+ OO_3[\sin a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2a_3} + \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} + \cos a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Hierin setze man für PA_3 und A_3O_3 ihre Werthe aus (3), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 = PA_1 &[\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 + \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \\ &\quad - \cos a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 + \sin a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} \sin a_3] \\ &+ A_1O_3[\cos a_1 \cos a_2 \sin a_3 + \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 - \cos a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \cos a_3 \\ &\quad + \cos a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} \cos a_3 - \sin a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} \cos a_3] \\ &+ OO_3[\cos a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1O_1 = PA_1 &[\sin a_1 \cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_2 \cos a_3 + \sin a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \\ &\quad + \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 - \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2a_3} \sin a_3]. \\ &+ A_1O_3[\sin a_1 \cos a_2 \sin a_3 - \cos a_1 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_2 \sin a_3 - \sin a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \cos a_3 \\ &\quad - \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} \cos a_3 + \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2a_3} \cos a_3]. \\ &+ OO_3[\sin a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2a_3} + \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} + \cos a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

In die Gleichung (11') setze man für $A_1 O_3$, OO_3 ihre Werthe aus (6), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 O_1 = PA_1[&\sin a_1 \cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1 \sin a_2 \cos a_3 \cos \widehat{a_1 a_2} + \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \\
&+ \cos a_1 \cos a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} - \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2 a_3} \sin a_3] \\
+ A_1 O_1[&\sin a_1 \cos a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_3 a_1} - \cos a_1 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_3 a_1} \\
&- \sin a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \cos \widehat{a_3 a_1} - \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \cos \widehat{a_3 a_1} \\
&+ \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \cos \widehat{a_3 a_1} + \sin a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_3 a_1} \\
&+ \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_3 a_1} + \cos a_1 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_3 a_1}] \\
+ OO_1[&\sin a_1 \cos a_2 \sin a_3 \sin \widehat{a_3 a_1} - \cos a_1 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_2 \sin a_3 \sin \widehat{a_3 a_1} \\
&- \sin a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_3 a_1} - \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_3 a_1} \\
&+ \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_3 a_1} - \sin a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_3 a_1} \\
&- \cos a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_3 a_1} - \cos a_1 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_3 a_1}].
\end{aligned}\right\} (11$$

§. 4.

Eine Reihe Gleichungen erhält man, wenn man in entgegengesetzter Ordnung in der Figur vorschreitet. Diese Gleichungen leiten sich leicht aus den aufgeführten ab, wenn man statt

$PA_1, PA_2, PA_3, A_2O_1, A_3O_2, A_1O_3, OO_1, OO_2, OO_3, A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3$

respective setzt:

$PA_1, PA_3, PA_2, A_3O_3, A_2O_2, A_1O_1, OO_3, OO_2, OO_1, A_1O_3, A_3O_2, A_2O_1$;

und statt

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1 a_2},\ \widehat{a_2 a_3},\ \widehat{a_3 a_1}$$

setzt:

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_3 a_3},\ \widehat{a_2 a_1},\ \widehat{a_1 a_3}.$$

Setzt man diess, so wird man folgende, den frühern analoge Gleichungen erhalten:

Aus (1):

$$PA_1 = PA_3 \cos a_3 + A_3 O_2 \sin a_3. \qquad (12)$$

Aus (7):

$$PA_1 = PA_3 \cos a_3 + A_3 O_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_3 + OO_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \sin a_3. \qquad (13)$$

Aus (8):

$$\left.\begin{aligned}
PA_1 = PA_2&[\cos a_3 \cos a_2 + \cos \widehat{a_3 a_2} \sin a_3 \sin a_2] \\
&+ A_2 O_2[\cos a_3 \sin a_2 - \cos a_2 \cos \widehat{a_3 a_2} \sin a_3] + OO_2 \sin \widehat{a_3 a_2} \sin a_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Aus (9):

$$\left.\begin{array}{l}PA_1 = PA_2[\cos a_3 \cos a_2 + \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \sin a_2] \\ + A_2O_1[\cos a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1a_2} - \cos a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_2a_3} \cos \widehat{a_1a_2} + \sin \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \sin \widehat{a_1a_2}] \\ + OO_1[\cos a_3 \sin a_2 \sin \widehat{a_1a_2} - \sin a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \sin \widehat{a_1a_2} - \sin a_3 \sin \widehat{a_2a_3} \cos \widehat{a_1a_2}]\end{array}\right\} \quad (15)$$

Aus (10):

$$\left.\begin{array}{l}PA_1 = PA_1[\cos a_3 \cos a_2 \cos a_1 + \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1 + \cos a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 \\ \qquad - \cos a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_2a_3} \cos \widehat{a_1a_2} \sin a_1 + \sin a_3 \sin \widehat{a_2a_3} \sin \widehat{a_1a_2} \sin a_1] \\ + A_1O_1[\cos a_3 \cos a_2 \sin a_1 + \cos \widehat{a_2a_3} \sin a_3 \sin a_2 \sin a_1 - \cos a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \cos a_1 \\ \qquad + \cos a_2 \sin a_3 \cos \widehat{a_2a_3} \cos \widehat{a_1a_2} \cos a_1 - \sin a_3 \sin \widehat{a_2a_3} \sin \widehat{a_1a_2} \cos a_1] \\ + OO_1[\cos a_3 \sin a_2 \sin \widehat{a_1a_2} - \sin a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2a_3} \sin \widehat{a_1a_2} - \sin a_3 \sin \widehat{a_2a_3} \cos \widehat{a_1a_2}].\end{array}\right\} \quad (16)$$

§. 5.

Aus den bis jetzt erhaltenen Gleichungen kann man nun schon das Folgende entnehmen.

Bezeichnet man, zur Abkürzung, in der Gleichung (10) den Koeffizienten von PA_1 mit h, den von A_1O_3 mit k, den von OO_3 mit n, so ist

$$PA_1 = PA_1h + A_1O_3k + OO_3n. \quad (10)$$

Nun haben wir aber über die Lage des Punktes O gar keine bestimmte Voraussetzung gemacht, sondern ihn lediglich im Innern der Pyramide vorausgesetzt. Nehmen wir nun an, er liege in der Fläche PA_1A_3, so ändert diess an den Winkeln, die in (10) vorkommen, nichts, sowie, wenn O in O_3 vorausgesetzt wird, nichts an der Länge von PA_1 und A_1O_3. Aber alsdann ist $OO_3 = 0$ und folglich

$$PA_1 = PA_1h + A_1O_3k. \quad (17)$$

Diese Gleichung, da sie in einem einzelnen Falle besteht, wird allgemein bestehen müssen, da die in (17) und (10) vorkommenden Grössen durchaus die gleichen sind. Setzt man also (17) in (10), so wird man haben:

$$\cos a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \cos a_2 \cos \widehat{a_1a_2} \sin \widehat{a_2a_3} - \sin a_1 \sin \widehat{a_1a_2} \cos \widehat{a_2a_3} = 0. \quad (I)$$

Verlegt man nun den Punkt O_3 in A_1, so wird an den in (17) vorkommenden Winkeln nichts geändert, nur wird $A_1O_3 = 0$, also

$$PA_1 = PA_1h, \quad (18)$$

woraus $h = 1$ und aus (17) $k = 0$ folgt. Also hat man noch:

$$1=\cos a_1\cos a_2\cos a_3+\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_1\sin a_2\cos a_3+\cos a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3$$
$$-\cos a_2\sin a_1\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3+\sin a_1\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin a_3. \quad \text{(II)}$$

$$0=\cos a_1\cos a_2\sin a_3+\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_1\sin a_2\sin a_3-\cos a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3$$
$$+\sin a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3-\sin a_1\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3. \quad \text{(III)}$$

Diese drei Gleichungen drücken nun bestimmte Beziehungen zwischen Linienwinkeln und Flächenwinkeln der dreiseitigen Ecke aus. Sie sind als allgemeiner Ausdruck einer Reihe von Beziehungen zu betrachten. So drückt (III) Relationen aus zwischen a_1, a_2, a_3 und den zwei dem ersten und letzten (a_1 und a_3) gegenüberliegenden Flächenwinkeln; sie wird also auch noch bestehen, wenn man

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3}$$

vertauscht mit

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2}.$$

Aehnliches gilt von den andern zwei Gleichungen.

Untersucht man die Gleichung (11), so sieht man zuerst, dass der Koeffizient von PA_1 Null ist, indem er aus (III) entsteht, wenn man die eben erwähnte Vertauschung vornimmt.

Man findet dann wie oben:

$$\left.\begin{aligned}1=&\sin a_1\cos a_2\sin a_3\cos\widehat{a_1a_3}-\cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\cos\widehat{a_1a_3}\sin a_3\\&-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_1a_3}-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\\&+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}+\sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}\\&+\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}+\cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}.\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned}0=&\sin a_1\cos a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}\\&-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}\\&+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}\\&-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}.\end{aligned}\right\}\text{(V)}$$

Untersucht man die Gleichung (16), so sieht man, dass sie identisch ist nach (II), (III) und (I), wenn man vertauscht

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3}$$

mit

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2}.$$

Diese Gleichung giebt also nichts Neues.

Aus (12) folgt ein Werth von PA_1, der dem in (9) gleich gesetzt werden kann. Beachtet man die Gleichung (I), so ergiebt sich daraus auf die oben angeführte Weise:

$$\cos a_3 = \cos a_1 \cos a_2 + \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 \sin a_2. \qquad \text{(VI)}$$

$$\sin a_3 = \cos a_1 \sin a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} - \cos a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_2 a_3} + \sin \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 \sin \widehat{a_2 a_3}. \qquad \text{(VII)}$$

Eben so findet man, wenn man die Werthe von PA_1 aus (13) und (8) gleich setzt und (VI) beachtet:

$$\cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_3 = \cos a_1 \sin a_2 - \cos a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1. \qquad \text{(VIII)}$$

$$\sin \widehat{a_2 a_3} \sin a_3 = \sin \widehat{a_1 a_2} \sin a_1. \qquad \text{(IX)}$$

Vergleicht man die Werthe von PA_1 aus (14) und (7), so erhält man (VI), (V), (IX); durch (15) und (1) aber: (I), (VII), (VI).

§. 6.

Setzt man ferner in die Gleichungen (1), (7), (8), (9), (11'), (11) die Werthe, wie sie für die andere Folge in §. 4. bezeichnet wurden, so erhält man:

$$A_2 O_2 = PA_3 \sin a_3 - A_3 O_3 \cos a_3. \qquad (18)$$

$$A_1 O_3 = PA_3 \sin a_3 - A_3 O_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 - OO_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3. \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} A_1 O_3 = {} & PA_2[\sin a_3 \cos a_2 - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2] \\ & + A_2 O_2[\sin a_3 \sin a_2 + \cos \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \cos a_2] - OO_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3. \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} A_1 O_3 = {} & PA_2[\sin a_3 \cos a_2 - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2] \\ & + A_2 O_1[\sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} + \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} - \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2}] \\ & + OO_1[\sin a_3 \sin a_2 \sin \widehat{a_2 a_1} + \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_1 a_2} + \cos a_3 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2}]. \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 O_3 = {} & PA_1[\sin a_3 \cos a_2 \cos a_1 - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2 \cos a_1 + \sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 \\ & + \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 - \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2} \sin a_1] \\ & + A_1 O_1[\sin a_3 \cos a_2 \sin a_1 - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2 \sin a_1 - \sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \\ & - \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 + \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1] \\ & + OO_1[\sin a_3 \sin a_2 \sin \widehat{a_1 a_2} + \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_1 a_2} + \cos a_2 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2}]. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 O_3 = {} & PA_1[\sin a_3 \cos a_2 \cos a_1 - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2 \cos a_1 + \sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 \\ & + \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \sin a_1 - \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2} \sin a_1] \\ & + A_1 O_3[\sin a_3 \cos a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1 a_3} - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2 \sin a_1 \cos \widehat{a_1 a_3} \\ & - \sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \cos \widehat{a_3 a_1} - \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \cos \widehat{a_3 a_1} \\ & + \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \cos \widehat{a_1 a_3} + \sin a_3 \sin a_2 \sin \widehat{a_1 a_2} \sin \widehat{a_3 a_1} \\ & + \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_1 a_2} \sin \widehat{a_3 a_1} + \cos a_3 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \sin \widehat{a_1 a_3}] \\ & + OO_3[\sin a_3 \cos a_2 \sin \widehat{a_1 a_3} - \cos a_3 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin a_2 \sin a_1 \sin \widehat{a_1 a_3} \\ & - \sin a_3 \sin a_2 \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_1 a_3} - \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_1 a_3} \\ & + \sin \widehat{a_2 a_3} \cos a_3 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos a_1 \sin \widehat{a_1 a_3} - \sin a_1 \sin a_2 \sin \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_3 a_1} \\ & - \cos a_3 \cos a_2 \cos \widehat{a_2 a_3} \sin \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_3 a_1} - \cos a_3 \sin \widehat{a_2 a_3} \cos \widehat{a_1 a_2} \cos \widehat{a_1 a_3}]. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Diese letztere Gleichung ist nach (IV), (V), (III) identisch, giebt also nichts Neues.

§. 7.

Da die Flächen im Punkte O ebenfalls eine Pyramide bilden, in deren Innerm der Punkt P liegt, so gelten alle Sätze, die wir im Vorstehenden für die erste Pyramide abgeleitet haben, auch für diese zweite. Man wird die neuen Sätze finden, wenn man statt

$$PA_1, PA_2, PA_3, A_2O_1, A_3O_2, A_1O_3, OO_1, OO_2, OO_3, A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3$$

setzt:

$$OO_1, OO_2, OO_3, A_2O_2, A_3O_3, A_1O_1, PA_2, PA_3, PA_1, A_2O_1, O_2A_3, O_3A_1;$$

und statt

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \widehat{a_1a_2}, \quad \widehat{a_2a_3}, \quad \widehat{a_3a_1}$$

setzt:

$$180-\widehat{a_1a_2},\ 180-\widehat{a_2a_3},\ 180-\widehat{a_3a_1},\ 180-a_2,\ 180-a_3,\ 180-a_1.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (I) bis (IX), so erhält man aus (I), (IV), (IX) Gleichungen, die durch einfache Vertauschungen zusammenfallen mit denen, aus welchen sie abgeleitet sind; indem man vertauscht

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_3a_1}$$

mit (resp.)

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2},$$

$$a_1,\ a_3,\ a_2,\ \widehat{a_1a_3},\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2},$$

$$a_2,\ a_1,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_3a_1},$$

was man offenbar darf.

Die 6 andern Gleichungen geben folgende neue Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}1=&-\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}+\cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}\\&+\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}+\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_2\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}\\&+\sin\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}.\end{aligned}\right\}\text{(X)}$$

$$\left.\begin{aligned}0=&\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}-\cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}\\&+\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}+\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_2\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\\&+\sin\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}.\end{aligned}\right\}\text{(XI)}$$

$$\left.\begin{aligned}0= & -\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}\sin a_1-\cos\widehat{a_1a_2}\cos a_2\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}\sin a_1\\ & -\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\sin a_1+\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_2\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\sin a_1\\ & +\sin a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}\sin a_1+\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin a_3\cos a_1\\ & -\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_2\sin a_3\cos a_1+\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\cos a_3\cos a_1.\end{aligned}\right\}\quad\text{(XII)}$$

$$-\cos\widehat{a_3a_1}=\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}-\cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}.\qquad\text{(XIII)}$$

$$\begin{aligned}\sin\widehat{a_3a_1}= & \cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3+\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_2\cos a_3\\ & +\sin a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin a_3.\end{aligned}\qquad\text{(XIV)}$$

$$\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}=\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}+\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}.\qquad\text{(XV)}$$

§. 8.

Setzt man in die Gleichungen des §. 6. die Werthe, wie sie zu Eingang des §. 7. angegeben wurden, so findet man:

Aus (18):

$$A_1O_1=OO_3\sin\widehat{a_3a_1}+A_3O_3\cos\widehat{a_3a_1}.$$

Setzt man diesen Werth von A_1O_1 dem in (11') gleich, so findet man die Gleichungen (III) und (XIV) und

$$\left.\begin{aligned}\cos\widehat{a_3a_1}= & \sin a_1\cos a_2\sin a_3-\cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\\ & -\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3.\end{aligned}\right\}\quad\text{(XVI)}$$

Aus (19):

$$A_1O_1=OO_3\sin\widehat{a_3a_1}-A_3O_3\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}+PA_3\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}.$$

Dies dem Werthe von A_1O_1 in (9) gleich gesetzt, giebt (VIII), (XIV) und

$$\begin{aligned}-\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}= & \sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}+\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\\ & -\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}.\end{aligned}\qquad\text{(XVII)}$$

Aus (20) folgt ein Werth von A_1O_1, der, dem in (8) gleichgesetzt, führt zu den Gleichungen (VIII), (XV) und

$$\sin\widehat{a_3a_1}\sin\widehat{a_2a_3}-\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\cos\widehat{a_2a_3}=\sin a_1\sin a_2+\cos\widehat{a_1a_2}\cos a_1\cos a_2.\qquad\text{(XVIII)}$$

Aus (21) folgt ebenfalls ein Werth von A_1O_1, der, verglichen mit dem in (7), zu den Gleichungen (VII), (XVII), (XV) führt.

Endlich ergiebt sich aus (22) ein Werth von A_1O_1, der verglichen mit dem in (1) zu (VII), (XI) führt und zu

$$\left.\begin{aligned}\cos a_1= & \sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}+\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\\ & +\sin\widehat{a_1a_3}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}-\cos\widehat{a_3a_1}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\\ & -\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}\sin a_2\cos\widehat{a_1a_2}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIX)}$$

Hiermit ist die Reihe der Untersuchungen geschlossen und als Resultat haben wir 19 Beziehungen erhalten; diese gelten eben so gut für ein sphärisches Dreieck, als für die körperliche Ecke.

§. 9.

Bezeichnet man die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks (in Graden) mit a, b, c; die drei gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, so hat man statt

$$a_1,\; a_2,\; a_3,\; \widehat{a_1 a_2},\; \widehat{a_2 a_3},\; \widehat{a_3 a_1}$$

zu setzen

$$a,\; b,\; c,\; C,\; A,\; B;$$

und man erhält somit folgende 19 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}1 = {} & \sin a\cos b\sin c\cos B - \cos a\cos C\sin b\cos B\sin c \\ & - \sin a\sin b\cos A\cos c\cos B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\cos B \\ & + \sin C\cos a\sin A\cos c\cos B + \sin a\sin b\sin A\sin B \\ & + \cos a\cos b\cos C\sin A\sin B + \cos a\sin C\cos A\sin B.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}0 = {} & -\sin C\cos A\sin B\sin a - \cos C\cos b\sin A\sin B\sin a \\ & - \sin C\sin A\cos c\cos B\sin a + \cos C\cos A\cos b\cos c\cos B\sin a \\ & + \sin b\cos C\sin c\cos B\sin a + \sin C\sin A\sin c\cos a \\ & - \cos C\cos A\cos b\sin c\cos a + \cos C\sin b\cos c\cos a.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}0 = {} & \sin a\cos b\sin c\sin B - \cos a\cos C\sin b\sin c\sin B \\ & - \sin a\sin b\cos A\cos c\sin B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\sin B \\ & + \sin C\cos a\sin A\cos c\sin B - \sin a\sin b\sin A\cos B \\ & - \cos a\cos b\cos C\sin A\cos B - \cos a\sin C\cos A\cos B.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\cos a = {} & \sin C\cos A\sin B + \sin C\sin A\cos c\cos B + \sin B\sin A\cos b\cos C \\ & - \cos B\cos A\cos c\cos b\cos C - \sin c\cos B\sin b\cos C.\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\cos B = {} & \sin a\cos b\sin c - \cos a\cos C\sin b\sin c - \sin a\sin b\cos A\cos c \\ & - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c + \sin A\cos a\cos c\sin C.\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & \cos a\cos b\sin c + \cos C\sin a\sin b\sin c - \cos a\sin b\cos A\cos c \\ & + \sin a\cos b\cos C\cos A\cos c - \sin a\sin C\sin A\cos c.\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & \cos C\cos A\sin B - \cos b\sin C\sin A\sin B + \cos C\sin A\cos c\cos B \\ & + \sin C\cos A\cos b\cos c\cos B + \sin C\sin b\sin c\cos B.\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}1 = {} & \cos a\cos b\cos c + \cos C\sin a\sin b\cos c + \cos a\sin b\cos A\sin c \\ & - \cos b\sin a\cos C\cos A\sin c + \sin a\sin C\sin A\sin c.\end{aligned} \tag{8}$$

$$1 = -\cos C \cos A \cos B + \cos b \sin C \sin A \cos B + \cos C \sin A \cos c \sin B$$
$$+ \cos A \sin C \cos b \cos c \sin B + \sin C \sin b \sin c \sin B. \qquad (9)$$

$$-\cos c \cos B = \sin a \sin b \cos A + \cos a \cos b \cos A \cos C - \cos a \sin A \sin C. \qquad (10)$$

$$\sin B \sin A - \cos c \cos B \cos A = \sin a \sin b + \cos C \cos a \cos b. \qquad (11)$$

$$\sin c = \cos a \sin b \cos A - \cos b \sin a \cos A \cos C + \sin a \sin A \sin C. \qquad (12)$$

$$\sin B = \cos C \sin A \cos c + \cos A \sin C \cos b \cos c + \sin b \sin c \sin C. \qquad (13)$$

$$0 = \cos a \sin b \sin A - \sin a \cos b \cos C \sin A - \sin a \sin C \cos A. \qquad (14)$$

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos b \cos C \sin a. \qquad (15)$$

$$-\cos B = \cos A \cos C - \cos b \sin A \sin C. \qquad (16)$$

$$\cos c \sin B = \cos C \sin A + \cos A \sin C \cos b. \qquad (17)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \qquad (18)$$

$$\sin A \sin c = \sin a \sin C. \qquad (19)$$

Diese (19) merkwürdigen Relationen finden in jedem sphärischen Dreiecke statt. Da aus drei gegebenen Stücken die drei andern müssen gesucht werden können und von diesen dreien immer Sin. und Cos. gesucht werden muss, so sind 6 Gleichungen zur Auflösung nöthig. Da aber diese Gleichungen nicht vom ersten Grade sind, so ist eine weitere siebente nöthig, um die Bestimmungen unzweideutig zu machen. Im Allgemeinen werden also für ein sphärisches Dreieck sieben, alle Winkel umfassende, wesentlich verschiedene Relationen Statt haben müssen. Dies wollen wir im folgenden Paragraphen betrachten. Wir bemerken hier nur, dass die vorstehenden 19 Sätze alle wahr sind, wenn man vertauscht

	$a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C$
mit	$b,\ c,\ a,\ B,\ C,\ A$
oder	$c,\ a,\ b,\ C,\ A,\ B$
oder	$a,\ c,\ b,\ A,\ C,\ B$
oder	$c,\ b,\ a,\ C,\ B,\ A$
oder	$b,\ a,\ c,\ B,\ A,\ C.$

§. 10.

Die sieben Grundgleichungen, von denen wir im §. 9. gesprochen, sind offenbar (1), (2), (3), (4), (5), (10, (11). Aus ihnen leiten sich alle anderen ab. Auf folgende Art kann man alle 12 anderen erhalten.

Man multiplizire (5) mit $\cos c$ und addire (10), so erhält man eine Gleichung, die aus (6) entsteht, wenn man a und c vertauscht; (6) folgt also aus (5) und (10).

Multiplizirt man (4) mit $\cos B$, wechselt in (10) a und c und addirt, so erhält man eine Gleichung, die (7) giebt, wenn man B und C vertauscht; (7) folgt aus (4) und (10).

Multiplizirt man (4) mit $\sin a$ und addirt (2), so erhält man (12).

Multiplizirt man (5) mit $\sin B$ und subtrahirt (3), so erhält man (13).

Multiplizirt man (10) mit $\cos c$ und addirt (5), so erhält man (15).

Multiplizirt man (10) mit $\cos B$ und addirt (4), nachdem a und c gewechselt wurden, so erhält man (17).

Multiplizirt man (13) mit $\cos c$ und subtrahirt (17), so erhält man (14).

Setzt man den Werth von $\cos a \sin b \cos A - \sin a \sin A \sin C + \sin a \cos b \cos A \cos C$ aus (12) in (6), so erhält man (18).

Zieht man die Werthe von $\sin a$ und $\cos a$ aus (12) und (18) und setzt sie in (1), so erhält man (9).

Multiplizirt man (7) mit $\sin B$ und (9) mit $\cos B$ und subtrahirt, so findet man (16).

Setzt man in (1) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ aus (13) und (16), so erhält man (8).

Setzt man aus (13) und (16) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ in (11) und beachtet (18), so erhält man (19).

Die Ordnung, in der also die Gleichungen des §. 9. zu folgen haben, ist:

(1), (2), (3), (4), (5), (10), (11) — Grundgleichungen.
(6) abgeleitet aus (5) und (10);
(7) „ „ (4) „ (10);
(12) „ „ (2) „ (4);
(13) „ „ (3) „ (5);
(15) „ „ (5) „ (10);
(17) „ „ (4) „ (10);
(14) „ „ (13) „ (17);
(18) „ „ (6) „ (12);
(9) „ „ (1) „ (12) und (18);
(16) „ „ (7) „ (9);
(8) „ „ (1) „ (13) und (16);
(19) „ „ (11) „ (13) und (16) und (18).

Dadurch ist nun thatsächlich nachgewiesen, dass jene 19 Gleichungen nicht lauter Grundgleichungen sind. Aber es hat Doctor A. Müller neue, sehr schöne und symmetrische Relationen aufgestellt. Wir übergehen hier die Anwendungen, da sie nicht im Zwecke des gegenwärtigen Aufsatzes liegen. Nur wollen wir noch zeigen, wie die Gaussischen Formeln unmittelbar abgeleitet werden können, nicht zu gedenken der Schaar neuer Sätze, die durch Kombination der 19 Gleichungen gewonnen werden könnten.

§. 11.

Die Gleichung (16) giebt

$$-\cos C = \cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B.$$

Addirt man nun die Gleichungen (18), (11) und diese Gleichung, so erhält man

$$\cos c + \sin A \sin B - \cos c \cos A \cos B + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C - \cos C$$

oder

$$\cos c + \cos(A-B) - \cos c \cos(A-B) = \cos(a-b) + \cos C \cos(a-b) - \cos C$$

also auch

$$1 - \cos c - \cos(A-B) + \cos c \cos(A-B) = 1 - \cos(a-b) - \cos C \cos(a-b) + \cos C$$

oder

$$(1-\cos(A-B))(1-\cos c) = (1-\cos(a-b))(1+\cos C),$$

d. i.

$$\sin^2\frac{A-B}{2}.\sin^2\frac{c}{2} = \sin^2\frac{a-b}{2}.\cos^2\frac{C}{2}$$

oder

$$\sin\frac{A-B}{2}.\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}.\cos\frac{C}{2}. \quad (A)$$

Aus den drei Gleichungen (18), (11), (16) ergiebt sich:

$$1+\cos C+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C+\sin a\sin b+\cos a\cos b\cos C = 1-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c+\cos c+\sin A\sin B-\cos A\cos B\cos c,$$

d. i.

$$1+\cos C+\cos(a-b)+\cos(a-b)\cos C = 1+\cos c-\cos(A+B) - \cos c\cos(A+B)$$

oder

$$(1+\cos(a-b))(1+\cos C) = (1-\cos(A+B))(1+\cos c),$$

woraus

$$\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}.\cos\frac{C}{2}. \quad (B)$$

Aus denselben drei Gleichungen zieht man ferner:

$$1-\cos C-\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos C+\sin a\sin b+\cos a\cos b\cos C$$
$$=1+\cos A\cos B-\sin A\sin B\cos c-\cos c+\sin A\sin B-\cos A\cos B\cos c$$

oder

$$(1-\cos(a+b))(1-\cos C)=(1+\cos(A+B))(1-\cos c),$$

woraus

$$\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{c}{2}.\quad (C)$$

Endlich aus den nämlichen drei Gleichungen:

$$1-\cos C+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C-\sin a\sin b-\cos a\cos b\cos C$$
$$=1+\cos A\cos B-\sin A\sin B\cos c+\cos c-\sin A\sin B+\cos A\cos B\cos c,$$

woraus

$$(1-\cos C)(1+\cos(a+b))=(1+\cos c)(1+\cos(A+B)),$$

d. i. endlich

$$\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{c}{2},\quad (D)$$

welches die vier Gaussischen Formeln sind.

XXV.

Ueber die in dem Aufsatze Theil III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Die in dem Aufsatze Thl. III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe, für welche, wenn man sie aus einem rein geometrischen Gesichtspunkte auffasst, auch Herr Oberlehrer Seydewitz an

dem Gymnasium zu Heiligenstadt in dem Aufsatze Theil III. Nr. XLI. eine Auflösung durch Construction gegeben hat, scheint mir für die Praxis nicht unwichtig zu sein und zuweilen eine vortheilhafte Anwendung in derselben zu gestatten. Und wenn mir nun auch jetzt noch die a. a. O. gegebene, eine doppelte Anwendung des gewöhnlich nach Pothenot benannten Problems in Anspruch nehmende Auflösung gerade für die Praxis die zweckmässigste zu sein scheint, so will ich doch jetzt im Folgenden noch eine analytische, die Anwendung des Pothenotschen Problems nicht voraussetzende Auflösung dieser Aufgabe geben, welche mir nicht ohne Interesse zu sein scheint.

Es seien also, indem wir uns jetzt theilweise einer anderen Bezeichnung, als in dem Aufsatze Thl. III. Nr. VII. bedienen, M und M_1 zwei Punkte, deren Lage aus einer früheren Messung bekannt ist. Man kann aber keinen dieser beiden Punkte von dem andern aus sehen. Dagegen sieht man sowohl von M, als auch von M_1 aus drei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte M', M_1', M_2', und misst in M die 180° nicht übersteigenden Winkel $M'MM_1'$, $M'MM_2'$, $M_1'MM_2'$; in M_1 die 180° nicht übersteigenden Winkel $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ $M_1'M_1M_2'$. Ist es dann möglich, noch die drei Winkel $M_1'M'M_2'$, $M_2'M_1'M'$, $M'M_2'M_1'$ des durch die Punkte M', M_1', M_2' bestimmten Dreiecks $M'M_1'M_2'$ zu messen, so kann man die Lage der drei Punkte M', M_1', M_2' bestimmen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wir legen ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde und bezeichnen in Bezug auf dasselbe die bekannten Coordinaten der Punkte M und M_1 respective durch x, y und x_1, y_1; die unbekannten Coordinaten der Punkte M', M_1', M_2' respective durch x', y'; x_1', y_1'; x_2' y_2'.

Durch den Punkt M denken wir uns ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta$ gelegt, und bezeichnen in Bezug auf dieses neue System die Coordinaten der Punkte M', M_1', M_2' respective durch ξ', η'; ξ_1', η_1'; ξ_2', η_2'; so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x'=x+\xi', & y'=y+\eta'; \\ x_1'=x+\xi_1', & y_1'=y+\eta_1'; \\ x_2'=x+\xi_2', & y_2'=y+\eta_2'. \end{cases}$$

Die von den Linien MM', MM_1', MM_2', welche durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2 bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der ξ an durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel wollen wir durch φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ bezeichnen, wo α und β sich immer aus den gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkeln $M'MM_1'$, $M'MM_2'$ leicht werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$2)\quad \begin{cases} \xi'=\varrho\cos\varphi, & \eta'=\varrho\sin\varphi; \\ \xi_1'=\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & \eta_1'=\varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ \xi_2'=\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & \eta_2'=\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

also nach 1)

$$3)\begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi, & y'=y+\varrho\sin\varphi;\\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);\\ x_2'=x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y_2'=y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta);\end{cases}$$

und folglich durch Elimination von ϱ, ϱ_1, ϱ_2:

$$4)\begin{cases} x\sin\varphi-y\cos\varphi = x'\sin\varphi-y'\cos\varphi;\\ x\sin(\varphi+\alpha)-y\cos(\varphi+\alpha)=x'\sin(\varphi+\alpha)-y'\cos(\varphi+\alpha);\\ x\sin(\varphi+\beta)-y\cos(\varphi+\beta)=x'\sin(\varphi+\beta)-y'\cos(\varphi+\beta).\end{cases}$$

Die von den Linien M_1M', M_1M_1', M_1M_2', welche durch ϱ', ϱ_1', ϱ_2' bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M_1 gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Art wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ genommenen Winkel wollen wir durch φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ bezeichnen, wo α_1 und β_1 sich immer leicht aus den gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkeln $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, erhält man ganz auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen:

$$5)\begin{cases} x'=x_1+\varrho'\cos\varphi_1, & y'=y_1+\varrho'\sin\varphi_1;\\ x_1'=x_1+\varrho_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y_1'=y_1+\varrho_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1);\\ x_2'=x_1+\varrho_2'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_2'=y_1+\varrho_2'\sin(\varphi_1+\beta_1);\end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von ϱ', ϱ_1', ϱ_2' die Gleichungen:

$$6)\begin{cases} x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1 = x'\sin\varphi_1-y'\cos\varphi_1;\\ x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)=x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1);\\ x_1\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_1\cos(\varphi_1+\beta_1)=x_2'\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1)\end{cases}$$

ergeben.

Bezeichnet man nun die Seiten $M'M_1'$, $M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ respective durch r, r_1 und die von diesen beiden Seiten mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M' gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ und φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ genommenen Winkel durch ψ, $\psi+\gamma$, wo γ offenbar immer aus dem gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkel $M_1'M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ leicht gefunden werden kann; so hat man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichungen:

$$7)\begin{cases} x_1'=x'+r\cos\psi,\\ y_1'=y'+r\sin\psi\end{cases}$$

und

$$8) \quad \begin{cases} x_2' = x' + r_1 \cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + r_1 \sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$r : r_1 = \sin M'M_2'M_1' : \sin M'M_1'M_2'$$

ist, und die Winkel des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ gemessen worden sind, so ist das Verhältniss

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin M'M_1'M_2'}{\sin M'M_2'M_1'}$$

bekannt, und wir können folglich

$$9) \quad r_1 = \mu r,$$

wo μ eine bekannte Grösse bezeichnet, setzen, wodurch die Gleichungen (8) in die folgenden übergehen:

$$10) \quad \begin{cases} x_2' = x' + \mu r \cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + \mu r \sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Nach 4), 6), 7), 10) haben wir also die zehn folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x \sin\varphi - y \cos\varphi &= x' \sin\varphi - y' \cos\varphi, \\
x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) &= x_1' \sin(\varphi+\alpha) - y_1' \cos(\varphi+\alpha), \\
x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) &= x_2' \sin(\varphi+\beta) - y_2' \cos(\varphi+\beta); \\
x_1 \sin\varphi_1 - y_1 \cos\varphi_1 &= x' \sin\varphi_1 - y' \cos\varphi_1, \\
x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1) &= x_1' \sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1' \cos(\varphi_1+\alpha_1), \\
x_1\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_1\cos(\varphi_1+\beta_1) &= x_2' \sin(\varphi_1+\beta_1) - y_2' \cos(\varphi_1+\beta_1); \\
x_1' &= x' + r\cos\psi, \\
y_1' &= y' + r\sin\psi; \\
x_2' &= x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\
y_2' &= y' + \mu r\sin(\psi+\gamma)
\end{aligned}$$

zwischen den zehn unbekannten Grössen x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; r, φ, φ_1, ψ; aus denen diese zehn unbekannten Grössen bestimmt werden müssen.

Eliminirt man aus diesen zehn Gleichungen die vier unbekannten Grössen x_1', y_1'; x_2', y_2'; so erhält man:

$$11) \quad \begin{cases}
(x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\
(x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha) + r\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\
(x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta) + \mu r\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma); \\
(x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1) + r\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1) + \mu r\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma);
\end{cases}$$

welche sechs Gleichungen bloss noch die sechs unbekannten Grössen x', y', r, φ, φ_1, ψ enthalten.

Aus der ersten und zweiten Gleichung des ersten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen, folgt leicht:

$$12) \begin{cases} (x-x')\sin\alpha = r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\ (y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha); \end{cases}$$

und eben so folgt aus der ersten und dritten Gleichung desselben Systems:

$$13) \begin{cases} (x-x')\sin\beta = \mu r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma), \\ (y-y')\sin\beta = \mu r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma). \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus dem zweiten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen:

$$14) \begin{cases} (x_1-x')\sin\alpha_1 = r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\ (y_1-y')\sin\alpha_1 = r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1); \end{cases}$$

und

$$15) \begin{cases} (x_1-x')\sin\beta_1 = \mu r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma), \\ (y_1-y')\sin\beta_1 = \mu r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$16) \begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\mu\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)}, \\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\mu\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$17) \begin{cases} \frac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)} = \mu\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ \frac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)} = \mu\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$18) \begin{cases} \tan(\varphi-\psi) = -\frac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \tan(\varphi_1-\psi) = -\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω, ω' und ω_1, ω_1' mittelst der Formeln:

$$19) \begin{cases} \tan\omega = \frac{\mu\sin(\beta-\gamma)}{\cot\alpha\sin\beta}, \quad \tan\omega' = -\frac{\mu\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta}; \\ \tan\omega_1 = \frac{\mu\sin(\beta_1-\gamma)}{\cot\alpha_1\sin\beta_1}, \quad \tan\omega_1' = -\frac{\mu\cos(\beta_1-\gamma)}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

so ist

$$20)\quad \begin{cases} \tang(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \tang(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$21)\quad \varphi-\psi=\Theta,\ \varphi_1-\psi=\Theta_1;$$

also

$$22)\quad \begin{cases} \tang\Theta = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \tang\Theta_1 = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} \tang\Theta = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \tang\Theta_1 = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}; \end{cases}$$

so erhalten die Gleichungen 11) folgende Form:

$$24)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\ (x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha)+r\sin(\alpha+\Theta), \\ (x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta)+\mu r\sin(\beta-\gamma+\Theta); \\ (x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)+r\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)+\mu r\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$25)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\alpha)-(y-y')\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\Theta_1)} \end{cases}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\beta)-(y-y')\cos(\varphi+\beta)}{\mu\sin(\beta-\gamma+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)}{\mu\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)}. \end{cases}$$

Setzt man sowohl die beiden Werthe von r in 25), als auch die beiden Werthe von r in 26) einander gleich und verbindet mit

den hieraus sich ergebenden Gleichungen die erste und vierte der Gleichungen 24); so erhält man die vier folgenden, die unbekannten Grössen x', y', φ, φ_1 enthaltenden Gleichungen:

$$27)\begin{cases} (x-x')\sin\varphi=(y-y')\cos\varphi, \\ (x_1-x')\sin\varphi_1=(y_1-y')\cos\varphi_1, \\ (x-x')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin(\varphi+\alpha)-(x_1-x')\sin(\alpha+\Theta)\sin(\varphi_1+\alpha_1) \\ =(y-y')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos(\varphi+\alpha)-(y_1-y')\sin(\alpha+\Theta)\cos(\varphi_1+\alpha_1), \\ (x-x')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin(\varphi+\beta)-(x_1-x')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin(\varphi_1+\beta_1) \\ =(y-y')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos(\varphi+\beta)-(y_1-y')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos(\varphi_1+\beta_1). \end{cases}$$

Bestimmt man aus der ersten und zweiten Gleichung x' und y', so erhält man, weil nach 21)

$$28)\quad \varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1$$

ist:

$$29)\begin{cases} x'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\cos\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\cos\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)}, \\ y'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\sin\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\sin\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)}. \end{cases}$$

Bekanntlich ist aber

$$\begin{aligned} 2\sin\varphi\cos\varphi_1 &= \sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1) \\ &= \sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1), \\ 2\cos\varphi\sin\varphi_1 &= -\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1) \\ &= -\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1), \\ 2\sin\varphi\sin\varphi_1 &= \cos(\varphi-\varphi_1)-\cos(\varphi+\varphi_1) \\ &= \cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\varphi+\varphi_1), \\ 2\cos\varphi\cos\varphi_1 &= \cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_1) \\ &= \cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\varphi+\varphi_1); \end{aligned}$$

folglich nach 29):

$$30)\begin{cases} x'=\dfrac{(x+x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)}, \\ y'=\dfrac{(x-x_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(y+y_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(x-x_1)\cos(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\sin(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)}. \end{cases}$$

Aus der ersten, zweiten und dritten der Gleichungen 27) erhält man, wenn man zuerst $y-y'$ und y_1-y', dann $x-x'$ und x_1-x' eliminirt, ohne Schwierigkeit die beiden Gleichungen:

$$31)\begin{cases}(x-x')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1\\=(x_1-x')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi,\\(y-y')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1\\=(y_1-y')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi;\end{cases}$$

und eben so leicht erhält man aus der ersten, zweiten und vierten der Gleichungen 27) die beiden Gleichungen:

$$32)\begin{cases}(x-x')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1\\=(x_1-x')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi,\\(y-y')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1\\=(y_1-y')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi.\end{cases}$$

Aus 31) folgt.

$$33)\begin{cases}x'=\dfrac{x\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi},\\y'=\dfrac{y\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi};\end{cases}$$

und aus 32) erhält man:

$$34)\begin{cases}x'=\dfrac{x\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi},\\y'=\dfrac{y\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}.\end{cases}$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von x' aus 30) und 33) einander gleich, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn der Kürze wegen

$$35)\begin{cases}A=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\},\\B=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\},\\C=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1),\\D=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\end{cases}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$36)\quad\frac{A\cos\varphi_1+B\cos\varphi}{C\cos\varphi_1-D\cos\varphi}=(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1).$$

Weil aber

$$\varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1,$$

und folglich offenbar

$$37)\begin{cases}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1),\\\varphi_1=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{cases}$$

ist, so ist nach 36)

$$38)\ (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}$$

oder

$$39)\ (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}.$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin(\varphi+\varphi_1)=\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2},$$
$$\cos(\varphi+\varphi_1)=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$

ist, so wird die vorstehende Gleichung:

$$40)\ \frac{2(x-x_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\}}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)},$$

und enthält unter dieser Form bloss noch die eine unbekannte Grösse $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$.

Ordnet man diese Gleichung gehörig, so erhält sie folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}41)\ 0=&\{A+B+(C-D)(y-y_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\
&+\{(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\
&\qquad+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\\
&+\{(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\
&\qquad-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\\
&+\{A-B-(C+D)(y-y_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^3.\end{aligned}$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$A+B+(C-D)(y-y_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\sin(\theta-\theta_1)+(y-y_1)(1+\cos(\theta-\theta_1))\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\sin(\theta-\theta_1)-(y-y_1)(1+\cos(\theta-\theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1),$$

und auf ähnliche Weise:

$$A-B-(C+D)(y-y)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\sin(\theta-\theta_1)-(y-y_1)(1-\cos(\theta-\theta_1))\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\sin(\theta-\theta_1)+(y-y_1)(1-\cos(\theta-\theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1).$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)(\sin(\theta-\theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1))\\+(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{array}\right\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{array}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$

und auf ähnliche Art

$$(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{array}\right\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\+(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{array}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$42)\quad K=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}$$

und

$$43)\quad L=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\};$$

so ist

$$A+B+(C-D)(y-y_1)=2K\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1,$$
$$A-B-(C+D)(y-y_1)=2L\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1);$$
$$(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$
$$=-2L\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)^2,$$
$$(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$
$$=-2K\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)^2.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 41) ein, so wird dieselbe:

$$44)\ 0 = \begin{array}{l} K\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2 \\ -L\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ -K\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2 \\ +L\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^3, \end{array}$$

oder

$$45)\ 0 = K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\},$$

oder

$$46)\ 0 = \{1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\}\{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\},$$

oder

$$47)\ 0 = \begin{array}{l} \{1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\} \\ \times\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\} \\ \times\{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\}. \end{array}$$

Diese Gleichung des dritten Grades zerfällt also in die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$\begin{array}{l} 1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0, \\ 1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0, \\ K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0; \end{array}$$

aus denen sich die drei folgenden Werthe von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ ergeben:

$$48)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \begin{cases} \cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) \\ -\cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1). \\ \dfrac{K}{L} \end{cases}$$

Wir wollen nun die, absolut genommen, kleinsten Werthe, welche Θ und Θ_1 in Folge der Gleichungen 22) oder 23) haben können, respective durch δ und δ_1 bezeichnen. Dann ist, wenn n und n_1 zwei beliebige positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, nach den genannten Gleichungen allgemein

$$49)\ \Theta = \delta + n\pi,\quad \Theta_1 = \delta_1 + n_1\pi$$

und folglich

$$50)\ \Theta - \Theta_1 = \delta - \delta_1 + (n-n_1)\pi.$$

Also ist nach 35), wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

$$51)\quad \begin{cases} A'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)+(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ B'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)-(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ C'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1), \\ D'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta) \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$52)\quad A=A'(-1)^n,\ B=B'(-1)^{n_1},\ C=C'(-1)^{n_1},\ D=D'(-1)^n.$$

Setzen wir nun zuerst

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\cot\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$

oder

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\tan\tfrac{1}{2}\{\pi-(\theta-\theta_1)\},$$

so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=(k+\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$

ist, so ist

$$53)\quad \varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi,\ \varphi_1=(k+\tfrac{1}{2})\pi-(\theta-\theta_1),$$

also nach 50)

$$54)\quad \varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi,\ \varphi_1=(k-n+n_1+{}^1)\pi-(\delta-\delta_1),$$

und folglich

$$55)\quad \begin{cases} \sin\varphi=(-1)^k,\ \cos\varphi=0; \\ \sin\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\cos(\delta-\delta_1), \cos\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\sin(\delta-\delta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die folgenden Gleichungen:

$$C(x-x')\cos\varphi_1=D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1=D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

$$56)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 55) ein, so erhält man:

$$(-1)^{k-n+n_1}.\,C'(x-x')\sin(\delta-\delta_1)=0,$$
$$(-1)^{k-n+n_1}.\,C'(y-y')\cos(\delta-\delta_1)=(-1)^{k+n-n_1}.\,D'(y_1-y');$$

d. i.

$$57)\quad \begin{cases} C'(x-x')\sin(\delta-\delta_1)=0, \\ C'(y-y')\cos(\delta-\delta_1)=D'(y_1-y'); \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen x' und y' bestimmt werden müssen, was keine Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r würden sich aus dem Obigen verschiedene Ausdrücke ableiten lassen. Nach der zweiten der Gleichungen 12) ist aber z. B.

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha);$$

und weil nun nach 21), 49) und 54)

$$58)\quad \psi=(k-n+\tfrac{1}{2})\pi-\delta,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$59)\quad (y-y')\sin\alpha=(-1)^{k+n}.\,r\sin(\alpha+\delta),$$

mittelst welcher Gleichung r bestimmt werden muss. Da r stets eine positive Grösse ist, so lässt sich mittelst dieser Gleichung auch beurtheilen, ob $k+n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Hat man r, so ergiebt sich r_1 mittelst der aus 9) bekannten Formel:

$$60)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man endlich nach 7), 8), 58) die folgenden Gleichungen:

$$61)\quad \begin{cases} x_1'=x'+(-1)^{k-n}.\,r\sin\delta, \\ y_1'=y'+(-1)^{k-n}.\,r\cos\delta; \end{cases}$$

und

$$62)\quad \begin{cases} x_2'=x'+(-1)^{k-n}.\,r_1\sin(\delta-\gamma), \\ y_2'=y'+(-1)^{k-n}.\,r_1\cos(\delta-\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$\frac{(-1)^{k-n}}{(-1)^{k+n}}=(-1)^{-2n}=1$$

ist, so ist

$$(-1)^{k-n}=(-1)^{k+n};$$

und folglich

$$63)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{k+n}.r\sin\delta, \\ y_1' = y' + (-1)^{k+n}.r\cos\delta; \end{cases}$$

und

$$64)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{k+n}.r_1\sin(\delta-\gamma), \\ y_2' = y' + (-1)^{k+n}.r_1\cos(\delta-\gamma); \end{cases}$$

welche Formeln keine Zweideutigkeit zulassen, weil man nach dem Obigen weiss, ob $k+n$ gerade oder ungerade ist.

Setzen wir ferner

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = -\cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

oder

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \tang\tfrac{1}{2}\{(\Theta-\Theta_1)-\pi\},$$

so ist, wenn wieder k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = (k-\tfrac{1}{2})\pi + \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

ist, so ist

$$65)\quad \varphi = (k-\tfrac{1}{2})\pi + (\Theta-\Theta_1),\quad \varphi_1 = (k-\tfrac{1}{2})\pi;$$

also nach 50)

$$66)\quad \varphi = (k+n-n_1-\tfrac{1}{2})\pi + (\delta-\delta_1),\quad \varphi_1 = (k-\tfrac{1}{2})\pi;$$

und folglich

$$67)\quad \begin{cases} \sin\varphi = -(-1)^{k+n-n_1}.\cos(\delta-\delta_1),\ \cos\varphi = (-1)^{k+n-n_1}.\sin(\delta-\delta_1); \\ \sin\varphi_1 = -(-1)^k,\ \cos\varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die Gleichungen

$$C(x-x')\cos\varphi_1 = D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1 = D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

$$68)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 67) ein, so erhält man

$$0=(-1)^k.D'(x_1-x')\sin(\delta-\delta_1),$$
$$-(-1)^k.C'(y-y')=-(-1)^k.D'(y_1-y')\cos(\delta-\delta_1);$$

d. i.

$$69)\quad \begin{cases} D'(x_1-x')\sin(\delta-\delta_1)=0, \\ D'(y_1-y')\cos(\delta-\delta_1)=C'(y-y'); \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen x' und y' bestimmt werden müssen, was keine Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r kann man wieder die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha)$$

benutzen. Weil aber nach 21), 49) und 66)

$$70)\quad \psi=(k-n_1-\tfrac{1}{2})\pi-\delta_1,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$71)\quad (y-y')\sin\alpha=-(-1)^{k-n_1}.r\cos(\delta-\delta_1)\sin(\alpha+\delta),$$

mittelst welcher Gleichung r bestimmt werden muss. Weil r stets positiv ist, so weiss man auch, ob $k-n_1$ gerade oder ungerade ist.

Hat man r, so ergiebt sich r_1 mittelst der aus 9) bekannten Formel:

$$72)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man endlich nach 7), 8), 70) die Gleichungen:

$$73)\quad \begin{cases} x_1'=x'+(-1)^{k-n_1}.r\sin\delta_1, \\ y_1'=y'-(-1)^{k-n_1}.r\cos\delta_1; \end{cases}$$

und

$$74)\quad \begin{cases} x_2'=x'+(-1)^{k-n_1}.r_1\sin(\delta_1-\gamma), \\ y_2'=y'-(-1)^{k-n_1}.r_1\cos(\delta_1-\gamma); \end{cases}$$

wo keine Zweideutigkeit bleibt, da man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $k-n_1$ gerade oder ungerade ist.

Setzen wir endlich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{K}{L},$$

so ist nach 35), 42), 43), wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C+D)(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)}{(C-D)(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)},$$

und nach 50) ist

$$\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi.$$

Ist nun $n-n_1$ eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\ =\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\ +\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\ =\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\ -\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}.\end{aligned}$$

Weil aber in diesem Falle

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n_1}}=(-1)^{n-n_1}=1,$$

also

$$(-1)^n=(-1)^{n_1}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\ =(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\ +(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\ =(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\ -(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)};\end{aligned}$$

also

$$75)\ \tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}.$$

Wenn $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, so kann man

$$\theta-\theta_1=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1-\pi)+\tfrac{1}{2}(n-n_1+1)\pi$$

setzen, und es ist dann

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)\\ =-\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\\ +\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\end{aligned}$$

und

$$(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^{n}\}(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}$$
$$+\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^{n}\}(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}$$

Weil aber in diesem Falle

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n_1}}=(-1)^{n-n_1}=-1,$$

also

$$(-1)^n=-(-1)^{n_1}$$

ist, so ist

$$(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$
$$+(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$

und

$$(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$
$$+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)};$$

also

$$76)\ \tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}.$$

Bezeichnet man den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 75) für $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ liefert, durch i; so ist, wenn λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$77)\ \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=i+\lambda\pi;$$

und weil nun bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi$$

ist, so ist

$$78)\ \begin{cases}\varphi=i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)\}\pi,\\ \varphi_1=i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)\}\pi;\end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n-n_1$ eine gerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n-n_1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

$$79)\ \begin{cases}\sin\varphi=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\};\\ \sin\varphi_1=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)}.\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi_1=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)}.\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.\end{cases}$$

Bekanntlich hat man aber nach dem Obigen zur Bestimmung von x' und y' die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle:

$$(-1)^{n-n_1}=1$$

ist:

$$C'(x-x_1)\cos\varphi_1=D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1=D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir nun in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 79) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$80)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}=D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}=D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

aus denen x' und y' bestimmt werden müssen, was nicht die geringste Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r benutzen wir wieder die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 78)

$$81)\quad \psi=i-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)+\{\lambda-\tfrac{1}{2}(n+n_1)\}\pi,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n}=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^n$$
$$=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^{-n}=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)},$$

und folglich

$$82)\quad (y-y')\sin\alpha=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, aus welcher r bestimmt werden muss, zugleich, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

$$83)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' erhält man die folgenden Gleichungen:

$$84) \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}(n+n_1)} . r \cos\{i - \frac{1}{2}(\delta + \delta_1)\}, \\ y_1' = y' + (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}(n+n_1)} . r \sin\{i - \frac{1}{2}(\delta + \delta_1)\}; \end{cases}$$

und

$$85) \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1 \cos\{i + \gamma - \frac{1}{2}(\delta + \delta_1)\}, \\ y_2' = y' + (-1)^{\lambda - \frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1 \sin\{i + \gamma - \frac{1}{2}(\delta + \delta_1)\}; \end{cases}$$

wo eine Zweideutigkeit nicht vorhanden ist, weil man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $\lambda - \frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 76) für $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ liefert, durch i_1; so ist nach 75) und 76)

$$\cot i_1 = -\operatorname{tang} i.$$

Jenachdem nun i positiv oder negativ ist, ist der absolute Werth von $i - \frac{1}{2}\pi$ oder $i + \frac{1}{2}\pi$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$; und weil nun

$$\cot(i \mp \tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{tang} i$$

ist, so ist offenbar

$$86) \quad i_1 = i \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Ueberhaupt ist nun wieder, wenn λ_1 eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$87) \quad \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = i_1 + \lambda_1 \pi,$$

und weil bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1) = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) + \tfrac{1}{2}(n - n_1)\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1 + \pi) + \tfrac{1}{2}(n - n_1 - 1)\pi$$

ist, so ist

$$88) \begin{cases} \varphi = i_1 + \frac{1}{2}(\delta - \delta_1 + \pi) + \{\lambda_1 + \frac{1}{2}(n - n_1 - 1)\}\pi, \\ \varphi_1 = i_1 - \frac{1}{2}(\delta - \delta_1 + \pi) + \{\lambda_1 - \frac{1}{2}(n - n_1 - 1)\}\pi; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n - n_1$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n - n_1 - 1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

$$89)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \quad (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi = -(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \\ \sin\varphi_1 = -(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi_1 = \quad (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

oder nach 86):

$$90)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \\ \sin\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Zur Bestimmung von x' und y' haben wir bekanntlich die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle

$$(-1)^{n-n_1} = -1$$

ist, die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = -D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = -D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 90) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$91)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

welche von den Gleichungen 80) nicht verschieden sind. Die Bestimmung von x' und y' mittelst dieser Gleichungen unterliegt keiner Schwierigkeit.

Zur Bestimmung von r benutzen wir auch jetzt die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 88)

$$92)\quad \psi = i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1-\pi)+\{\lambda_1-\tfrac{1}{2}(n+n_1+1)\}\pi,$$

also

$$\varphi_1-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha=\pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist. Es ist aber

$$(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n}=(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^n$$
$$=(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^{-n}=(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

und folglich

$$93)\quad (y-y')\sin\alpha=\pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Mittelst dieser Gleichung ist r zu bestimmen, und da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus derselben zugleich, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

$$94)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man die Formeln:

$$x_1'=x'-(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_1'=y'+(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

und

$$x_2'=x'-(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_2'=y'+(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

oder nach 86):

$$95)\quad \begin{cases} x_1'=x'\pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},\\ y_1'=y'\pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};\end{cases}$$

und

$$96)\quad \begin{cases} x_2'=x'\pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},\\ y_2'=y'\pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};\end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Eine Zweideutigkeit kann nicht Statt finden, weil man nach dem Obigen weiss, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist.

Aus den Gleichungen 82) und 93), welche für r offenbar ganz denselben Werth liefern, erhellet, dass

$$(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \text{ und } \pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist, stets gleiche Vorzeichen haben. Und da nun auch die Gleichungen 83) und 94) für r_1 ganz denselben Werth liefern, so erhält man offenbar auch für x_1', y_1' und x_2', y_2' aus den Gleichungen 84), 85) und 95), 96) ganz dieselben Werthe.

Daher führen überhaupt die Formeln 75) und 76) ganz zu denselben Werthen von x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; und man braucht also in allen Fällen bloss die erste dieser beiden Formeln anzuwenden, d. h. bloss

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

oder, wenn der absolute Werth von i nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, bloss

$$97)\ \operatorname{tang} i=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

zu setzen.

Diese Gleichung kann man auch auf die Form

$$98)\ \operatorname{tang} i=\frac{\frac{y-y_1}{x-x_1}+\frac{C'+D'}{C'-D'}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{1-\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{C'+D'}{C'-D'}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

bringen; und berechnet man nun die Hülfswinkel Ω und Ω_1 mittelst der Formeln

$$99)\ \operatorname{tang}\Omega=\frac{y-y_1}{x-x_1},\ \operatorname{tang}\Omega_1=\frac{C'+D'}{C'-D'}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1);$$

so erhält man nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$100)\ \operatorname{tang} i=\operatorname{tang}(\Omega+\Omega_1).$$

Mittelst dieser Formeln kann i ohne Schwierigkeit gefunden werden. Hat man aber i, so werden mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln auch die gesuchten Coordinaten x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2' leicht gefunden, was nun keiner weiteren Erläuterung bedarf.

XXVI.

Schreiben des Herrn Professor Steichen an der École militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber.

Je viens maintenant compléter ce que j'ai déjà eu l'honneur de vous communiquer sur un cas particulier de l'attraction des points matériels par un centre fixe, à l'occasion de quelques passages de l'ouvrage de Mr. de Pontécoulant. La discussion roulera principalement sur la proposition 32. Nr. 264. page 103. T. I. de la mécanique d'Euler, intitulée: Mechanica sive motus scientia analytice exposita. Petropoli. 1736; et surtout il s'agira de redresser quelques inexactitudes, qui se trouvent exprimées aux Nr. 269, 270, 271, 272, 273, relatifs à la proposition citée.

Dans ce qui suit je supposerai le texte latin de l'auteur devant les yeux des lecteurs, et au besoin je pourrais le transcrire et le communiquer. Mais comme cela ne nous semble pas nécessaire, je me bornerai à traduire l'énoncé latin du problème qui forme le point de départ d'Euler, et de notre discussion:

Soit C un centre de forces qui attire d'après la loi d'une puissance quelconque des distances; si un corps, d'abord au repos en un point A, vient à être attiré par ce point C, on demande quelle sera sa vitesse en un point quelconque de l'espace $\overline{AC}$?

A
P
p
C
Q
B

Pour nous conformer le plus que possible aux notations mêmes du texte, supposons le mobile déjà arrivé de A en P et faisons: $\overline{AP}=x$, $\overline{AC}=a$, $\overline{CP}=y$, partant $a-x=y$.

L'énergie attractive sera censée en raison de la $n^{ième}$ puissance des distances, et l'on désignera par f la distance à laquelle le corps tendrait vers le centre C avec une force égale au poids p qu'il aurait, s'il était placé à la surface terrestre; v dénotera la vitesse du mobile en P entre A et C, et u sa vitesse variable, quand il est arrivé en Q, au dessous du centre C, si toutefois ce cas est possible. On aura d'après ces notations:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(a-x)^n}{f^n} \text{ ou } vdv=g.\frac{(a-x)^n}{f}.dx \text{ entre } A,C;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(x-a)^n}{f^n} \text{ ou } udu=-g.\frac{(x-a)^n}{f^n}.dx;$$

x désignant dans ces deux dernières équations la distance du mobile à son point de départ, c'est-à-dire la ligne $\overline{AQ}$, tandis que dans le 1r cas $x=\overline{AP}$.

Si l'on intègre la valeur de vdv et que l'on détermine la constante d'après la condition de $v=0$, pour $x=0$, on obtiendra.

$$v^2=2g.\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n} \text{ on } 2g.\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1).f^n},$$

équation, qui devient identique au résultat d'Euler, si l'on convient avec lui de mesurer la vitesse par la racine-quarrée de la hauteur dûe, ce qui revient à prendre pour unité de vitesses la quantité $2g$ ou le double de l'accélération de la pesanteur terrestre. Mais remarquons en passant que plus tard dans sa mécanique des corps rigides l'auteur a renoncé à cette manière de mesurer les vitesses pour établir des conventions aujourd'hui plus généralement adoptées et plus commodes, quoiqu'un peu plus longues.

En intégrant la valeur de udu établie plus haut, on a

$$u^2=\text{Const.}-2g.\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

équation dans laquelle la constante amenée par l'intégration exprime évidemment la vitesse du mobile, parvenu au centre d'attraction même. Mais cette vitesse doit se déduire aussi de la valeur de v, en y prenant $y=0$, ce qui donnera parconséquent:

$$\text{Constante}=2g.\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

$$\text{et partant: } u^2=2g.\frac{a^{n+1}-(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la plus grande valeur de $x>a$ est $x=2a$, de sorte que le mobile se meut d'un mouvement rectiligne alternatif de A en C de C en B pour $\overline{CB}=\overline{CA}$, et puis de B en A, et qu'il a des vitesses égales de part et d'autre du centre d'attraction C; c'est ce que démontre la comparaison des valeurs de v, u. Mais si le mobile, arrivé une 1re fois en C, se trouvait repoussé de C en Q, c'est-à-dire si la force centripète continuait à agir sur lui dans le même sens, les accroissements élémentaires du, dx seraient de même signe au dessous de C, et l'on aurait dès lors:

$$u^2=2g.\frac{a^{n+1}+(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la vitesse du mobile irait constamment en croissant de C vers Q, depuis sa valeur en C jusqu'à l'infini; et un tel

résultat était évident d'avance. Mais dans ce qui précède nous avons supposé $n+1$ positif; voyons ce qui a lieu pour le cas contraire de $n+1$ négatif. En posant alors $n+1=-m$, m étant un nombre positif, on aura:

$$u^2=\text{Const.}+2g.\frac{f^{m+1}}{m(x-a)^m}.$$

Rémarquons d'abord que conformément aux notations la plus faible valeur de x est ici $x=a$; or en prenant $x=a$, il faut qu'on retrouve la vitesse qui anime le mobile en C, et qui devient infinie d'après la valeur de v, établie pour $n+1$ positif ou négatif. On aura donc: $\infty=\infty+\text{const.}$ et cette égalité se trouve vraie pour une valeur finie quelconque de la constante qui semble ainsi rester inconnue et indéterminée. Mais si l'on considère que la vraie valeur de la vitesse acquise en C n'est pas seulement $\frac{1}{0}$ ou ∞, mais bien $2g.\frac{f^{m+1}}{m}\times\frac{1}{0}-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et que c'est cette valeur totale qu'il faut égaler à ce que devient u^2 pour $x=a$, on obtient réellement, en ne négligeant plus le fini par rapport à l'infini: $\text{Const.}=-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et cette valeur donne pour u^2:

$$u^2=2g.\frac{f^{m+1}}{m}\left(\frac{1}{(x-a)^m}-\frac{1}{a^m}\right),$$

équation qui exprime le véritable mouvement du point matériel et annonce qu'il y a réellement un mouvement rectiligne alternatif comme pour le cas de $n+1$ positif. Du reste la nécessité du mouvement alternatif se conçoit directement et sans aucun calcul, soit que l'attraction se fasse d'après la raison directe soit qu'elle ait lieu d'après la raison inverse d'une certaine puissance de l'éloignement; en effet dans le 1r cas le mobile se précipite sur le centre C avec une vitesse finie de C vers Q, et la force alors nulle de ce point C ne saurait lui enlever cette vitesse instantanément. Dans le second cas le mobile se précipite avec une vitesse infinie, et la force du centre quoiqu'infinie alors, ne saurait détruire cette vitesse de C vers Q d'une manière brusque et instantanée et encore moins saurait-il la reproduire en sens contraire de C vers A; cela est aussi évident par la loi de continuité, qu'il est évident qu'une force finie ne saurait imprimer instantanément une vitesse finie à une masse finie. Remarquons encore que dans le cas qui nous occupe les formules générales $dx=vdt$, $vdv=gdx$, etc. ne sont plus applicables au passage du mobile par le centre ni pour ses positions infiniment voisines en deça et au de là de ce point; puisque dans cette étendue de positions la force infiniment grande de C imprime et enlève ensuite au mobile des degrés de vitesse finis à chaque coup.

L'hypothèse sur laquelle nous avons basé l'existence de la vitesse u et de la formule $udu=\ldots$ n'est donc pas même sujette à la moindre difficulté.

Il nous reste encore à examiner le cas spécial où la force du centre est simplement en raison inverse de la distance; ce qui donne $n+1=0$. Mais ici encore nous ferons une opération analogue à celle des autres cas déjà examinés, c'est-à-dire que nous ne devons pas nous en tenir aux équations entre quantités finies, obtenues d'une manière générale, mais qu'il faut remonter à l'équation différentielle même qui exprime le mouvement pour un instant. Or on obtient ici immédiatement:

$$udu = -g.f.\left(\frac{dx}{x-a}\right);$$

partant: $u^2 = \text{Const.} - 2g.f.\log(x-a) = C - 2gf\log(x-a)$. Soit u_0 la vitesse avec laquelle le mobile quitte le centre C pour descendre de C vers Q. On aura donc:

$$u^2_0 = C - 2g.f.\log(x-a),$$

pourvu que l'on fasse dans cette dernière équation $x=a$. Mais on trouvera de même:

$$u^2_0 = 2g.f.\log.\left(\frac{a}{y}\right),$$

pourvu que l'on fasse dans celle-ci $y=0$. En substituant cette valeur ou plutôt cette forme de u^2_0 dans l'autre, on a

$$2gf.\log\left(\frac{a}{y}\right) = -2gf.\log(x-a) + \text{Const.},$$

équation qui donne: $\text{Const.} = 2g.f.\log.\left(\frac{a(x-a)}{y}\right)$.

D'ailleurs la distance nulle ou infiniment petite $x-a$ est mesurée de C vers Q, et la distance nulle ou infiniment petite y est mesurée de C vers A en sens contraire. Mais comme ce sont des quantités absolues, attendu que les signes $(+-)$ ont été pris d'abord en considération, le rapport $\left(\frac{x-a}{y}\right)$, si toutefois il est déterminé, sera nécessairement positif. Je dis de plus qu'il est égal à l'unité. En effet si l'attraction cessait à une distance entre A, C, $y=\delta$, pour recommencer quelques instants plus tard après que le mobile, qui alors descendrait evidemment vers le centre et en dessous, serait à une distance au dessous de se point égale à $\delta' = x-a$, la constante de ce nouveau mouvement serait: $2gf.\log\left(\frac{a\delta'}{\delta}\right)$; et comme rien n'empêche de prendre l'arbitraire $\delta' = \delta$, quelque petite que soit cette dernière, on aura pour le cas où l'action du centre C n'est pas suspendue, $\text{Const.} = 2gf.\log a$; de là on conclut:

$$u^2 = 2g.f.\log\left(\frac{a}{x-a}\right),$$

tandisque pour le mouvement entre A, C on trouve aisément:

$$v^2=2gf.\log\left(\frac{a}{y}\right).$$

Or comme cette valeur de $u=0$, pour $x=2a$, il y aura encore ici un mouvement oscillatoire de part et d'autre du centre d'attraction.

Si le mobile, parvenu en C, continue a être poussé par la force du centre, suivant $\overline{AC}$ prolongé vers $\overline{QB}$, on aura:

$$udu=g.f.\left(\frac{dx}{x-a}\right);\ u^2=2gf.\log(x-a)+\text{Const.}$$

En déterminant la constante comme précédemment on trouve qu'elle est infinie, de sorte qu'au dessous du centre la vitesse se compose de deux parties, d'une vitesse infinie et d'une vitesse finie qui augmente de plus en plus, mais dont les accroissements vont sans cesse en diminuant. Or c'est là ce que l'on conçoit encore immédiatement et sans faire intervenir le calcul.

Montucla s'est également trompé au sujet de l'attraction des points matériels. Il prétend d'après Newton (histoire des math. t. II. p. 447. et 448.) que dans le cas d'une attraction en raison inverse du quarré de la distance le mobile ne descende pas au dessous du centre, tandisque pour celui de la raison inverse simple il lui attribue un mouvement alternatif.

Profitons de la présente occasion pour expliquer un prétendu paradoxe, remarqué par D'Alembert et qui se rapporte en entier à la matière précédente. Voici en resumé ce qu'expose l'auteur (opuscules math. t. 4. p. 62): „un point matériel A est attiré par un centre C en raison inverse du quarré de la distance: on aura d'après l'auteur et dans les notations admises:

$$v^2=2gf^2\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a}\right)\ldots(A)$$

Or si on suppose avec lui qu'au dessous de ce centre la force centripète ne change pas de signe, il s'ensuit que comme x est alors plus grand que a, la valeur de v ou u devient imaginaire, ce qui est dit-il assez paradoxe, puisque la vitesse, qui est infinie au centre, doit ensuite augmenter encore, car lorsque le mobile a passé ce point, il reçoit de nouveaux coups dans le même sens qu'auparavant.“

D'abord nous remarquerons que l'équation en vdv qui a été établie ci-dessus donne en général:

$$v^2=2gf^2.\frac{1}{a-x}+\text{Const.}$$

Si l'on veut avoir la vitesse v, entre A, C, on peut déterminer la constante par la condition de $v=0$, $x=0$ à la fois; ce qui donne en effet la valeur de v^2 de la formule (A). Mais si l'on veut avoir la vitesse du mobile pour une position Q inférieure à C, la précédente détermination de la constante devient vicieuse; car dans l'équation $u^2=\text{Const.}-2gf^2.\frac{1}{x-a}$ il n'est plus permis de la

déterminer d'après la condition de $u=0$ ou $v=0$ et $x=0$ à la fois; puisque nous savons qu'au centre C, où $x=a$, cette vitesse est infinie. Nommant donc u_1 cette valeur infinie de u, on doit avoir:

$$u_1^2 = C - 2gf^2 \cdot \frac{1}{x-a=0} \cdot$$

Nommant de même v_1 la vitesse acquise par le mobile arrivé de A en C, on aura encore:

$$v_1^2 = 2gf^2 \frac{1}{a-x=0} - 2g \cdot f^2 \cdot \frac{1}{a},$$

Mais les quantités u_1 et v_1 sont évidemment les mêmes, ce qui donnera:

$$C - 2gf^2 \frac{1}{x-a=0} = 2gf^2 \frac{1}{a-x=0} - 2gf^2 \frac{1}{a}.$$

On voit donc par là que C a une valeur infinie $4gf^2 \cdot \frac{1}{0}$, laquelle est équivalente à $2v_1^2$. Si l'on substitue cette valeur, on trouvera: $u^2 = 2v_1^2 - \frac{2gf^2}{x-a}$. Ainsi au dessous du centre la vitesse du mobile déjà infinie augmente de plus en plus; mais elle n'atteindra jamais la limite infinie $v_1\sqrt{2}$. Le calcul n'est donc pas nécessairement en défaut, comme le déclare D'Alembert, et au contraire il donne tout ce quil doit donner; dèsque l'on n'admet plus gratuitement que la vitesse du mobile puisse être exprimée par une seule et même formule avant et après le centre d'attraction, et que la constante arbitraire doive avoir une valeur qui resulte de $u=0$, $x=0$ à la fois.

XXVII.

In quaestionem à Celeb. A. Göpel in T. VI. pag. 33. propositam complete solvendam.

Auct. Dr. E. G. Björling,
ad Academ. Upsal. Docens Mathes.

1. Cel. Göpel l. c. ambas has formulas *)

$$(1)\ldots.\ 1-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\text{etc.}$$

$$\text{(usque ad primum terminum evanescentem)}=\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$(2)\ldots.\ 1.(n+1)_1-2.n_2+3.(n-1)_3+4.(n-2)_4-\text{etc. (usque ad...)}$$

$$=\tfrac{2}{3}\left\{(n+1)_1\cos(n-1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right\},$$

probandas sistit. Quae autem cum nonnisi speciales sint casus, profecto abs re haud erit universale hoc edere demonstrandum

Theorema. **)

Denotantibus $\overset{m}{F}_0(=1)$, $\overset{m}{F}_1$, $\overset{m}{F}_2$, etc. numeros m^i ordinis figuratos, nempe

*) Loco citato hae formulae aliter paullulum descriptae sunt at facillimo usque negotio in hanc formam simpliciorem aeque ac generali nostrae (I) majis consentaneam reducuntur.

**) Nos quidem, quaestione ipsâ Cel^i Göpel adducti, nuper admodum Theorema isthuc demonstravimus nec profecto hac uti occasione demonstrationis nostrae in medium heic proferendae supersedissemus, nisi forte res alii cuidam operi nostro in Novis Actis Reg. Societ. Scient.

$m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ (m+3)_3$, etc.
atque n numerum integrum quemlibet, habetur
dum m par est aut 0:

$$(1)\ldots.\ 1.(n+m)_m - \overset{m}{F}_1(n+m-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2(n+m-2)_{m+2} - \text{etc.}$$

(usque ad primum terminum evanescentem) =

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin(n-\frac{m}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2\mathop{S}_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1}(n+m-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos(n-\frac{m}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin(n-\frac{m-1}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos(n-\frac{m-1}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m=0,\ 1,\ 2,\ 3$ formulae illae (1) et (2) ac praeterea

$$(3)\ldots.\ 1.(n+2)_2 - 3(n+1)_3 + 6n_4 - 10(n-1)_5 + \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{1}{3}.\left\{(n+2)_2 \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2(n+1)_1 \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + 2.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right\};$$

$$(4)\ldots.\ 1.(n+3)_3 - 4(n+2)_4 - 10(n+1)_5 + 20n_6 - \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{1}{9}\left\{(n+3)_3 \cos(n-2)\frac{\pi}{3} + 2(n+2)_2 \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \tfrac{10}{3}(n+1)_1 \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + \tfrac{10}{3}.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

2. Quod cum Theorema (uti licet probari) etiamsi $n=0$ fuerit, saltem nisi eodem tempore $m=0$, valet; corollarii instar ex eo consequitur haberi, p denotante num. integrum $=$ aut $>m$,

dum m par est aut 0:

Upsal. (T. XII.) dudum perscripta connexa esset quodammodo. Typis igitur tandem in To. sequenti impressam Theorematis, de quo quaeritur demonstrationem in hoc „Archive" condendam offeremus.

$$\text{(II)} \ldots p_m - \overset{m}{F}_1 (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (p-2)_{m+2} - \text{etc. (usque ad primum term. evanesc.)} =$$

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \underset{i=0}{\overset{i=\frac{m}{2}}{S}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin(p+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2 \underset{i=0}{\overset{i=\frac{m}{2}}{S}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1}(p-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos(p-1+i)\frac{\pi}{3} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ 2 \underset{i=0}{\overset{i=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos(p+1+i)\frac{\pi}{3} - \underset{i=0}{\overset{i=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1}(p-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin(p+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m=0, 1, 2, 3$, loco formularum (1)—(4), istae:

$$\left\{\begin{aligned}
&1-(p-1)_1+(p-2)_2-(p-3)_3+\text{etc.} = \frac{\sin(p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}, \\
&p_1-2(p-1)_2+3(p-2)_3+4(p-3)_4+\text{etc.} \\
&\qquad = -\tfrac{2}{3} \cdot \left\{ p_1 \cos(p+1)\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{p\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}, \\
&p_2-3(p-1)_3+6(p-2)_4-10(p-3)_5+\text{etc.} \\
&\qquad = -\tfrac{1}{3} \cdot \left\{ p_2 \cdot \frac{\sin(p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2(p-1)_1 \cos\frac{p\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sin(p+2)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}, \\
&p_3-4(p-1)_4+10(p-2)_5-20(p-3)_6+\text{etc.} \\
&\qquad = \tfrac{2}{9} \cdot \left\{ p_3 \cos(p+1)\frac{\pi}{3} - 2(p-1)_2 \frac{\sin\frac{p\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{10}{3}(p-2)_1 \cos(p+2)\frac{\pi}{3} - \tfrac{10}{3} \cdot \frac{\sin(p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}.
\end{aligned}\right.$$

3. Ex hac tandem formulâ (II) habentur, posito $p=m$, notandae hae numerorum figuratorum relationes:

1°) dum m num. est integer par:

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned}&1=(-1)^{\frac{m}{2}}.\left\{\overset{i=\frac{m}{2}}{\underset{i=0}{S}}\frac{\overset{m}{F}_{2i}}{3^{i}}\cdot\frac{\sin(m+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}+2\overset{i=\frac{m}{2}}{\underset{i=1}{S}}\frac{\overset{m}{F}_{2i-1}}{3^{i-1}}\cos(m-1+i)\frac{\pi}{3}\right\},\\ &\text{2°) dum } m \text{ impar est:}\\ &1=(-1)^{\frac{m+1}{2}}.\left\{2\overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}}\frac{\overset{m}{F}_{2i}}{3^{i}}\cos(m+1+i)\frac{\pi}{3}+\overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}}\frac{\overset{m}{F}_{2i+1}}{3^{i+1}}\cdot\frac{\sin(m+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Nota.

Meminisse juvabit, numeros m^{ti} ordinis figuratos (m num. int. aut 0)

$$m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ \text{etc.}$$

coëfficientes esse potentiarum ipsius x in evoluta functione

$$(1-x)^{-(m+1)};$$

coëfficientem vero ipsius x^m in evoluta functione

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)}$$

ipsum conficere membrum prius aequationis nostrae (I).

XXVIII.

Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx$ und $\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx$.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann die Werthe der beiden obigen Integrale leicht mittelst des von Laplace vorzüglich angewendeten Kunstgriffes entwickeln, welcher darin besteht, dass man dieselben in irgend eine Relation zu bringen sucht, die sich durch die Bemerkung, dass das zweite aus dem ersten durch eine Differenziation abgeleitet werden kann, in eine Differenzialgleichung verwandelt, durch deren Integration man dann die Werthe der Integrale bekommt. Diese Methode lässt sich hier in folgender sehr einfacher Weise anwenden.

Sei zuvörderst

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx, \tag{1}$$

so folgt durch beiderseitige Differenziation nach t, welches als unabhängig veränderlich angesehen wird,

$$\frac{du}{dt}=-\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx. \tag{2}$$

Um nun noch eine zweite Beziehung zwischen den beiden fraglichen Integralen zu entdecken, wenden wir uns an die identische Gleichung

$$2\cos at\frac{x\sin tx}{x^2-a^2}-2a\sin at\frac{\cos tx}{x^2-a^2}=\frac{\sin t(x-a)}{x-a}+\frac{\sin t(x+a)}{x+a},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht dadurch überzeugt, dass man auf der rechten Seite Alles auf den gleichen Nenner x^2-a^2 bringt und dann die Funktionen $\sin t(x-a)$ und $\sin t(x+u)$ zerlegt.

Wir multiplizirten diese Gleichung mit dx und integriren sie zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$. Es ergiebt sich so:

$$2\cos at\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx-2a\sin at\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned}&-2\cos at.\frac{du}{dt}-2a\sin at.u\\&=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Könnte man nun hier den Werth der rechten Seite für sich ausfindig machen, so wäre das Problem der Entwickelung des Werthes von u auf die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zurückgeführt. Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit, den Werth der rechten Seite von Nr. (3) zu finden. Setzt man nämlich in dem ersten dieser Integrale $x-a=y$ und im zweiten $x+a=z$, so ergiebt sich sehr leicht:

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz,$$

oder durch Zerlegung

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz;$$

und da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl des Integrationsbuchstabens ankommt:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy+2\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz. \tag{4}$$

Man hat aber weiter

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=\int_{-a}^{0} \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{0}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy;$$

und wenn man im ersten Integrale $y=-z$, im zweiten $y=z$ setzt:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=-\int_{+a}^{0} \frac{\sin tz}{z}dz+\int_{0}^{+a} \frac{\sin tz}{z}dz;$$

oder durch Vertauschung der Integrationsgränzen im ersten Integral, wodurch dasselbe positiv wird,

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=2\int_{0}^{+a} \frac{\sin tz}{z}dz.$$

Substituiren wir diess in Nr. (4), so ist jetzt der Werth der rechten Seite in (3) gleich

$$2\left\{\int_0^{+\epsilon}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_{+\epsilon}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Man kennt aber die Formel

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man darin $x=tz$, so erhält man unter der Voraussetzung eines positiven t *)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz=\frac{\pi}{2},$$

und mithin ist der Werth der rechten Seite von (3) $=\pi$. So wird nun

$$-\cos at.\frac{du}{dt}-a\sin at.u=\frac{\pi}{2}.$$

Um diese Differenzialgleichung zu integriren, setzen wir

$$u=\cos at.v, \tag{5}$$

wo v eine noch unbekannte Funktion von t bedeutet, wodurch sich ergiebt

$$-\cos at(\cos at.\frac{dv}{dt}-a\sin at.v)-a\sin at\cos at.v=\frac{\pi}{2},$$

oder einfacher

$$-\cos^2 at.\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{2},$$

mithin

$$v=-\frac{\pi}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 at}=-\frac{\pi}{2}.\frac{\tan at}{a}+C,$$

indem C die Integrationsconstante bezeichnet. Nach (5) ist nun

$$u=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at,$$

oder nach Nr. (1)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at; \tag{6}$$

und ebenso ist

*) Für negative t werden nämlich die Integrationsgränzen: 0 und $-\infty$ statt 0 und $+\infty$.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \qquad (7)$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a}\, l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \qquad (9)$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betrachtung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebilde gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschiedener Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen auf metrische Relationen. In der That ist die harmonische Proportion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht gestört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden ist wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Strahlbüschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion mehr oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind aber oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elementaren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander senkrechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen wollen. Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welchem der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projektion des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, ziehen wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und setzen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die Lage des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=X$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, P eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht stehenden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coordinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$$PM:MN = Vv:vN,$$

d. i.

$$X:Y-y = t:y,$$

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$$Vv:PM = VN:PN,$$

d. i.

$$t:X = VN:PN;$$

mithin

$$t+X:X = VN+PN:PN$$
$$= VP:PN.$$

Aus $\Delta OVP \sim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP:PN = OV:pN$$
$$= u:x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t+X:X = u:x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X}, \qquad (1)$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \qquad (2)$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \qquad (3)$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \qquad (4)$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (E) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (3), (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in dem Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

wir daher bei unveränderten u, t, X bloss Y sich ändern, so wird P als Endpunkt von MP eine Gerade beschreiben, welche der Grundlinie mn in der Entfernung MP parallel läuft. Dabei wird sich nun nach Formel (2) y ändern, aber nach Formel (1) x immer constant bleiben, d. h. der Endpunkt p der Geraden x wird eine Gerade beschreiben, welche der mn in der Entfernung Np parallel geht. Also: die Projektion einer Parallelen zur Grundlinie ist wieder eine solche Parallele.

Um nun auch die Projektionen anderer Geraden, welche der Grundlinie nicht parallel laufen, sondern einen beliebigen Winkel mit ihr machen, aufzufinden, brauchen wir bloss die Projektionen zweier auf ihr liegender Punkte aufzusuchen und die gefundenen durch eine Gerade zu verbinden. Denn man übersieht leicht, dass die Projektion einer Geraden selbst eine Gerade sein muss.

Es schneide nun die Gerade CP (Taf. III. Fig. 3.) die Grundlinie mn unter dem Winkel $PCM=\varphi$, wobei wir C als Anfangs-, P als Endpunkt der Geraden betrachten, so ist C die Projektion seiner selbst, weil dieser Punkt beiden Ebenen (E) und (e) zugleich angehört, und es handelt sich folglich bloss noch um die Projektion p des Endpunktes der Geraden, dessen Coordinaten X und Y wir jetzt durch den Winkel φ auszudrücken haben. Setzen wir demnach $Cv=k$, $CP=z$, so ist:

$$MP=X=z\sin\varphi,\ Mv=Y=k+z\cos\varphi.$$

Durch diese Substitutionen erhält man aus den Formeln (1) u. (2):

$$x=\frac{uz\sin\varphi}{t+z\sin\varphi}=u-\frac{ut}{t+z\sin\varphi},$$

$$y=\frac{tk+tz\cos\varphi}{t+z\sin\varphi}=t\cot\varphi+\frac{kt-t^2\cot\varphi}{t+z\sin\varphi}.$$

Lassen wir jetzt z in's Unendliche wachsen, d. h. die Linie CP in's Unendliche fortlaufen, und gehen zur Gränze für $z=\infty$ über, so erhalten wir

$$x=u,\ y=t\cot\varphi, \tag{5}$$

d. h. geometrisch, die Projektion eines unendlich entfernten Punktes liegt auf einer durch o zu mn parallel gelegten Geraden, dem sogenannten Horizont, und die Projektion der unendlichen Geraden CPQ ist die endliche Gerade Cq. Der Punkt q wird gefunden, wenn man aus O eine Parallele zu CQ zieht, welche dem Horizonte im Punkte q begegnet.

Es ist noch zu bemerken, dass in den Formeln (5) das anfangs eingeführte $k=Cv$ nicht mehr vorkommt, dass mithin diese Entfernung auf die Lage des Punktes q gar keinen Einfluss hat. Ziehen wir daher in verschiedenen Entfernungen Cv, $C'v$, $C''v$, etc. die Geraden CQ, $C'Q'$, $C''Q''$, etc., so müssen die Projektionen derselben die Geraden Cq, $C'q$, $C''q$ etc. sein, d. h. die Projektionen einer Reihe von Parallellinien, welche die Grundlinie unter einem beliebigen Winkel >0 schneiden, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt im Horizonte liegt.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \tag{6}$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel C'Q' \parallel C''Q''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders zwei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\ y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\ y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt; es sei ferner o der Augenpunkt, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten $P'M$; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und $P'M$, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn man nämlich P sucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Geraden op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

M und P' schneiden, errichtet dann in M eine Senkrechte auf mn, und nimmt $MP = MP'$, so ist der Punkt P gefunden, dessen Projektion p sein soll. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun verschiedene metrische Relationen untersuchen, welche zwischen den Gebilden der beiden Ebenen (E) und (e) statt finden.

§. 3.

Es sei in der Ebene (e) ein Viereck $abcd$ (Taf. III. Fig. 5.) gegeben, dessen Gegenseitendurchschnitte p und q heissen mögen. Nehmen wir die Linie pq als Horizont und ziehen beliebig die Grundlinie $mn \parallel pq$, so müssen, wo man auch den Augenpunkt o in pq annehmen möge, die Linien ab und cd die Projektionen solcher Geraden sein, welche in (E) einander parallel laufen, weil sich der Durchschnitt p von ab und cd auf dem Horizonte befindet. Das Nämliche wird auch von den Linien ad und bc gelten, so dass also die Figur $ABCD$ in (E), als deren Projektion man sich $abcd$ denken kann, durch parallele Gegenseiten begränzt wird, d. h. ein Parallelogramm ist. Diess gilt für jede Distanz ov; legt man aber dem in (E) befindlichen Parallelogramme besondere Bedingungen auf, so bleibt auch die Distanz nicht mehr willkührlich, wie man sogleich sehen wird.

1) Man verlangt, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck werde.

Es sei der Augenpunkt o willkührlich zwischen p und q genommen, $op = y$, $oq = y'$, die erst noch zu bestimmende Distanz $ov = t$, W. $CA'D = \varphi$ und W. $A'CD = \varphi'$, so ist nach Formel (6) und dem Folgenden

$$\frac{t}{y} = \tan \varphi, \quad \frac{t}{y'} = \tan \varphi'.$$

Da aber $ABCD$ ein Rechteck sein soll, so muss $\varphi' = 90^0 - \varphi$ sein, mithin:

$$\frac{t}{y} = \tan \varphi, \quad \frac{t}{y'} = \cot \varphi,$$

woraus man durch Multiplikation erhält:

$$t^2 = yy', \quad t = \sqrt{yy'}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass zwar o beliebig genommen werden darf, dass aber dann die Distanz ov die mittlere Proportionale zwischen op und oq sein muss. Beschreibt man also über pq als Durchmesser einen Halbkreis, so ist, für o als Augenpunkt, die Ordinate $os = ov$ genommen die nöthige Distanz und v der Distanzpunkt.

2) Soll $ABCD$ ein Rhombus werden, so müssen sich die Diagonalen AC und BD rechtwinklich schneiden. Setzen wir wieder die unbekannte Distanz $ov = t$, $fo = y$, $go = y'$, W. $BDE = \psi$ und W. $D'B'E = \psi'$, so ist ähnlich wie früher

$$\frac{t}{y} = \tan \psi, \quad \frac{t}{y'} = \tan \psi';$$

und da $\psi' = 90^0 - \psi$ sein muss,

$$\frac{t}{y} = \tan \psi, \quad \frac{t}{y'} = \cot \psi;$$

woraus

$$t^2 = yy', \quad t = \sqrt{yy'}$$

folgt. Wenn also o beliebig auf fg genommen wird, so muss die Distanz $os = ov$ die mittlere Proportionale zwischen fo und go sein. Beschreibt man also über fg als Durchmesser einen Halbkreis, so ist für jeden beliebig zwischen f und g genommenen Augenpunkt o die Ordinate os die Distanz, also v der Distanzpunkt, wenn $ov = os$ gemacht wird.

3) Soll endlich $ABCD$ ein Quadrat werden, so müssen beide bisher gefundenen Bedingungen gleichzeitig statt finden. Fällt man also von dem Durchschnitte s beider Halbkreise über pq und fg eine Senkrechte so auf den Horizont, so ist o der Augenpunkt und, wenn $ov = os$ genommen wird, v der Distanzpunkt.

Hat man in jedem Falle Augen- und Distanzpunkt bestimmt, so lassen sich nun leicht nach dem am Ende des vorigen Paragraphen gezeigten Verfahren die den gegebenen Punkten a, b, c, d entsprechenden A, B, C, D auffinden.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt mit den perspektivischen Projektionen des Kreises beschäftigen. Zu grösserer Einfachheit setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des zu projizirenden Kreises in (E) auf der verlängerten Augenhöhe liege (Taf. IV. Fig. 1.) und dass der Kreis die Grundlinie mn berühre. Nehmen wir, wie bisher, die Augenhöhe und deren Verlängerung zur Abscissenachse und den Durchschnitt derselben mit der Grundlinie mn zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises in (E)

$$Y^2 = 2RX - X^2, \tag{7}$$

wobei R den Halbmesser desselben bezeichnet.

Um jetzt die Gleichung der Projektion unseres Kreises zu finden, brauchen wir bloss die Gleichungen (3) und (4) in Anwendung zu bringen, durch welche statt der Coordinaten X, Y in (E) die neuen Coordinaten x, y in (e) eingeführt werden. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{uy}{t-x}\right)^2 = \frac{2Rtx}{t-x} - \left(\frac{tx}{u-x}\right)^2,$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y^2 = \frac{1}{u^2}[2Rutx - (2Rt + t^2)x^2],$$

oder auch

$$y^2 = \frac{2Rt + t^2}{u^2}\left[\frac{2Ru}{2R+t}x - x^2\right]. \qquad (8)$$

Man erkennt hierin sogleich die Gleichung einer Ellipse, nur ersieht man nicht sogleich die Grösse und Lage der Achsen. Diese bestimmt man durch folgende Vergleichung. Rechnet man in einer Ellipse die Coordinaten von einem der Endpunkte der kleinen Achse an, wobei diese die Abscissenachse ist, und bezeichnet die grosse Achse mit a, die kleine mit b, so erhält man

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2). \qquad (9)$$

Nimmt man dagegen die grosse Achse als Abscissenachse und einen ihrer Endpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man für die nämlichen Achsen a und b:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2). \qquad (10)$$

Beide Formen gehen in eine über, wenn $b = a$, also die Ellipse ein Kreis ist. Da nun für beide Formen $a > b$ ist, so können wir, den Quotienten $\frac{a^2}{b^2}$ oder $\frac{b^2}{a^2}$ mit q bezeichnend, so sagen:

1) Ist $q > 1$, so ist die kleine Achse der Ellipse die Abscissenachse und ihr Endpunkt der Anfang der Coordinaten,

2) Ist $q = 1$, so ist die Ellipse ein Kreis.

3) Ist $q < 1$, so ist die grosse Achse der Ellipse die Abscissenachse und ihr Endpunkt der Anfang der Coordinaten.

Diese Criterien können sehr leicht auf die Gleichung (8) angewendet werden, wenn

$$q = \frac{2Rt + t^2}{u^2}$$

genommen wird.

1) Ist nämlich $q > 1$, also

$$u^2 < 2Rt + t^2,$$

so sind die Abscissen auf der kleinen Achse gerechnet. Da nun unsere Abscissen in der Richtung Ap gezählt werden, so folgt, dass die kleine Achse der entstandenen Ellipse in die Gerade Ap fällt, mithin die grosse Achse der Grundlinie mn parallel liegt.

Die Werthe der Achsen selbst sind sehr leicht zu bestimmen; man erhält nämlich durch Vergleichung der beiden Formen (8) und (9)

$$b = \frac{Ru}{2R+t}, \quad a^2 = \frac{R^2 t}{2R+t}. \qquad (11)$$

Besondere Merkwürdigkeiten bietet dieser Fall nicht dar; dagegen bedürfen die Fälle (2) und (3) einer näheren Ansicht.

§. 5.

Soll die Projektion des gegebenen Kreises (§. 4.) wieder ein Kreis werden, so muss die Gleichung (8) auf die Form

$$y^2 = 2rx - x^2 \qquad (12)$$

zurückgehen, in welcher r den Halbmesser des neuen Kreises bedeutet, oder, was das Nämliche ist, der Quotient, welcher im vorigen Paragraphen q genannt wurde, muss $= 1$ sein. Wir haben also

$$\frac{2Rt + t^2}{u^2} = 1,$$

oder

$$u^2 = 2Rt + t^2, \qquad (13)$$

und durch Vergleichung von (8) mit (12)

$$r = \frac{Ru}{2R + t}, \qquad (14)$$

wodurch die Grösse des neuen Kreises bestimmt ist. Werfen wir nun noch einen Blick auf die Gleichung (13). Wir hatten gefragt, unter welchen Umständen, d. h. für welches Verhältniss zwischen Augenhöhe und Distanz, die Projektion eines Kreises wieder ein Kreis werden könne. Diese Frage beantwortet uns die Gleichung (13), welche zwar die Augenhöhe und Distanz nicht unmittelbar, aber doch eine Relation zwischen beiden giebt, welche eine derselben willkürlich anzunehmen gestattet. Jene Relation ist aber nichts Anderes, als die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, worin R die Halbachse, u die Ordinaten, t die Abscissen (vom Scheitel aus gezählt) bedeuten. Der geometrische Ort des Projektionscentri O ist also eine gleichseitige Hyperbel, welche den Halbmesser des zu projizirenden Kreises zur Achse hat, oder mit anderen Worten (Taf. III. Fig. 6.)

Wenn das Projektionscentrum auf einer gleichseitigen Hyperbel fortrückt, deren Ebene senkrecht durch AB auf der Ebene UW steht und deren Halbachse $= CA$ ist, so bleibt die Projektion des um C mit CA als Halbmesser beschriebenen Kreises in der Ebene UW immer ein Kreis, dessen Halbmesser nach Formel (14) gefunden werden kann.

§. 6.

Wir wenden uns jetzt zu dem dritten der in §. 4. betrachteten Fälle, wenn nämlich das dortige $q < 1$, mithin vermöge des Werthes von q,

$$u^2 > 2Rt + t^2$$

ist. Wir erhalten dann durch Vergleichung von (8) und (10)

$$a=\frac{Ru}{2R+t},\ b^2=\frac{R^2t}{2R+t},\tag{15}$$

und hier liegt die grosse Achse in der Augenhöhe, folglich die kleine der Grundlinie parallel. Dieser Fall ist reich an schönen analytischen Beziehungen. So erhält man z. B. aus dem Obigen:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{Rt}{u};$$

aber $\frac{b^2}{a}$ ist der halbe Parameter der Ellipse, nehmen wir ihn $=\frac{1}{2}p$, so folgt jetzt die interessante Proportion:

$$u:t=R:\tfrac{1}{2}p,\tag{16}$$

aus welcher man leicht eine Construktion der in (e) zu zeichnenden Ellipse ableiten kann.

Nennt man c die lineare Excentricität der Ellipse $c=\sqrt{a^2-b^2}$, so findet man aus (15)

$$c=\frac{R\sqrt{u^2-2Rt-t^2}}{2R+t},$$

$$a+c=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt-t^2}}{2R+t}\tag{17}$$

An diese Formeln wollen wir noch folgende Betrachtung anschliessen.

Nimmt man in Bezug auf unsere Ellipse in (e) die durch den Augenpunkt gelegte Horizontale als Polare an, so ist der zugehörige Pol nichts Anderes, als die Projektion des in (E) gegebenen Kreismittelpunktes. Alle durch diesen gehenden Linien werden nämlich von demselben und dem Kreise in drei Punkten geschnitten, welche mit dem unendlich entfernten Punkte der Geraden ein System harmonisch liegender Punkte ausmachen. Die Projektion einer harmonischen Geraden ist aber wieder harmonisch getheilt. In (e) aber entsprechen der von dem Kreise in (E) durchschnittenen Geraden eine von der Ellipse geschnittene Gerade, dem unendlich entfernten Punkte ein Punkt auf der Horizontalen, welcher mit jenen zwei Punkten der Ellipse in einer Geraden liegt, folglich muss auch dem letzten der harmonischen Punkte, d. h. dem Kreismittelpunkte, derjenige Punkt in (e) entsprechen, welcher der vierte harmonische zu den drei schon gefundenen ist, d. h. der harmonische Pol, mithin ist dieser die Projektion des Kreismittelpunktes in (E).

Man könnte nun die Frage aufstellen, ob es nicht möglich sei, das Projektionscentrum so zu legen, dass der Pol mit einem der Brennpunkte zusammen fällt. Hierauf ist die Antwort folgende.

Nennen wir x die Entfernung des harmonischen Poles von der Grundlinie mn, so lässt sich dieselbe mit Hülfe der Gleichung (1) finden, wenn man bemerkt, dass für den harmonischen Pol $X=R$ ist. Wir haben also:

$$x=\frac{Ru}{R+t}.$$

Soll nun der harmonische Pol mit dem Brennpunkte (es kann diess nur der obere sein) zusammenfallen, so muss $x=a+c$ werden, woraus durch Substitution der Werthe von x und $a+c$ aus (17) folgt:

$$\frac{Ru}{R+t}=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt+t^2}}{2R+t}$$

oder

$$\frac{2R+t}{R+t}u-u=\sqrt{u^2-2Rt+t^2},$$

d. h. weil die linke Seite $=\left(\frac{2R+t}{R+t}-1\right)u=\frac{Ru}{R+t}$ ist:

$$\frac{R^2u^2}{(R+t)^2}=u^2-2Rt+t^2,$$

oder durch Transposition

$$2Rt+t^2=\left(1-\frac{R^2}{R^2+2Rt+t^2}\right)u^2=\frac{(2Rt+t^2)u^2}{(R+t)^2},$$

woraus folgt

$$\frac{u^2}{(R+t)^2}=1,$$

und mithin

$$u=R+t,\ t=u-R, \tag{18}$$

gewiss ein überraschend einfaches Resultat!

Will man also einen gegebenen Kreis so projiziren, dass in der entstehenden Ellipse ein Brennpunkt mit dem harmonischen Pol in Bezug auf eine noch zu bestimmende Gerade zusammenfalle, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten (Taf. IV. Fig. 1):

Durch einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises lege man eine Tangente und ziehe von dem Mittelpunkte C die Senkrechte CA. Auf ihrer Verlängerung über A hinaus nehme man eine Strecke $Ao > AC$ beliebig und o als Augenpunkt. Hierauf mache man $Ac=AC$, ziehe durch b eine Senkrechte auf Ao und nehme auf ihr $bv=oc$, so ist v der zugehörige Distanzpunkt. Projizirt man mit Hülfe beider Punkte den Kreis in (E) auf (e), so erhält man eine Ellipse, deren Brennpunkt e zugleich der Pol in Bezug auf ov als Polare ist.

XXX.

Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Die Lehre vom Rauminhalt der Körper ist bekanntlich auf den Satz gegründet, dass zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleichen Rauminhalt haben. Die Beweise dieses Lehrsatzes, welche bisher bekannt sind, sind aber solche, die mehr in das Gebiet der höhern, als in das der Elementarmathematik gehören, sogenannte Exhaustionsbeweise. Einer von diesen Beweisen ist der in den Gerlingschen Ausgaben der reinen Mathematik von Lorenz enthaltene.

Aufmerksam gemacht durch Gauss, dass es wünschenswerth sei, diesen Beweis durch einen mehr elementaren zu ersetzen, dass man bis jetzt nicht einmal einen elementaren Beweis für den Satz besitze, dass dreiseitige Pyramiden, die einander gegenbildlich gleich sind, d. h. sich wie rechts und links verhalten, gleichen Rauminhalt haben, beschäftigte sich Gerling mit diesen Aufgaben. Er fand für die Gleichheit der Grösse zweier gegenbildlich gleichen Pyramiden einen den Anforderungen genügenden Beweis und seine Mittheilung darüber ist die Veranlassung, dass auch ich mich mit dem fraglichen Gegenstand beschäftigte, da der von Gerling gefundene Beweis mir ein zu complicirter zu sein schien. — Ich halte es für angemessen, das bei dieser Gelegenheit von mir Gefundene dem mathematischen Publikum vorzulegen.

Ich setze voraus, dass folgende Sätze bereits bewiesen seien:

1) Parallelepipede, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind gleich gross.

2) Ein gerades dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds, dessen Grundfläche doppelt so gross als die des dreiseitigen Prismas ist und dessen Höhe gleich der des Prismas ist.

3) Jedes schiefe dreiseitige Prisma (Taf. IV. Fig. 2 *A*.) lässt sich umwandeln in ein gerades (Taf. IV. Fig. 2 *B*.) von demselben Querschnitt und ebenso grosser Länge der Seitenkante.

Es ist nämlich

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Taf. IV. Fig. 2 A.}\\ \text{Raumstück } a + \text{Raumstück } b\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Taf. IV. Fig. 2 B.}\\ \text{Raumstück } b_1 + \text{Raumstück } a_1\end{array}\right\}$$

weil $a \cong a_1$ und $b \cong b_1$ ist.

Vergleiche Gerlings Ausgabe von Lorenz.

4) Zwei dreiseitige Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich gross, sowohl dann, wenn in beiden Prismen eine der parallelogrammatischen (Seiten-)Flächen, als auch dann, wenn in beiden Prismen die dreieckigen Flächen als die Grundflächen betrachtet werden.

Der Beweis dieses Satzes ist in vielen Werken unvollständig, weil darin der dritte Satz fehlt, auf den er sich gründet. In der Gerlingschen Ausgabe von Lorenz ist er vollständig.

An vorstehende Sätze reihen sich folgende, zum Theil früher abzuhandelnde Lehren an.

§. 1. Erklärung. Zwei ähnliche gerade Linien AB und ab, die einander parallel sind, sind von gleicher Richtung der ähnlichen (gleichnamigen) Enden (was durch $(\overrightarrow{AB}) \# (\overrightarrow{ab})$ bezeichnet werden kann), wenn sie mit der Verbindungslinie Aa der Anfangspunkte innere Gegenwinkel BAa und baA bilden, die auf einerlei Seite von Aa liegen und einander zu zwei rechten Winkeln ergänzen, also nur dann gleich sind, wenn sie rechte Winkel sind; sie sind aber von entgegengesetzter Richtung der ähnlichen Enden (was durch $(\overrightarrow{AB}) \# (\overleftarrow{ab})$ bezeichnet werden kann), wenn sie mit Aa gleiche innere Wechselwinkel BAa und baA bilden. Siehe Taf. IV. Fig. 3. und Fig. 4.

§. 2. Erklärung. Aehnliche dreiseitige Pyramiden sind solche, die sich so zusammenstellen lassen, dass jede Kantenlinie der einen parallel ist mit einer ihr entsprechenden Kantenlinie der andern.

Sie heissen ebenbildlich ähnlich (vergleiche $cxyz$ und $c_1x_1y_1z_1$ in Taf. IV. Fig. 5.), wenn dabei je zwei einander entsprechende (ähnliche) Kantenlinien auch gleiche Richtung ihrer ähnlichen Enden haben; sind dagegen die Richtungen ihrer ähnlichen Enden entgegengesetzt, so heissen die beiden Pyramiden gegenbildlich ähnliche (vergleiche $cxyz$ und $c_1x_1y_1z_1$ in Taf. IV. Fig. 6).

§. 3. Lehrsatz. Sind zwei dreiseitige Pyramiden einer und derselben dritten ebenbildlich ähnlich oder sind beide einer und derselben dritten gegenbildlich ähnlich, so sind beide einander selbst ebenbildlich ähnlich.

Beweis. Werden die drei verglichenen Pyramiden P_1, P_2, P_3 in solche Zusammenstellung gebracht, dass ihre ähnlichen Kantenlinien einander parallel sind, so ist im ersten Falle jede Kantenlinie von P_3 parallel mit den entsprechenden Kantenlinien von P_1 und

von P_2, und die Richtungen der ähnlichen Enden sind gleich, so dass auch jede Kantenlinie von P_1 parallel ist der ihr entsprechenden Kantenlinie von P_2 und mit ihr gleiche Richtung der ähnlichen Enden hat. Im zweiten Falle aber ist jede Kantenlinie von P_2 parallel und von entgegengesetzter Richtung der Enden mit den ihr entsprechenden Kantenlinien von P_1 und von P_2, weshalb jede Kantenlinie von P_1 parallel ist der ihr entsprechenden Kantenlinie von P_2 und mit ihr gleiche Richtung der ähnlichen Enden hat.

§. 4. Erklärung. Sind zwei dreiseitige Pyramiden b und β (Taf. IV. Fig. 7) einander ebenbildlich ähnlich und es ist eine Kantenlinie $c_{,}y_{,}$ der einen an Länge gleich der ihr entsprechenden Kantenlinie $c_{,,}y_{,,}$ der andern (mithin jede Kantenlinie der einen an Länge gleich der ihr entsprechenden Kantenlinie der andern), so ist jede ein Ebenbild der andern.

§. 5. Zusatz. Jede dreiseitige Pyramide ist ihrem Ebenbilde an Körperinhalt gleich gross. — Beide lassen sich nemlich in congruente Zusammenstellung versetzen.

§. 6. Erklärung. Sind zwei dreiseitige Pyramiden (Taf. IV. Fig. 8.) einander gegenbildlich ähnlich und es ist eine Kantenlinie cy der einen an Länge gleich der entsprechenden Kantenlinie $c_{,}y_{,}$ der andern (mithin jede Kantenlinie der einen gleich der entsprechenden Kantenlinie der andern), so heisst die eine ein Gegenbild der andern.

§. 7. Lehrsatz. Jede dreiseitige Pyramide a (Taf. IV. Fig. 8. oder a und b Fig. 7.) und ihr Gegenbild b haben gleich grossen Körperinhalt.

Beweis. Man verbinde a und b so, wie a und β (Taf. IV. Fig. 7.) verbunden sind; d. h. so, dass die gleichen Kantenlinien cy und $c_{,,}y_{,,}$ in einer und derselben ihnen gleichen Linie ou liegen und entgegengesetzte Richtung haben, während $\left(\overrightarrow{c_{,,}\,x_{,,}}\right) \# \left(\overleftarrow{c\,x}\right)$, $\left(\overrightarrow{c_{,,}\,z_{,,}}\right) \# \left(\overleftarrow{c\,z}\right)$; $\left(\overrightarrow{y_{,,}\,x_{,,}}\right) \# \left(\overleftarrow{y\,x}\right)$ und $\left(\overrightarrow{y_{,,}\,z_{,,}}\right) \# \left(\overleftarrow{y\,z}\right)$ ist, folglich auch (weil parallele Ebenen, die von parallelen Ebenen durchschnitten werden, parallele Durchschnittslinien liefern) $x_{,,}z_{,,} \# xz$, mithin auch (weil die Winkel $zxx_{,,}$ und $z_{,,}x_{,,}x$, die sie mit einer Linie $xx_{,,}$ bilden würden, innere Wechselwinkel sind) $\left(\overrightarrow{x_{,,}\,z_{,,}}\right) \# \left(\overleftarrow{x\,z}\right)$ ist. Stellen nun in Taf. IV. Fig. 9. $cyxz = a$ und $c_{,,}y_{,,}x_{,,}z_{,,} = \beta$ die so verbundenen Pyramiden dar, so verlängere man die Ebene xyz über xy und die Ebene $c_{,,}z_{,,}x_{,,}$ über $c_{,,}z_{,,}$ hinaus und lege durch ux und $uz_{,,}$ eine Ebene $xuz_{,,}m$, so wird ein vierseitig pyramidenförmiger Raum $xuz_{,,}mo = d$ begrenzt, der mit jeder der beiden Pyramiden a und β einzeln zusammengenommen ein dreiseitiges Prisma $d + a$ oder $d + \beta$ bildet.

Es entstehen nämlich Durchschnittslinien om, xm und $z_{,,}m$, und es ist

1) $om \# zx \# z_{,,}x_{,,}$ als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen $x_{,,}u$ und czx mit der Ebene zm und weil $z_{,,}x_{,,} \# zx$ ist.

2) $z_{,,}m \# ux$ d. h. $\# cx$ / $\# ox_{,,}$ d. h. $\# c_{,,}x_{,,}$ — als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen $x_{,,}m$ und $ox_{,,}z_{,,}$ mit der Ebene um und weil $c_{,,}x_{,,} \# cx$ ist.

3) $xm \# uz_{,,}$ d. h. $\# y_{,,}z_{,,}$ / $\# oz$ d. h. $\# yz$ — als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen zm und $y_{,,}x_{,,}z_{,,}$ mit der Ebene um und weil $y_{,,}z_{,,} \# yz$ ist.

Da nun $xm \# uz_{,,} \# oz$ und $om \# zx$ und $z_{,,}m \# ux$, so ist $omz_{,,}uxz$ ein dreiseitiges Prisma, das aus $\alpha+d$ besteht; da ferner $z_{,,}m \# ux \# ox$ und $om \# z_{,,}x_{,,}$ und $xm \# uz_{,,}$, so ist $oxmz_{,,}x_{,,}u$ ein dreiseitiges Prisma, das aus $\beta+d$ besteht. Da nun aber die beiden liegenden dreiseitigen Prismen $d+\alpha$ und $d+\beta$ einerlei parallelogrammatische Grundfläche $z_{,,}uxm$ und gleiche Höhe haben, so ist $\alpha+d=d+\beta$, mithin auch $\alpha=\beta$.

§ [illegible] Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, dass man überhaupt zwei Vereine von Punkten (und ebenso auch zwei Körper) ähnliche zu nennen habe, wenn sie sich so zusammenstellen lassen, dass jede mögliche gerade Verbindungslinie zweier Punkte des einen parallel ist mit der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte des andern und dass die Aehnlichkeit eine ebenbildliche Aehnlichkeit heisse, wenn dabei jede Verbindungslinie zweier Punkte des einen gleiche Richtung der gleichnamigen Enden hat mit der ihr parallelen des andern, während im Falle je zwei einander entsprechende parallele Linien entgegengesetzte Richtung haben, die beiden Vereine von Punkten (und ebenso die beiden Körper) gegenbildlich ähnliche heissen. Daraus folgt dann leicht, dass je zwei ähnliche Vereine von Punkten (und ebenso auch zwei ähnliche Körper), bei denen die Gleichheit einer geraden Verbindungslinie zweier Punkte des einen und der ihr entsprechenden Verbindungslinie des andern, an Länge erkannt ist, als ebenbildlich gleich oder als gegenbildlich gleich erklärt werden müssen, je nachdem sie ebenbildlich ähnlich oder gegenbildlich ähnlich sind. Endlich sieht man ein, wie es [illegible] leicht ist, zu beweisen, dass nicht nur je zwei ebenbildlich gleiche Körper (die sich in Congruenz versetzen lassen), sondern dass auch je zwei gegenbildlich gleiche Körper gleichen Rauminhalt haben.

Vielleicht erlaube ich mir später weitere Mittheilungen über die Art und Weise, wie, den hier ausgesprochenen Definitionen entsprechend, die Lehre von der Aehnlichkeit überhaupt darzustellen sein würde.

XXXI.

Ueber die Dehnung und das Zerreissen prismatischer Körper unter der Voraussetzung, dass die spannende Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse des Körpers wirkt.

Von dem

Herrn Fabriken-Commissions-Rathe A. F. W. Brix

zu Berlin.

Bereits im vierten Bande dieses Archivs, S. 293 u. f., habe ich eine theoretische Untersuchung über die Dehnung prismatischer Stäbe mit ungleichen Querschnitten mitgetheilt, zu der ich durch meine Versuche im Königlichen Gewerbe-Institut zur Ermittelung der Elasticität des Schmiedeeisens veranlasst worden war. Eine gleiche Veranlassung hat die vorliegende Arbeit, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, da die Resultate derselben für die Anwendung von Wichtigkeit zu sein scheinen, obgleich sie selbst vom wissenschaftlichen Standpunkte aus vielleicht nur ein geringes Interesse in Anspruch nehmen kann. Ich habe mich aber dadurch nicht abhalten lassen, die mir von der Praxis gestellte Aufgabe ganz elementar zu behandeln, und es dürfte auch zu bezweifeln sein, dass die Anwendung des höhern Calcüls kürzer zum Ziele geführt oder allgemeinere Resultate gegeben haben würde, als wie man sie im Nachstehenden finden wird.

Es handelt sich nämlich darum, bei prismatischen Körpern, die nach der Richtung ihrer Länge gespannt werden, die Dehnung und demnächst die absolute Festigkeit unter der Voraussetzung

zu bestimmen, dass die spannende Kraft nicht, wie es gewöhnlich vorausgesetzt wird, in der Richtung der Schwerpunkts-Achse des Körpers, sondern in einem bestimmten Abstande von derselben nach paralleler Richtung wirkt.

Bei der gewöhnlichen, zuerst erwähnten, Annahme werden alle Fasern des Körpers gleich gespannt; sie erleiden also gleiche Dehnungen und werden zuletzt auch zu gleicher Zeit zerreissen. — Die dieser Annahme entsprechenden Gleichungen sind bekanntlich

$$P = m.\frac{F\lambda}{l} \text{ und } P = KF,$$

worin P die spannende oder zerreissende Kraft, F den Querschnitt, l die Länge des Körpers, λ die Dehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze, m das Maass der Elasticität und K das der absoluten Festigkeit bezeichnet.

Nicht so einfach gestalten sich die Gleichungen, wenn die Richtung der spannenden Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse angenommen wird. In diesem Falle werden die Fasern auf der Seite, wo die Kraft wirkt, mehr als die auf der entgegengesetzten Seite des Körpers ausgedehnt, und das endliche Zerreissen wird also — auf ähnliche Weise wie beim Zerbrechen der Körper — successive erfolgen, indem die äussersten Fasern auf der Seite der grössten Dehnung zuerst, die gerade entgegengesetzt liegenden Fasern aber zuletzt zerreissen.

Es stelle $ACBD$ (Taf. V. Fig. 1.) einen prismatischen, vollkommen elastischen Körper mit beliebigem Querschnitte vor, der in verticaler Stellung seiner Schwerpunkts-Achse CD mit seiner oberen Endfläche befestigt, an seinem unteren Ende aber durch ein in E aufgehängtes Gewicht P belastet ist. Ferner sei AB irgend ein Querschnitt in dem Abstande $CG = l$ vom oberen Ende, und $A'B'$ sei die Lage, in welche derselbe durch die Ausdehnung des oberen Körperstückes CAB übergegangen und darin zum Gleichgewichte gekommen ist. — Offenbar muss nun die Dehnung AA' auf der linken Seite der Schwerpunkts-Achse grösser als die BB' auf der rechten Seite sein, dergestalt, dass die Dehnungen sämmtlicher zwischen A und B liegender Fasern durch die Convergenz der Ebenen AB und $A'B'$ bestimmt werden. Diese beiden Ebenen schneiden sich verlängert in einer horizontalen Linie, die im Punkte O projicirt gedacht ist, und die nach Umständen ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegen kann.

Man kann dieselbe als neutrale Achse betrachten, um welche die Punkte des Querschnittes AB beim Uebergange in die Lage $A'B'$ eine drehende Bewegung gemacht haben. Ist dann die Elasticität des Körpers mit der spannenden Kraft P in's Gleichgewicht gekommen, so müssen offenbar folgende Bedingungen stattfinden:

1) die algebraische Summe aller Spannungen in AB muss gleich der Kraft P, und

2) die Summe der Momente aller Spannungen in Bezug auf die bei O projicirte Achse gleich dem Moment $(P.HO)$ der Kraft P in Bezug auf dieselbe Achse sein.

Um die diesen Bedingungen entsprechenden Gleichungen zu bilden, sei x der Abstand GH zwischen der Richtungslinie der Kraft P und der Schwerpunkts-Achse, y die Entfernung OG der neutralen Achse vom Schwerpunkte G des in Betracht gezogenen Querschnittes, dann ist $x+y=HO$ der Hebelarm für die Kraft P. Bezeichnet ferner σ die Spannung einer Faser von 1 Quadratzoll Querschnitt, die sich in dem Abstande $=1$ Zoll von der neutralen Achse befindet, so drückt σz die Spannung einer gleichen Faser aus, deren Abstand von der genannten Achse $=z$ ist.

In Taf. V. Fig. 2. stelle e ein beliebiges Element des Querschnittes AB vor und z sei der Abstand desselben von der neutralen Achse XY. Betrachtet man dieses Element als den Querschnitt einer Faser, so ist dem Obigen gemäss σz die Spannung dieser Faser für die Einheit des Querschnittes, und für den Querschnitt e ist also die Spannung $s=\sigma ze$. Denkt man sich auf dieselbe Weise die Spannungen aller übrigen Fasern bestimmt, wobei der Factor σ offenbar derselbe bleibt, so erhält man für die Summe aller Spannungen den Ausdruck

$$\Sigma\sigma ze = \sigma \, . \, \Sigma ez.$$

Nach bekannten Lehren der Statik ist aber $\Sigma ez = Fy$; substituirt man dies und berücksichtigt zugleich die zuerst ausgesprochene Bedingung des Gleichgewichts, so erhält man die ihr entsprechende Gleichung

$$(1) \qquad P = \sigma \, . \, Fy.$$

Ferner ist das Moment der Spannung der Faser e in Bezug auf die Achse XY gleich sz, oder, wenn für s der vorige Werth gesetzt wird,

$$sz = \sigma ez^2;$$

also ist die Summe aller Spannungs-Momente

$$\Sigma sz = \sigma \, . \, \Sigma ez^2.$$

Nach Lehren der Mechanik drückt Σez^2 das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes AB in Bezug auf XY als Achse aus, und dieses Moment lässt sich bekanntlich durch die Formel $N+Fy^2$ ausdrücken, wenn N das Trägheitsmoment der in Rede befindlichen Fläche F für die durch ihren Schwerpunkt gehende Achse VW bedeutet. Ausserdem ist $P(x+y)$ das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die neutrale Achse XY, und da zufolge der zweiten Bedingung dieses Moment der Summe aller Spannungs-Momente gleich sein muss, so hat man dem gemäss die Gleichung

$$(2) \qquad P(x+y) = \sigma(N+Fy^2).$$

Setzt man darin für P den durch die Gleichung (1) gegebenen Werth, so kömmt, da σ auf beiden Seiten sich hebt,

$$Fy(x+y) = N + Fy^2,$$

und hieraus findet man leicht

(3) $$y = \frac{N}{Fx};$$

ein Ausdruck, durch welchen der Abstand OG der neutralen Achse vom Schwerpunkte des Querschnittes AB bestimmt ist, da x in jedem besonderen Falle als gegeben angesehen werden muss.

Zufolge der letzten Gleichung stehen die beiden Abstände x und y in einer reciproken Beziehung zu einander, dergestalt, dass ihr Produkt die constante Grösse $\frac{N}{F}$ giebt. Nimmt man daher den einen gleich Null an, so wird der andere unendlich und umgekehrt. Für die gewöhnliche Annahme, dass die Richtungslinie der spannenden Kraft mit der Schwerpunkts-Achse des Körpers zusammenfällt, ist $x = 0$, also $y = \infty$; die Convergenz zwischen den beiden Durchschnittsebenen AB und $A'B'$ hört also auf, und alle Fasern des Körpers erleiden folglich in diesem Falle so gleiche Dehnungen wie gleiche Spannungen.

Vermittelst der gefundenen drei Gleichungen ist es nun leicht, die Dehnung irgend einer Faser zu bestimmen, wenn der Abstand derselben von der Schwerpunkts-Achse, oder — bestimmter ausgedrückt — von der durch den Schwerpunkt G (Taf. V. Fig. 2.) mit der neutralen Achse XY parallel gezogenen Linie VW gegeben ist.

Bezeichnet nämlich $\pm\alpha$ diesen Abstand, jenachdem die fragliche Faser auf der linken oder rechten Seite von VW liegt, so ist $y \pm \alpha$ ihr Abstand von XY, und $s = \sigma(y \pm \alpha)$ drückt die zugehörige Spannung für den Quadratzoll ihres Querschnittes aus. Nach Gleichung (1) ist aber $\sigma = \frac{P}{Fy}$, und wenn dies in den vorigen Ausdruck von s gesetzt wird, entsteht:

$$s = \frac{P(y \pm \alpha)}{Fy};$$

oder, wenn man für y den durch die Gleichung (3) gegebenen Werth einsetzt,

(4) $$s = P . \frac{N \pm \alpha F x}{FN}.$$

Die Gleichung zwischen dieser Spannung und der durch sie bewirkten Dehnung λ, letztere für eine Faser von der Länge l verstanden, ist nun mit Rücksicht darauf, dass hier der Querschnitt jener Faser $= 1$ vorausgesetzt wird,

$$s = m . \frac{\lambda}{l};$$

wo m, wie früher erwähnt, den Elasticitäts-Modulus bedeutet. Hieraus findet man nun $\lambda = \frac{sl}{m}$; mithin nach Substitution des obigen Werthes von s,

(5) $$\lambda = \frac{Pl}{mF} . \frac{N \pm \alpha F x}{N}.$$

Für $x=0$, d. h. für die Annahme, dass die Richtung der Kraft P mit der Schwerpunkts-Achse zusammenfällt, liefern die Gleichungen (4) und (5) nach einander

$$s=P, \text{ und } \lambda=\frac{Pl}{mF}.$$

Beide Resultate bedürfen keiner Erklärung, da sie mit den bekannten Dehnungsgesetzen elastischer Körper übereinstimmen.

Uebrigens liefert nun die Gleichung (5) für alle positiven und negativen Werthe von α die Dehnungen der zugehörigen Fasern, welche Dehnungen grösser oder kleiner ausfallen, jenachdem die Fasern mit der spannenden Kraft P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Schwerpunkts-Achse liegen. Für negative Werthe von α können die Dehnungen, wie sich weiterhin zeigen wird, auch negativ ausfallen, und müssen dann als Zusammendrückungen oder Verkürzungen der Fasern aufgefasst werden.

Verlangt man z. B. die Dehnung einer Faser kennen zu lernen, die in der Schwerpunkts-Achse selbst liegt, so ist $\alpha=0$ zu setzen, und man findet

$$\lambda=\frac{Pl}{mF}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von x und spricht also das allgemeine Gesetz aus, *dass die Dehnung in der Schwerpunkts-Achse, wo auch die spannende Kraft wirken möge, unter übrigens gleichen Umständen stets denselben Werth behält.*

Vorstehendes Gesetz ist von Wichtigkeit, wenn man den Elasticitäts-Modulus aus directen Dehnungsversuchen berechnen will, wobei in der Regel die obige Gleichung zum Grunde gelegt wird. Offenbar darf dies aber nur dann geschehen, wenn die durch eine bekannte Kraft P hervor gebrachte Dehnung des Körpers in der Richtung seiner Schwerpunkts-Achse gemessen ist; denn sonst müssen nothwendig mehr oder minder fehlerhafte Resultate entstehen. Um dies näher ersehen zu lassen, wollen wir die allgemeine Gleichung (5) auf einige besondere Fälle anwenden.

Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, wo der Querschnitt des Prismas ein Rechteck von den Abmessungen b und d ist, und setzen dabei voraus, die Kraft P sei in der Mitte der einen Seitenfläche, welche d zur Breite hat, angebracht; dann hat man bekanntlich $F=bd$, $N=\frac{1}{12}bd^3$, $x=\frac{1}{2}d$; also entsteht nach Gleichung (5)

$$\lambda=\frac{Pl}{mbd}\cdot\frac{d\pm 6a}{d}.$$

Will man hiernach die Dehnung der Faser bestimmen, die mit P in derselben oder die in der gegenüberstehenden Seitenfläche des Körpers liegt, so muss man in beiden Fällen $\alpha=\frac{1}{2}d$ setzen, und je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen gelten lässt, erhält man nach einander

$$\lambda_1 = 4 \cdot \frac{Pl}{mbd}; \; \lambda_2 = -2 \cdot \frac{Pl}{mbd}.$$

In der einen Seitenfläche findet also im vorliegenden Falle eine Ausdehnung statt, welche viermal, in der andern Seitenfläche aber eine Verkürzung der Fasern, welche doppelt so gross ist, als die Dehnung in der Schwerpunkts-Achse. Die neutrale Achse muss also innerhalb des Körpers liegen, und in der That ergiebt sich ihr Abstand y von der Schwerpunkts-Achse nach Gleichung (3), wenn darin die obigen Werthe von N, F und x eingesetzt werden, gleich $\frac{1}{6}d$.

Für einen cylindrischen Stab mit kreisförmigem Querschnitte ist, wenn r den Halbmesser bezeichnet, $F = \pi r^2$, $N = \frac{1}{4}\pi r^4$; also entsteht

$$\lambda = \frac{Pl}{\pi m r^2} \cdot \frac{r^2 \pm 4\alpha x}{r^2}.$$

Nimmt man nun die Kraft P in einer Seitenlinie des Cylindermantels an, so dass $x = r$ ist, so ergiebt sich die Aenderung der Länge in dieser, so wie die in der gegenüberstehenden Seitenlinie, wenn α bezüglich gleich $+r$ und gleich $-r$ gesetzt wird. Es entsteht nämlich nach einander

$$\lambda_1 = 5 \cdot \frac{Pl}{\pi m r^2}; \; \lambda_2 = -3 \cdot \frac{Pl}{\pi m r^2};$$

während sich zugleich $y = \frac{1}{4}r$ ergiebt. Die Werthe von λ_1 und λ_2 weichen hier also noch mehr von einander ab, als vorhin bei rechteckigen Querschnitten.

Dass nun diese Ungleichmässigkeit in der Dehnung der Fasern bei genauen Versuchen sehr störend auf die Ergebnisse einwirken kann, wird einleuchten, wenn man die Schwierigkeit erwägt, den zu prüfenden Körper (etwa eine dicke Eisenstange) an den Enden so zu fassen, dass nicht auf der einen Seite grössere Spannungen entstehen, als auf der entgegengesetzten. Es zeigen sich dann sofort grosse Unregelmässigkeiten in dem progressiven Fortschreiten der Dehnungsgrössen mit den zunehmenden Belastungen, wie ich das bei meinen Versuchen mehrmals wahrgenommen habe, ohne dass ich mir diese Erscheinung anfänglich erklären konnte. Jene Unregelmässigkeiten zu vermeiden, ist aber um so schwieriger, als es sich kaum ausführen lässt, die in der Schwerpunkts-Achse statthabende Dehnung, welche allein maassgebend sein kann, mit Sicherheit zu beobachten.

Nach dieser Abschweifung in das Gebiet der Praxis kehre ich wieder zu der vorliegenden Frage zurück. Es bleibt nämlich noch übrig, die absolute Festigkeit des prismatischen Körpers, oder denjenigen Werth der Kraft P zu bestimmen, welcher mit der genannten Festigkeit im Gleichgewichte steht. Zu dem Ende hat man nach Gleichung (4)

$$P = sF \cdot \frac{N}{N \pm \alpha F x},$$

worin s die Spannung derjenigen Faser bedeutet, deren Abstand von der Schwerpunkts-Achse gleich α ist.

Da es nun mit Rücksicht auf die vorliegende Aufgabe nur darauf ankommt, den Widerstand zu ermitteln, den der Körper durch seine Cohäsion einer Trennung seiner Theile überhaupt entgegen zu setzen vermag, so ist einleuchtend, dass hierbei nur die Spannung derjenigen Faser, welche am ersten zerreissen wird, maassgebend sein kann. Es darf also zuvörderst α nur positiv genommen werden, und ausserdem ist unter s diejenige Spannung zu verstehen, welche mit der absoluten Festigkeit jener Faser im Gleichgewichte steht. Bezeichnet man dieselbe für den Quadratzoll des Querschnittes mit K, so ist also

(7) $$P=KF\cdot\frac{N}{N+\alpha Fx}$$

der Ausdruck für die absolute Festigkeit des ganzen Körpers. Für $x=0$ entsteht daraus $P=KF$, welches die bekannte Formel für die absolute Festigkeit unter der besonderen Voraussetzung ist, dass die zerreissende Kraft in der Richtung der Schwerpunkts-Achse wirkt. Fällt aber die Richtung der Kraft mit derjenigen Faser zusammen, die bei der Trennung des Körpers am ersten zerreisst, so muss $x=\alpha$ gesetzt werden, und es entsteht

(8) $$P=KF\cdot\frac{N}{N+\alpha^2F}$$

Wenden wir diese Gleichung auf die vorhin betrachteten besonderen Fälle an, so ist

1) für einen rechteckigen Querschnitt von den Abmessungen b und d: $F=bd$, $N=\frac{1}{12}bd^3$ und $\alpha=\frac{1}{2}d$; also

$$P=\tfrac{1}{4}K.bd;$$

2) für einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r: $F=\pi r^2$; $N=\frac{1}{4}\pi r^4$ und $\alpha=r$; daher

$$P=\tfrac{1}{5}K.\pi r^2.$$

Der Widerstand gegen das Zerreissen beträgt also bei einem vierkantigen Stabe, wenn die zerreissende Kraft in der Mitte einer der Seitenflächen angebracht ist, nur den vierten Theil, bei einem runden Stabe aber, wenn jene Kraft in einer Seitenlinie seines Mantels wirkt, nur den fünften Theil desjenigen Widerstandes, den die genannten Körper einer Kraft entgegen zu setzen vermögen, deren Richtungslinie jedesmal mit der Schwerpunkts-Achse zusammenfällt.

In manchen Fällen der Anwendung kann aber die Richtung der Kraft auch ganz ausserhalb des Körpers zu liegen kommen, welches unter Andern bei einem offenen Haken (Taf. V. Fig. 3.) der Fall ist. Nimmt man z. B. an, derselbe sei aus einem runden Eisenstabe vom Halbmesser r gebogen und setzt demgemäss für F, N und α die vorhin angegebenen Werthe, so hat man

$$P = \pi r^2 K \cdot \frac{r}{r+4x};$$

worin x gleich dem Abstande GH ist. Setzt man die ganze Weite des Hakens $DG = a$ und $x = \frac{1}{2}a$, so ergiebt sich seine Festigkeit durch die Formel

$$P = \pi r^2 K \cdot \frac{r}{r+2a}.$$

Je weiter der Haken, desto geringer ergiebt sich hiernach seine Festigkeit, weshalb man in der Praxis diese Weite niemals grösser machen darf, als es mit Rücksicht auf die übrigen Umstände durchaus nöthig ist. In der Regel wird $DG = 2.AB$ oder $a = 4r$ gemacht, wofür man $P = \frac{1}{9}.\pi r^2 K$ findet. Die Festigkeit des Hakens beträgt also in diesem Falle nur den 9ten Theil von der absoluten Festigkeit des dazu verwendeten Eisens im geraden Zustande.

XXXII.

Eigenthümliche, leicht fassliche, in systematischem Zusammenhange stehende Beweise bekannter wichtiger Sätze aus der Combinationslehre.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel in Marburg.

---

1. Wenn bei den combinatorischen Arbeiten keine solche Beschränkungen vorgeschrieben sind, durch welche ein häufigerer Gebrauch des einen und ein seltenerer des andern Elements bedingt wird, so muss jedes der gegebenen m Elemente in der Gesammtheit der Complexionen der $n$ten Classe so oft enthalten sein als das andere.

2. Wenn keines der Elemente in einer Complexion mehr als einmal vorkommen darf, oder wenn die erlaubte Wiederholung für **alle** Elemente ganz unbeschränkt oder in **gleichem** Grade beschränkt

statt finden darf, so wird hierdurch keine Verschiedenheit im Gebrauch der verschiedenen Elemente vorgeschrieben.

3. Man findet daher, wenn keine eingeschränkten Wiederholungen in Betracht kommen, die Anzahl $\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)$, welche angibt, wie oft eines der m Elemente in der Gesammtheit der Complexionen der $n$ten Classe vorkommt, wenn man die Anzahl $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$ der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen mit der Anzahl n der Elemente, die in jeder Complexion enthalten sind, multiplicirt und mit der Anzahl m der gegebenen Elemente dividirt:

$$A) \ldots \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\cdot\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right).$$

Da nämlich die $n$te Klasse $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$ Complexionen und jede Klasse derselben n Elemente enthält, so sind in allen Complexionen der $n$ten Klasse zusammengenommen $n.\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$ Elemente enthalten, mithin, da m Arten von Elementen da sind und von einer Art so viel als von der andern, so ist in allen Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen jedes der m Elemente $\frac{n}{m}\cdot\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$mal enthalten, d. h. $\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\cdot\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$.

4. Umgekehrt findet man daher die Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse für m Elemente durch die Gleichung

$$B) \ldots \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right).$$

5. Wird $n=m$, so hat man

$$\left(\overset{n}{\underset{n}{C}}\right)=\left(\overset{n}{\underset{n}{A}}\right) \text{ oder } \left(\overset{m}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{m}{\underset{m}{C}}\right).$$

6. Wenn man daher $\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)$ anderweitig bestimmt, so hat man in der Gleichung $B)$ ein Hülfsmittel zur Bestimmung von $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$, welches sowohl für Permutationen, Variationen und Combinationen ohne Wiederholungen, als auch für Variationen und Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen brauchbar ist, wie folgende Auseinandersetzung zeigt.

α) Permutationen ohne alle Wiederholungen.

7. Hier ist $m=n$, also $\left(\overset{m}{\underset{m}{C}}\right)=\left(\overset{m}{\underset{m}{A}}\right)$.

Bildung der mten oder nten Klasse.

Irgend eins der m Elemente lässt sich allen Complexionen der $(m-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen ansetzen, und zwar an jede in m verschiedenen Stellen (als erstes, zweites, drittes u. s. w. $m$tes Element) *); kommt also in der $m$ten Klasse $m$mal so oft vor, als Complexionen der $(m-1)$ten Classe möglich sind. Daher ist:

$$\text{I. } \binom{m}{A}_m = m\binom{m-1}{C}_{m-1}; \text{ also auch gemäss } B):$$

$$\text{II. } \binom{m}{C}_m = m\binom{m-1}{C}_{m-1}.$$

Es ist also, wenn man in II. statt m nach und nach setzt $(m-1)$, $(m-2)$,.. und so $\binom{m-1}{C}_{m-1}$, $\binom{m-2}{C}_{m-2}$,.. findet, und die gefundenen Werthe in II. substituirt: $\binom{m}{C}_m = m\binom{m-1}{C}_{m-1} = m(m-1).\binom{m-2}{C}_{m-2}$ $= m(m-1)(m-2).\binom{m-3}{C}_{m-3} = .. = m(m-1)(m-2)...(m-(p-1))\binom{m-p}{C}_{m-p}$, wobei zuletzt $\binom{m-p}{C}_{m-p} = \binom{1}{C}_1 = 1$, also $(m-(p-1)) = 2$ werden muss, so dass

$$\text{III. } \binom{m}{C}_m = m(m-1)(m-2)(m-3)...3.2.1 = 1.2.3...m$$

= **Anzahl der Permutationen ohne Wiederholungen für m Elemente;** also auch

$$\text{IV } \binom{m}{A}_m = 1.2.3....m.$$

β) Variationen ohne Wiederholungen.

Bildung der nten Klasse.

8. Irgend eins der m Elemente kann jeder Complexion der $(n-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen als erstes,

---

*) Es gibt zum Beispiel die Complexion abc der 3ten Klasse durch Setzung des Elementes d in eine der vier Stellen, die in der Darstellung

·	a	·	b	·	c	·

durch Punkte ausgefüllt sind, nebenstehende vier Complexionen der 4ten Klasse.

·	a	·	b	·	c	d	$= abcd$
·	a	·	b	d	c	·	$= abdc$
·	a	d	b	·	c	·	$= adbc$
d	a	·	b	·	c	·	$= dabc$

In ähnlicher Art können die übrigen Complexionen der 4ten Klasse aus den übrigen Complexionen der dritten Klasse (acb, bac, bca, cab, cba) hergeleitet werden.

zweites, drittes u. s. w. $n$tes Element, d. h. in n verschiedenen Stellen, angefügt werden. Es ist also die Zahl, welche angibt, wie oft ein Element in der $n$ten Klasse aus m Elementen enthalten ist, $n$mal so gross als die Anzahl der Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus $(m-1)$ Elementen. Diess in Zeichen ausgedrückt heisst,

$$\text{I.}\quad \binom{\overset{n}{A}}{m} = n\binom{\overset{n-1}{C}}{m-1};$$

da nun, zufolge B), allgemein $\binom{\overset{n}{C}}{m} = \frac{m}{n}\binom{\overset{n}{A}}{m}$, so ist hier:

$$\text{II.}\quad \binom{\overset{n}{C}}{m} = m\binom{\overset{n-1}{C}}{m-1} = m\,(m-1)\binom{\overset{n-2}{C}}{m-2} = m(m-1)(m-2)\binom{\overset{n-3}{C}}{m-3}$$

$$= m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-(p-1))\binom{\overset{n-p}{C}}{m-p},$$

wo nothwendig einmal $\binom{\overset{n-p}{C}}{m-p} = \binom{\overset{1}{C}}{m-(n-1)}$ werden muss, nemlich wenn $p = n-1$ wird.

Es ist aber dann $\binom{\overset{1}{C}}{m-(n-1)} = m-(n-1)$, weil $m-(n-1)$ Elemente $m-(n-1)$ Unionen geben. Auch ist dann $m-(p-1) = m-(n-2)$, also

$$\text{III.}\quad \binom{\overset{n}{C}}{m} = m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-2))\,(m-(n-1))$$

= der Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen zur $n$ten Klasse für m Elemente;

hieraus ergibt sich

$$\binom{\overset{n}{A}}{m} = n\binom{\overset{n-1}{C}}{m-1} = n.[(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-(n-1))].$$

γ) *Variationen mit unbeschränkten Wiederholungen.*

Bildung der $n$ten Klasse.

9. Wenn man eines der m Elemente allen Complexionen der $(n-1)$ten Classe für m Elemente zur Linken anfügt, so erhält man alle jene Complexionen der $n$ten Klasse, in welchen das fragliche Element in der ersten Stelle jeder Complexion sich befindet. Dasselbe gilt von jedem andern Element in Beziehung auf die betreffende andere Ordnung *) der $n$ten Klasse.

Jedes Element ist also in der $n$ten Klasse sovielmal als erstes Element vorhanden, als die $(n-1)$te Klasse Complexionen zählt.

*) Alle jene Complexionen einer Klasse, die einerlei Anfangselement haben, zu einerlei Ordnung gerechnet.

Es ist aber jedes Element ebenso oft in jeder der n Stellen vorhanden, als es in der ersten vorkommt (weil keiner der Stellen irgend ein Vorzug zusteht), daher muss hier

$$\text{I. } \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right) = n.\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)$$

sein; da nun gemäss B) gilt $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right) = \frac{m}{n}\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)$, so ist hier

$$\text{II. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right) = m.\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right), \text{ also}$$

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right) = m.\left(m\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)\right) = m^2\left(m\left(\overset{n-3}{\underset{m}{C}}\right)\right) = \ldots = m^p\left(\overset{n-p}{\underset{m}{C}}\right),$$

wo $\left(\overset{n-p}{\underset{m}{C}}\right)$ einmal $= \left(\overset{1}{\underset{m}{C}}\right)$, also $(n-p) = 1$, folglich $p = (n-1)$ werden muss.

Es ist aber $\left(\overset{1}{\underset{m}{C}}\right) = m$, weil m Elemente m Unionen geben; also wird

$$\text{III. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right) = m^{n-1}.m = m^n$$

= **Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen beim Variiren mit unbeschränkten Wiederholungen.**

Hieraus folgt: $\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right) = m^{n-1}$, und man hat also auch:

$$\text{IV. } \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right) = n.\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right) = n.m^{n-1}.$$

δ) *Combinationen ohne Wiederholungen.*

Bildung der $n$ten Klasse.

10. Wenn man eines der m Elemente an alle Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen ansetzt, so erhält man sämmtliche Complexionen der $n$ten Klasse. Man hat also für die Anzahl, welche angibt, wie oft dieses, folglich jedes Element, in der $n$ten Klasse gebraucht wird, die Gleichung:

$$\text{I. } \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right) = \left(\overset{n-1}{\underset{m-1}{C}}\right);$$

da nun gemäss B):

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right),$$

so ist

$$\text{II. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\left(\overset{n-1}{\underset{m-1}{C}}\right), \text{ also:}$$

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\left[\frac{m-1}{n-1}\left(\overset{n-2}{\underset{m-2}{C}}\right)\right]=\frac{m.(m-1)}{n.(n-1)}\cdot\left[\frac{m-2}{m-2}\left(\overset{n-3}{\underset{m-3}{C}}\right)\right]$$

$$=\frac{m.(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots.(m-(p-1))}{n.(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots.(n-(p-1))}\left(\overset{n-p}{\underset{m-p}{C}}\right),$$

wo, wenn $p=(n-1)$ wird, auch $\left(\overset{n-p}{\underset{m-p}{C}}\right)=\left(\overset{1}{\underset{m-p}{C}}\right)=\left(\overset{1}{\underset{m-(n-1)}{C}}\right)$ $=m-(n-1)$ und $m-(p-1)=m-(n-2)$, und $n-(p-1)=2$ wird, so dass:

$$\text{III. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-2)).(m-(n-1))}{n(n-1)\,(n-2)\ldots.2.1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

$$\left.\begin{array}{l} ⊙)\ \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\dfrac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.\,(m-(n-1))}{1.2.3\ldots.n} \\ \qquad\qquad \text{und} \\ ☽)\ \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.\,(n+(m-n))}{1.2.3\ldots.\,(m-n)}\ ^{*)} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Anzahl der Com-}\\ \text{plexionen der}\\ n\text{ten Klasse aus}\\ m\text{ Elementen}\\ \text{beim Combini-}\\ \text{ren ohne Wie-}\\ \text{derholungen,}\end{array}\right.$$

so dass die Formel ⊙) die bequemere ist, wenn $n<(m-n)$, und umgekehrt ☽) vorzuziehen ist, wenn $(m-n)<n$.

Hat man z. B. für 60 Elemente die Anzahl der Ternionen zu finden, so ist $3<(60-3)$, also die Formel ⊙) zu brauchen, und man hat

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{60.59.58}{1.2.3}, \text{ während ☽) gibt } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{4.5.6.7\ldots 60}{1.2.3.4\ldots.57}.$$

Ist dagegen für 6 Elemente die Anzahl der Complexionen der 4ten Klasse zu finden, so hat man

---

*) Es ist nämlich jeder Bruch $\frac{x}{y}=\frac{q:y}{q:x}$; ist also

$$x=m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-1)) \text{ und } y=1.2.3\ldots.n$$

$$\text{und } q=1.2.3\ldots.(n+m-n)=1.2.3\ldots.m, \text{ so ist}$$

$$\frac{q:y}{q:x}=\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots.(n+(m-n))}{1.2\ldots.(m-n)}.$$

$$\text{nach } \odot):\ \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4},$$

$$\text{nach } ☽):\ \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{5.6}{1.2}.$$

Aus ⊙) folgt mit Rücksicht auf I.

$$\text{IV}a.\ \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Aus ☽) folgt

$$\text{IV}b.\ \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+((m-1)-n))}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

ε) Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen.
Bildung der *n*ten Klasse.

11. Man erhält die nach einander folgenden Ordnungen der *n*ten Klasse von Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen aus *m* Elementen dadurch, dass man nach und nach jedes der *m* Elemente an alle diejenigen Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus *m* Elementen zur Linken (oder, wenn es nicht um regelmässige, sondern nur um vollständige Aufzählung der Complexionen der *n*ten Klasse zu thun ist, irgendwo) ansetzt, welche kein niedrigeres Element enthalten.

12. Wenn man also das niedrigste der *m* Elemente allen Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus denselben *m* Elementen zur Linken ansetzt, so erhält man alle diejenigen Complexionen der *n*ten Klasse, welche das niedrigste Element enthalten. Und zwar ist das niedrigste Element in diesen Complexionen (also in der ganzen *n*ten Klasse)

erstens, so viel mal in der ersten Stelle vorhanden, als die Anzahl der Complexionen der $(n-1)$ten Klasse beträgt (denen es zur Linken angefügt wurde), während es

zweitens, in den übrigen Stellen so viel mal vorhanden ist, als es in allen Stellen der $(n-1)$ten Klasse vorhanden ist.

13. Jedes der *m* Elemente ist aber in einer und derselben Klasse so oft enthalten, als das niedrigste, weil das Höher- oder Niedriger-Sein der Elemente keine Verschiedenheit der Anzahl, welche angibt, wie oft ein Element in einer Klasse vorzukommen hat, hervorruft; da man ja jedes der *m* Elemente als das niedrigste muss betrachten können. Es ist demnach für jedes Element

$$\text{I.}\ \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-1}{\underset{m}{A}}\right).$$

Da nun allgemein gemäss B) und A):

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right) \text{ oder } \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right),$$

so muss auch

$$\left(\overset{n-1}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n-1}{m}\cdot\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right),$$

mithin

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\frac{n-1}{m}\cdot\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)=\left(1+\frac{n-1}{m}\right)\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m+n-1}{m}\cdot\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)$$

sein; also gemäss B):

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m+n-1}{m}\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)\right),$$

folglich

$$\text{II. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m+n-1}{n}\cdot\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right).$$

Es ist also

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\cdot\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{n\cdot(n-1)}\cdot\left(\frac{m+n-3}{n-2}\right)\left(\overset{n-3}{\underset{m}{C}}\right)$$

$$=\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-p)}{n\cdot(n-1)\ldots(n-(p-1))}\cdot\left(\overset{n-p}{\underset{m}{C}}\right),$$

wo, wenn $\left(\overset{n-p}{\underset{m}{C}}\right)=\left(\overset{1}{\underset{m}{C}}\right)=m$ wird, auch $n-p=1$, also $p=n-1$, mithin auch $m+n-p=m+1$ und $n-(p-1)=2$ werden muss, so dass

$$\text{III. } \left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)\cdot m}{n\cdot(n-1)\ldots2\cdot1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

☉) $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}$

und

☽) $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$

= Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen beim Combiniren mit unbeschränkten Wiederholungen,

wo wieder ☉) bequemer ist als ☽), wenn $n<(m-1)$ und umgekehrt.

Da nun nach A)

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right),$$

so ist nach ☉)

$$\text{IV}a.\ \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots.(n-1)},$$

oder nach ☽)

$$\text{IV}b.\ \left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{1.2\ldots.(m-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{1.2.3\ldots.n}.$$

14. Aus I. unter 13., d. h. aus der Gleichung:

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-1}{\underset{m}{A}}\right)$$

folgt:

$$\left(\overset{n-1}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-2}{\underset{m}{A}}\right);$$

mithin ist

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-2}{\underset{m}{A}}\right)$$

$$=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-3}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-3}{\underset{m}{A}}\right)$$

$$=\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-2}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-3}{\underset{m}{C}}\right)+\ldots+\left(\overset{n-p}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{n-p}{\underset{m}{A}}\right),$$

wo, wenn $n-p=1$ wird, auch $\left(\overset{n-p}{\underset{m}{A}}\right)=1$ ist, so dass

$$\left(\overset{n}{\underset{m}{A}}\right)=1+\left(\overset{1}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{2}{\underset{m}{C}}\right)+\left(\overset{3}{\underset{m}{C}}\right)+\ldots+\left(\overset{n-1}{\underset{m}{C}}\right)$$

$$=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Es ist also die Summe der Reihe:

$$♂)\ 1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots.(n-1)}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Die Reihe δ) ist die gemeinschaftliche allgemeine Form für folgende bekanntlich höchst wichtige Reihen:

	1stes	2tes	3tes	4tes	$n$tes Glied	Summe der Reihe.
$m=1$	1	1	1	1	1	$\frac{n}{1}$
$m=2$	1	2	3	4	$\frac{n}{1}$	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
$m=3$	1	3	6	10	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$m=4$	1	4	10	20	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$m=5$	1	5	15	35	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$m=m$	1	$\frac{m}{1}$	$\frac{m(m+1)}{1.2}$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$	$\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2....(m-1)}$ oder $\frac{n(n+1)....(n+m-2)}{1.2....(n-1)}$	$\frac{m(m+1)(m+2)...(m+n-1)}{1.2.3...(n-1)}$ oder $\frac{n(n+1)(n+2)....(n+m-1)}{1.2.3....(m-1)}$

XXXIII.

Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen.

Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison) ausgezogen

von

dem Herausgeber.

Wenn man in den Formeln

$$1)\quad \begin{cases} x=bw-cv, \\ y=cu-aw, \\ z=av-bu \end{cases}$$

für u, v, w beliebige ganze Zahlen setzt, so erhält man, wovon man sich durch ganz leichte Rechnung auf der Stelle überzeugt, allemal eine Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen. Vorzüglich kommt es nun aber hierbei darauf an, dass man zeigt, dass die Gleichungen 1) auch alle Auflösungen der vorhergehenden Gleichung in ganzen Zahlen liefern, welche es geben kann, was bei dieser Untersuchung bei Weitem die Hauptsache ist.

Um diesen Beweis zu führen, wollen wir, was offenbar jederzeit verstattet ist, annehmen, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c die Einheit sei, oder dass diese Grössen relative Primzahlen seien. Sind nun, dies vorausgesetzt, X, Y, Z drei ganze Zahlen, durch welche die Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

aufgelöst wird, so ist

$$2)\ aX+bY+cZ=0;$$

und wenn wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a und b durch d bezeichnen, so muss d in

$$cZ=-aX-bY$$

aufgehen. Da aber c und d nothwendig relative Primzahlen sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, offenbar a, b, c nicht relative Primzahlen sein würden, wie doch vorausgesetzt wurde, so muss nach einem allgemein bekannten Satze d in Z aufgehen, und daher $\frac{Z}{d}$ eine ganze Zahl sein. Weil d, der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b ist, so sind $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen, und die Gleichung des ersten Grades

$$\frac{a}{d}V-\frac{b}{d}U=\frac{Z}{d}$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U und V, oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$3)\ Z=aV-bU,$$

ist also bekanntlich immer in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U und V immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen. Eliminirt man nun Z aus den beiden Gleichungen 2) und 3), so erhält man die Gleichung

$$a(X+cV)=b(cU-Y)$$

oder

$$4)\ \frac{a}{d}(X+cV)=\frac{b}{d}(cU-Y),$$

wo $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen sind. Daher muss nach dem schon oben angewandten Satze $\frac{b}{d}$, welches in dem Producte $\frac{a}{d}(X+cV)$ aufgeht, in $X+cV$ aufgehen, und man kann folglich, wenn G eine ganze Zahl bezeichnet,

$$5)\ X+cV=\frac{b}{d}G$$

setzen. Führt man aber diesen Werth von $X+cV$ in die Gleichung 4) ein, so erhält man auf der Stelle ferner

$$6)\ cU-Y=\frac{a}{d}G.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergiebt sich

$$7)\quad X=\frac{b}{d}G-cV,\ Y=cU-\frac{a}{d}G.$$

Da nach dem Obigen c und d relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung des ersten Grades

$$8)\quad dU'-cV'=G$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U' und V' bekanntlich in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U' und V' immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen; und führt man nun den Werth von G aus 8) in die Gleichungen 7) ein, so érhält man:

$$9)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU'. \end{cases}$$

Ueberlegt man jetzt noch, dass sich die Gleichung 3) offen bar auch auf den folgenden Ausdruck bringen lässt:

$$Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'),$$

so hat man für die Grössen X, Y, Z die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU', \\ Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'). \end{cases}$$

Vergleicht man aber diese Formeln mit den Formeln 1), so ergiebt sich, dass die letzteren aus den ersteren hervorgehen, wenn man

$$u=U+\frac{a}{d}V',\ v=V+\frac{b}{d}V',\ w=U'$$

setzt, und dass jede beliebige durch das System X, Y, Z dargestellte Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen aus den allgemeinen Formeln 1) erhalten wird, wenn man nur für u, v, w in diesen Formeln gewisse ganze Zahlen setzt, wie behauptet wurde.

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn das System x_0, y_0, z_0 irgend eine bestimmte Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen darbietet, die allgemeinen Werthe von x, y, z, welche diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösen, auch unter der Form

$$1)\quad \begin{cases} x=x_0+bw-cv, \\ y=y_0+cu-aw, \\ z=z_0+av-bu \end{cases}$$

dargestellt werden können.

XXXIV.

Ueber die Cycloide als Brachystochrone.

Von
dem Herausgeber.

Bei Vorträgen über die höhere Mechanik wird man ausser der Kenntniss der Differentialrechnung und der Integralrechnung, welche natürlich unerlässlich ist, bei allen Zuhörern nicht immer auch die Kenntniss der Variationsrechnung voraussetzen können. Und wenn nun auch allerdings die Aufgabe von der Brachystochrone *) ein recht eigentlich dieser letzteren Wissenschaft angehörendes Problem ist, so scheint es aus dem angegebenen Grunde und wegen des grossen Interesses der Aufgabe an sich, doch wünschenswerth, im Besitz einer die Anwendung der Variationsrechnung nicht in Anspruch nehmenden Auflösung derselben zu sein, die ich daher im Folgenden zu geben versuchen werde, wobei ich aber bemerken muss, dass diese Auflösung wenigstens in Rücksicht des ihr vorzüglich zum Grunde liegenden Princips mit der von Jacob Bernoulli gegebenen Auflösung nahe verwandt ist.

*) Wir betrachten hier nur den Fall einer Bewegung im luftleeren Raume oder überhaupt in einem nicht widerstehenden Mittel.

Die Aufgabe selbst kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

*Wenn A und B in Taf. V. Fig. 4. zwei gegebene Punkte sind, so soll man die diese beiden Punkte mit einander verbindende Curve von einfacher Krümmung *) bestimmen, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt.*

Die Auflösung dieser interessanten Aufgabe, welche wir im Folgenden geben werden, gründet sich vorzüglich auf das folgende Prinzip.

Wenn die in der Figur verzeichnete Curve AB die gesuchte ist, auf welcher also ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt, so wird auch jedes Stück ab dieser Curve von dem schweren Punkte, welcher in a mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen. Gäbe es nämlich ein anderes Curvenstück acb, welches, dieselbe Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt, in einer kürzeren Zeit als ab durchlaufen würde, so würde doch bB noch in derselben Zeit durchlaufen werden, weil nach einem aus der Mechanik bekannten Satze die in dem Punkte b erlangte Geschwindigkeit des sich bewegenden schweren Punktes dieselbe ist, dieser Punkt mag sich auf ab oder auf acb bewegen, indem diese Geschwindigkeit bekanntlich bloss von der vertikalen Entfernung der beiden Punkte A und b von einander abhängt, welche in beiden Fällen dieselbe ist. Also würde offenbar der schwere Punkt auf dem Wege $AacbB$ in einer kürzeren Zeit als auf dem Wege $AabB$ oder AB von A bis B gelangen, was gegen die Voraussetzung streitet, wodurch folglich unsere obige Behauptung gerechtfertigt ist.

Ferner gründet sich unsere Auflösung der Aufgabe von der Brachystochrone noch auf das folgende Problem, welches wir daher vorher auflösen müssen.

In Taf. V. Fig. 5. sei CD eine gegebene gerade Linie, und M und N seien zwei auf verschiedenen Seiten derselben liegende gegebene Punkte. Man soll in der Linie CD den Punkt P so bestimmen, dass, wenn man die Linien MP und NP zieht, und a und b zwei gegebene Zahlen bezeichnen, die Grösse

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ein Minimum werde.

Von M und N fälle man auf CD die Perpendikel MM' und und NN', und setze als gegebene Grössen $MM'=m$, $NN'=n$ und $M'N'=e$. Ferner bezeichne man die, jenachdem der Punkt P von M' aus nach N' oder nach der entgegengesetzten Seite hin liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des Punktes P von dem Punkte M' durch x, so ist

$$MP=\sqrt{m^2+x^2},\ NP=\sqrt{n^2+(e-x)^2},$$

---

*) Diese Bedingung ist hier absichtlich gemacht worden.

und folglich, wenn wir

$$y = \frac{MP}{a} + \frac{NP}{b}$$

setzen:

$$y = \frac{\sqrt{m^2 + x^2}}{a} + \frac{\sqrt{n^2 + (e-x)^2}}{b}.$$

Entwickeln wir nun den ersten Differentialquotienten dieser Grösse, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a\sqrt{m^2 + x^2}} - \frac{e-x}{b\sqrt{n^2 + (e-x)^2}},$$

woraus sich als gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums die Gleichung

$$\frac{x}{a\sqrt{m^2 + x^2}} = \frac{e-x}{b\sqrt{n^2 + (e-x)^2}}$$

ergiebt.

Weil hiernach

$$\frac{x}{e-x} = \frac{a\sqrt{m^2 + x^2}}{b\sqrt{n^2 + (e-x)^2}}$$

ist, so ist

$$\frac{x}{e-x}$$

stets eine positive Grösse, und x und $e-x$ haben daher immer gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass stets x positiv und $x < e$ ist, folglich der Punkt P immer zwischen M' und N' liegt.

Entwickeln wir den zweiten Differentialquotienten von y, so erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m^2}{a(m^2 + x^2)\sqrt{m^2 + x^2}} + \frac{n^2}{b(n^2 + (e-x)^2)\sqrt{n^2 + (e-x)^2}},$$

welches offenbar immer eine positive Grösse und daher die Bedingung des Minimums erfüllt ist.

Da offenbar

$$MP = \sqrt{m^2 + x^2},\quad NP = \sqrt{n^2 + (e-x)^2};$$
$$M'P = x,\quad N'P = e-x$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$\frac{M'P}{a.MP}=\frac{N'P}{b.NP}$$

die Bedingung des Minimums. Bezeichnen wir aber die Winkel MPM' und NPN' respective durch α und β, so ist

$$M'P=MP.\cos\alpha,\ N'P=NP.\cos\beta;$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}$$

oder

$$\cos\alpha:\cos\beta=a:b$$

die Bedingung des Minimums.

Bezeichnen a und b die Geschwindigkeiten, mit denen ein Punkt auf MP und NP sich gleichförmig bewegt, so sind $\frac{MP}{a}$ und $\frac{NP}{b}$ die Zeiten, in denen die Wege MP und NP zurückgelegt werden, und

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ist folglich die Zeit, in welcher der Weg MPN zurückgelegt wird. Daher ergiebt sich aus dem Vorhergehenden der folgende Satz:

Wenn ein Punkt in den Linien MP und NP mit den Geschwindigkeiten a und b sich gleichförmig bewegt und der Punkt P in CD eine solche Lage haben soll, dass unter dieser Voraussetzung der sich bewegende Punkt auf dem Wege MPN in der kürzesten Zeit von M nach N gelangt; so müssen die Cosinus der Winkel MPD und NPC sich wie die Geschwindigkeiten a und b in den Linien MP und NP verhalten.

Hiervon lässt sich nun die folgende Anwendung auf die Bestimmung der Brachystochrone für den Fall schwerer Punkte machen.

Die Curve AB in Taf. V. Fig. 6. (M. vergl. Taf. V. Fig. 4.) denke man sich in eine so grosse gerade Anzahl so kleiner Theile getheilt, dass man ohne merklichen Fehler jedes dieser Theilchen als eine gerade Linie und die Bewegung in einem jeden derselben als gleichförmig betrachten kann. Durch den Punkt A und alle Theilpunkte denke man sich horizontale Linien gezogen, und bezeichne die Neigungswinkel der geradlinigen Elemente

$$Ab_1,\ b_1b_2,\ b_2b_3,\ b_3b_4,\ b_4b_5,\ \ldots.$$

gegen diese horizontalen Linien respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

Denken wir uns dann ferner durch alle Theilpunkte die vertikalen Linien

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ a_5b_5,\ \ldots.$$

gezogen, so sind nach bekannten Sätzen die durch den Fall auf AB in

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \ldots.$$

erlangten Geschwindigkeiten respective:

$$2\sqrt{g.a_1b_1},\ 2\sqrt{g.a_2b_2},\ 2\sqrt{g.a_3b_3},\ 2\sqrt{g.a_4b_4},\ \ldots.;$$

wo g seine bekannte Bedeutung hat.

Nach dem oben zuerst ausgesprochenen Princip gelangt der schwere Punkt auf der Curve AB mit der in dem $n$ten und $(n+1)$sten Theilpunkte erlangten Geschwindigkeit in der kürzesten Zeit von dem $n$ten bis zum $(n+2)$ten Theilpunkte, und wir haben daher nach dem oben bewiesenen Satze in den vorher eingeführten Bezeichnungen offenbar die folgenden Proportionen:

$$\cos\alpha:\cos\alpha_1=0:2\sqrt{g.a_1b_1}=0:\sqrt{a_1b_1},$$

$$\cos\alpha_1:\cos\alpha_2=2\sqrt{g.a_1b_1}:2\sqrt{g.a_2b_2}=\sqrt{a_1b_1}:\sqrt{a_2b_2},$$

$$\cos\alpha_2:\cos\alpha_3=2\sqrt{g.a_2b_2}:2\sqrt{g.a_3b_3}=\sqrt{a_2b_2}:\sqrt{a_3b_3},$$

$$\cos\alpha_3:\cos\alpha_4=2\sqrt{g.a_3b_3}:2\sqrt{g.a_4b_4}=\sqrt{a_3b_3}:\sqrt{a_4b_4},$$

u. s. w.

Da nun die einzelnen Elemente der Curve mit den entsprechenden Berührenden derselben als zusammenfallend betrachtet werden können, so sind offenbar

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

die von den Berührenden der Curve in den Punkten

$$A,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots.$$

mit der durch A gezogenen horizontalen Linie AC, welche wir als den positiven Theil der Abscissenaxe und A also als den Anfang der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winkel; und wenn wir nun überhaupt zwei dieser Winkel durch Θ, Θ' und die Ordinaten der entsprechenden Punkte der Curve durch y, y' bezeichnen, so erhellet aus dem Obigen unmittelbar die Richtigkeit der Proportion

$$\cos\Theta:\cos\Theta'=\sqrt{y}:\sqrt{y'}$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}=\frac{\cos\Theta'}{\sqrt{y'}},$$



woraus sich ergiebt, dass

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}$$

eine constante Grösse ist, die wir durch $\sqrt{a}$ bezeichnen, und daher

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}=\sqrt{a}$$

setzen wollen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich mittelst leichter Rechnung

$$\tang\Theta=\sqrt{\frac{1-ay}{ay}},$$

und da nun nach den Principien der höheren Geometrie

$$\tang\Theta=\frac{dy}{dx}$$

ist, so erhalten wir als Differentialgleichung unserer Curve die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-ay}{ay}}$$

oder

$$dx=dy\sqrt{\frac{ay}{1-ay}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$ay=\sin\omega^2,\ 1-ay=\cos\omega^2\ ^*),$$

so ist

$$dx=\tang\omega\,.\,dy.$$

Weil aber

$$ady=2\sin\omega\cos\omega\,d\omega$$

ist, so ist

$$dx=\frac{2}{a}\sin\omega^2 d\omega,$$

*) Es ist hier absichtlich der vorhergehende Winkel Θ nicht weiter berücksichtigt und ω nur als eine Hülfsgrösse zur Erleichterung der Integration eingeführt worden.

und folglich

$$x=\frac{2}{a}\int \sin \omega^2 d\omega + \text{Const.}$$

Nun ist aber

$$\int \sin \omega^2 d\omega = \sin \omega \int \sin \omega\, d\omega - \int d \sin \omega \int \sin \omega\, d\omega$$
$$= \sin \omega \int \sin \omega\, d\omega - \int \cos \omega\, d\omega \int \sin \omega\, d\omega$$
$$= -\sin \omega \cos \omega + \int \cos \omega^2 d\omega$$
$$= -\sin \omega \cos \omega + \int (1 - \sin \omega^2)\, d\omega$$
$$= \omega - \sin \omega \cos \omega - \int \sin \omega^2 d\varphi,$$

also

$$\int \sin \omega^2 d\omega = \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2} \sin \omega \cos \omega,$$

und folglich

$$x=\frac{1}{a}(\omega - \sin \omega \cos \omega) + \text{Const.}$$

Also ist

$$ax = \omega - \sin \omega \cos \omega + \text{Const.},$$
$$ay = \sin \omega^2;$$

oder

$$2ax = 2\omega - 2 \sin \omega \cos \omega + \text{Const.},$$
$$2ay = 2 \sin \omega^2;$$

d. i.

$$2ax = 2\omega - \sin 2\omega + \text{Const.},$$
$$2ay = 1 - \cos 2\omega.$$

Für $y=0$ ist nach dem Obigen offenbar auch $x=0$. Für $y=0$ ist aber

$$1 - \cos 2\omega = 0 \text{ oder } \cos 2\omega = 1,$$

und folglich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $2\omega = 2k\pi$. Also ist nach dem Obigen

$$0 = 2k\pi - \sin 2k\pi + \text{Const.} = 2k\pi + \text{Const.},$$

d. i. $\text{Const.} = -2k\pi$, und folglich

$$2ax = 2\omega - 2k\pi - \sin 2\omega,$$
$$2ay = 1 - \cos 2\omega.$$

Nun ist aber

$$\sin(2\omega-2k\pi)=\sin 2\omega, \quad \cos(2\omega-2k\pi)=\cos 2\omega.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2ax=2\omega-2k\pi-\sin(2\omega-2k\pi),$$
$$2ay=1-\cos(2\omega-2k\pi);$$

und folglich, wenn man überhaupt

$$\varphi=2\omega-2k\pi$$

setzt:

$$2ax=\varphi-\sin\varphi, \quad 2ay=1-\cos\varphi;$$

oder für $\frac{1}{2a}=r$:

$$x=r(\varphi-\sin\varphi), \quad y=r(1-\cos\varphi).$$

Im Anfange der Bewegung müssen x und y beide zugleich verschwinden, welches offenbar nur für $\varphi=0$ möglich ist, da nur für diesen Werth von φ die Differenz $\varphi-\sin\varphi=0$, d. i. $\sin\varphi=\varphi$ sein kann. Also hat man für den Anfang der Bewegung $\varphi=0$ zu setzen. Wollte man φ negativ nehmen, so würde, weil der absolute Werth von φ immer grösser als der absolute Werth von $\sin\varphi$ ist, x negativ, da doch im Obigen x als positiv angenommen worden ist. Folglich muss man φ von 0 an zunehmen, nicht von 0 an abnehmen lassen, woraus sich wegen der Gleichungen

$$x=r(\varphi-\sin\varphi), \quad y=r(1-\cos\varphi)$$

nun unmittelbar auf ganz unzweideutige Weise ergiebt, dass die gesuchte Curve eine gemeine Cycloide ist, deren erzeugender Kreis den Halbmesser $r=\frac{1}{2a}$ hat.

Wegen der aus dem Obigen sich ganz von selbst ergebenden wichtigen und merkwürdigen mechanischen Eigenschaft der gemeinen Cycloide nennt man dieselbe bekanntlich die Brachystochrone im luftleeren Raume.

XXXV.

Sur les fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

I.

Dans beaucoup de recherches analytiques il importe de décomposer une fonction rationelle et fractionnaire en fractions partielles, et, réciproquement, de réduire une somme de fractions partielles à une fonction fractionnaire. — Pour résoudre ce double problème dans toute sa généralité, nous désignons par F_x une fonction entière de x du degré n. Soient $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x. Alors, en supposant que cette équation contienne n_1 racines égales r_1, n_2 racines égales r_2, etc., on aura

$$F_x = A(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou, en prenant le coefficient constant A égal à l'unité,

$$(1) \qquad F_x = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}.$$

Soient encore f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ des fonctions de x, liées entre elles et à la fonction F_x par l'équation

$$(2) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}.$$

Cela fait, on pourra toujours satisfaire à l'équation (2), en supposant les fonctions f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ entières par rapport à

x, et, respectivement, d'un degré inférieur à n, n_1, n_2, ... n_m. En effet, si l'on pose

$$(3) \qquad F_x = (x-r_k)^{n_k} Q_{x,k},$$

k étant un des nombres entiers 1, 2, ... m, la fonction $Q_{x,k}$ sera entière par rapport à x du degré $n-n_k$, et le facteur $x-r_k$ n'y entrera pas. D'ailleurs on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

d'ou l'on déduit

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k} \frac{F_x}{(x-r_k)^{n_k}},$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k}\ Q_{x,k},$$

ou

$$(4) \qquad f_x = P_{x,1} Q_{x,1} + P_{x,2} Q_{x,2} + \ldots + P_{x,m} Q_{x,m}.$$

Or, $Q_{x,k}$ étant du degré $n-n_k$, il suit que $P_{x,k}\ Q_{x,k}$ sera d'un degré inférieur à n, lorsqu'on suppose la fonction $P_{x,k}$ entière par rapport à x d'un degré inférieur à n_k. On voit donc que l'équation (4), ou l'équation (2), d'où elle est déduite, admet la supposition que les fonctions f_x et $P_{x,k}$ soient entières par rapport à x d'un degré inférieur à n et n_k, ensorte que l'on pourra faire

$$(5) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(6) \qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(7) \quad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que, pour le problème de la composition, il s'agit de trouver les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1}, lorsque les quantités r_1, r_2, ... r_m et les fonctions $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, ... $P_{x,m}$ sont données; et, pour la décomposition, de trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, ... $c_{n_k-1,k}$, lorsque les fonctions f_x et F_x sont données. — Commençons par la décomposition.

II.

En posant pour une fonction quelconque φ_x

$$\frac{d^n \varphi_x}{dx^n} = \partial_x^n\, \varphi_x,$$

les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, etc. de l'équation (7) I. sont exprimés, d'après le théorème de Taylor, par l'équation

$$(1) \qquad c_{h,k} = \frac{1}{h!} \partial_{r_k}^{h} P_{r_k,k},$$

dans la quelle, pour abréger, on a désigné le produit $1.2 \ldots h$ par $h!$, h étant un nombre entier et positif. Donc, pour trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, etc., il suffit de connaître la fonction $P_{r_k,k}$, valeur particulière de la fonction $P_{x,k}$. Or on déduit de l'équation (2) I. jointe à l'équation (3) I.:

$$\frac{f_x}{Q_{x,k}} = (x - r_k)^{n_k} \left\{ \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}} \right\},$$

équation qui, par la supposition $x = r_k$, se réduit à

$$(2) \qquad \frac{f r_k}{Q_{r_k,k}} = P_{r_k,k}.$$

Pour exprimer $Q_{r_k,k}$ en F_{r_k}, on differentie l'équation (3) I. n_k fois par rapport à x, ce qui donne

$$\partial_x^{n_k} F_x = \partial_x^{n_k} Q_{x,k} (x - r_k)^{n_k};$$

puis on applique au second membre de cette équation la formule connue

$$\partial_x^{n} \varphi_x \psi_x = \overset{0}{\partial_x} \varphi_x \overset{n}{\partial_x} \psi_x + \overset{1}{(n)} \partial_x \varphi_x \overset{n-1}{\partial_x} \psi_x + \overset{2}{(n)} \overset{2}{\partial_x} \varphi_x \overset{n-2}{\partial_x} \psi_x + \ldots + \overset{n}{\partial_x} \varphi_x \overset{0}{\partial_x} \psi_x$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad \overset{n}{\partial_x} \varphi_x \psi_x = \sum_{h=0}^{h=n+1} \overset{h}{(n)} \overset{h}{\partial_x} \varphi_x \overset{n-h}{\partial_x} \psi_x,$$

$\overset{h}{(n)}$ étant déterminé par l'équation

$$\overset{h}{(n)} = \frac{n(n-1) \ldots (n-h+1)}{1 . 2 \ldots h},$$

ou, lorsque n est un nombre entier et positif,

$$(4) \qquad \overset{h}{(n)} = \frac{n!}{h! \, (n-h)!}.$$

On trouvera par suite à l'aide de la formule (3)

$$\partial_x^{n_k} F_x = \sum_{h=0}^{h=n_k+1} \overset{h}{(n_k)} \overset{h}{\partial_x} Q_{x,k} \, \overset{n_k-h}{\partial_x} (x - r_k)^{n_k},$$

et, puisqu'on a

$$\partial_x^{n_k-h}(x-r_k)^{n_k}=\frac{n_k!}{h!}(x-r_k)^h,$$

la précédente se change en

$$\partial_x^{n_k}F_x=\sum_{h=0}^{h=n_k+1}(n_k)^h\frac{n_k!}{h!}(x-r_k)^h\partial_x^h Q_{x,k},$$

d'où l'on tire, en faisant $x=r_k$,

$$(5)\qquad \partial_{r_k}^{n_k}F_{r_k}=n_k!\ Q_{r_k,k}.$$

En éliminant $Q_{r_k,k}$ entre les équations (2) et (5), il viendra

$$(6)\qquad P_{r_k,k}=n_k!\ \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k}F_{r_k}},$$

et par conséquent l'équation (1) se réduit à

$$(7)\qquad c_{h,k}=\frac{n_k!}{h!}\partial_{r_k}^h\frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k}F_{r_k}}.$$

Par cette équation on trouve les coefficients $c_{0,k}$. $c_{1,k}$, etc., lors que les fonctions f_x et F_x sont données. Il résulte donc de l'analyse précédente le théorème suivant.

Théorème I. Soit F_x une fonction rationnelle et entière de x, représentée par l'équation

$$F_x=(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\dots(x-r_m)^{n_m},$$

$n_1, n_2, \dots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \dots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x=0$$

résolue par rapport à x.

Soit f_x une fonction rationnelle et entière de x d'un degré inférieur à celui de F_x.

Soit enfin, pour abréger,

$$c_{h,k}=\frac{n_k!}{h!}\partial_{r_k}^h\frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k}F_{r_k}}$$

et

$$P_{x,k}=c_{0,k}+c_{1,k}(x-r_k)+c_{2,k}(x-r_k)^2+\dots+c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}.$$

On peut donner au théorème I. un autre énoncé par la considération suivante.

Soit U_x une fonction entière de x du degré n. On aura

$$U_x = \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{(x-r)^h}{h!} \partial_r^h U_r,$$

r étant une quantité quelconque. En mettant la précédente sous la forme

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!} \frac{\partial_r^h U_r}{(x-r)^{n+1-h}},$$

et observant que, pour un nombre entier et positif p, on a

$$\frac{1}{(x-r)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \partial_r^{p-1} \frac{1}{x-r},$$

il viendra

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!(n-h)!} \partial_r^h U_r \partial_r^{n-h} \frac{1}{x-r},$$

équation qui, en vertu des formules (3) et (4), se réduit à

$$U_x = \frac{(x-r)^{n+1}}{n!} \partial_r^n \frac{U_x}{x-r}.$$

Or, cette équation subsistant pour toute fonction entière du degré n, quel que soit r, et $P_{x,k}$ étant du degré n_k-1, on aura pareillement

$$P_{x,k} = \frac{(x-r_k)^{n_k}}{(n_k-1)!} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = \frac{1}{(n_k-1)!} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

ou, en mettant au lieu de $P_{r_k,k}$ sa valeur tirée de l'équation (6)

$$\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = n_k \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{1}{x-r_k} \frac{f r_k}{\partial_{r_k}^{n_k} F r_k} \right\}.$$

Donc le théorème I. sera réduit au suivant.

Théorème II. Soient f_x et F_x les mêmes fonctions que dans le théor. I. Soit de plus, pour abréger,

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}},$$

k étant un nombre entier. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Maintenant il ne sera pas difficile d'étendre ces theorèmes au cas où la fonction f_x sera d'un degré supérieur à celui de F_x. Pour cela nous remarquons que, lorsqu'on pose

$$(9) \qquad \varphi_x = (x-r_0)^s \, F_x,$$

r_0 étant une quantité quelconque indépendante de x, et s un nombre entier et positif, on pourra prendre s assez grand pour que φ_x soit d'un degré supérieur à celui de f_x. Donc, si la fonction F_x est donnée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} \, (x-r_1)^{n_1} \, (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s) étant un nombre entier et positif, ou égal à zéro, si l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'aura pas une racine r_0, on aura, en vertu de l'équation (9),

$$\varphi_x = (x-r_0)^{n_0} \, (x-r_1)^{n_1} \, (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m}.$$

En appliquant le théorème II., on obtiendra

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_x}{x-r_k},$$

R_k étant déterminé par l'équation

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{f_x}{F_x} = (x-r_0)^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Or, r_0 étant une quantité quelconque, on peut faire

$$r_0 = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{f_x}{F_x} = x^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k},$$

ou, puisque les signes Σ et ∂ ne se rapportent pas à x et s,

$$(10) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{x^s}{x-r_k}.$$

Mais on a

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + r_k^{s-1} + x r_k^{s-2} + \ldots + x^{s-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{k=0}^{k=s} x^k r_k^{s-1-k};$$

donc l'équation (10) se réduit à

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \left\{ \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{k=0}^{k=s} x^k r_k^{s-1-k} \right\}.$$

Cette analyse conduit au théorème suivant.

Théorème III. Soit f_x une fonction rationelle et entière de x du degré p.

Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré q, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s), n_1, n_2, $\ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et r_0, r_1, $\ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, ensorte que $n_0 - s = 0$, lorsque l'équation $F_x = 0$ n'aura pas une racine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire. liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x,$$

s étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire à la condition

$$s + q > p.$$

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k = n_k \frac{r_k^s f r_k}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi r_k},$$

h et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Corollaire I. Si l'on a

$$q > p,$$

c'est-à-dire, si le degré de F_x est supérieur à celui de f_x, on satisfera à la condition

$$s + q > p,$$

en prenant $s = 0$: donc on reviendra au théor. II.

Corollaire II. Il sera souvent plus commode de séparer la partie correspondante à la quantité r_0 ou 0. Dans ce cas on trouvera

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}$$

$$+ \sum_{h=0}^{h=n_0} \frac{n_0!}{h!} x^{s+h-n_0} \partial_{r_0}^{h} \frac{f r_0}{\partial_{r_0}^{n_0} \varphi r_0}.$$

Corollaire III. En posant

$$f_x = \psi_a + \frac{x-a}{1!} \partial_a \psi_a + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!} \partial_a^p \psi_a,$$

on aura pour une fonction quelconque ψ_x

$$\psi_x = f_x + \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

Donc, comme f_x est une fonction entière par rapport à x du degré p, on aura suivant le théor. III.

$$\frac{\psi_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{F_x} \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

III.

D'après ce qui a été dit ci-dessus I., on a simultanément les équations

$$(1)\qquad \frac{f_x}{F_x}=\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

$$(2)\qquad F_x=(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou

$$(3)\qquad F_x=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

$$(4)\qquad f_x=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1},$$

$$(5)\qquad P_{x,k}=c_{0,k}+c_{1,k}(x-r_k)+c_{2,k}(x-r_k)^2+\ldots+c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

De plus, en vertu de l'équation (8) II., on a

$$(6)\qquad \frac{f_x}{F_x}=\sum_{k=0}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f_x}{F_x}=-\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}\left\{\frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\left[\frac{1}{r_k}+\frac{x}{r^2}+\frac{x^2}{r_k^3}+\ldots+\frac{x^{s-1}}{r_k^s}\right]+R\right\},$$

R étant déterminé par l'équation

$$R=\frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\,\frac{\left(\frac{x}{r_k}\right)^s}{r_k-x},$$

et s étant un nombre entier et positif, qu'on peut faire accroître jusqu'à l'infini. Or on reconnaît que le reste R s'évanouit pour des valeurs infiniment grandes de s, toutes les fois que le module de x sera inférieur au module de la plus petite des racines r_k: dans ce cas on aura donc

$$(7)\qquad \frac{f_x}{F_x}=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots,$$

en faisant, pour abreger,

$$(8)\qquad B_h=-\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}.$$

Il est évident que le second membre de l'équation (7) ne serait jamais convergent, lorsque parmi les racines r_k il y en aurait le zéro, sinon $P_{x,k}$ et ses derivées jusqu'à l'ordre n_k s'évanouissent

en même temps pour $x=0$. Mais on obvie à cet inconvénient par la séparation de la partie correspondante à cette racine, comme il a été remarqué dans le coroll. II. theor. III. En tout cas l'équation

$$f_x = F_x \{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots\}$$

subsiste, puisque les fonctions f_x et F_x sont entières par rapport à x. En mettant au lieu de F_x sa valeur de l'équation (3), il viendra

$$\begin{aligned} f_x = a_0 B_0 + a_0 B_1 x + a_0 B_2 x^2 + \ldots + a_0 B_h x^h + \ldots \\ + a_1 B_0 x + a_1 B_1 x^2 + \ldots + a_1 B_{h-1} x^h + \ldots \\ + a_2 B_0 x^2 + \ldots + a_2 B_{h-2} x^h + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_h B_0 x^h + \ldots \end{aligned}$$

Cette expression de f_x, comparée à celle de l'équation (4), conduit à

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= a_0 B_0, \\ b_1 &= a_0 B_1 + a_1 B_0, \\ b_2 &= a_0 B_2 + a_1 B_1 + a_2 B_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_h &= a_0 B_h + a_1 B_{h-1} + a_2 B_{h-2} + \ldots + a_h B_0, \end{aligned} \right.$$

ou, s étant un nombre entier,

$$(10) \qquad b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s B_{h-s}.$$

On obtiendra une autre expression pour b_h de la manière suivante. D'abord on présente l'équation (3) sous la forme

$$(11) \qquad F_x = \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s x^s.$$

Ensuite on déduit de l'équation (2) non seulement

$$F_{r_k} = 0,$$

mais encore

$$\partial^p_{r_k} F_{r_k} = 0,$$

p étant un nombre entier et positif assujetti à la condition

$$p < n_k;$$

d'où il suit, eu égard à la formule (3) II.,

$$\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,F_{r_k}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}=0.$$

En substituant à F_{r_k} sa valeur tirée de l'équation (11), on trouvera

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\left\{a_s\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}\right\}=0,$$

et, suivant l'équation (8),

$$\text{(12)}\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s}=0.$$

Enfin on conclut de la précédente

$$\sum_{s=0}^{s=h+1}a_s\,B_{h-s}=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s},$$

ce qui change l'équation (10) en

$$\text{(13)}\qquad b_h=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s},$$

d'où l'on tire successivement

$$\text{(14)}\left\{\begin{array}{l}
-\,b_{n-1}=a_n\,B_{-1}\,,\\
-\,b_{n-2}=a_{n-1}\,B_{-1}+a_n\,B_{-2}\,,\\
-\,b_{n-3}=a_{n-2}\,B_{-1}+a_{n-1}\,B_{-2}+a_n\,B_{-3}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-\,b_{n-h}=a_{n-h+1}B_{-1}+a_{n-h+2}\,B_{-2}+a_{n-h+3}B_{-3}+\ldots+a_nB_{-h}.
\end{array}\right.$$

Les formules (9) ou (14) peuvent servir à l'évaluation des coefficients b_0, b_1, ... b_{n-1}, lorsque les coefficients a_0, a_1, ... a_n et les sommes B_0, B_1, B_2, ... B_{-1}, B_{-2}, B_{-3}, ... déterminées par l'équation (8), sont connus. Réciproquement on en déduit la valeur des sommes, et par suite les coefficients du développement

(7), lorsque les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1}, c'est-à-dire les fonctions F_x et f_x, sont données. Il y a plus: les formules (9) ou (14) conduisent même à la détermination des coefficients a_0, a_1, ... a_n. En effet l'équation (8) jointe à l'équation (6) II. donne

$$(15) \qquad B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} f_{r_k}.$$

Supposons maintenant qu'entre les fonctions f_x et F_x il y ait la relation

$$(16) \qquad f_x = \partial_x F_x,$$

et que, pour cette valeur particulière de f_x, B_{h-1} se change en A_h. On aura

$$(17) \qquad A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k} F_{r_k} \right\}.$$

Or, la fonction F_x étant toujours représentée par l'équation (2) ou (3), il suit

$$\partial_{r_k}^p F_{r_k} = 0,$$

le nombre entier et positif p vérifiant la condition

$$p < n_k.$$

Donc, ayant égard à la formule (3) II., on déduit de l'équation (17)

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k}^{n_k-1} \partial_{r_k} F_{r_k},$$

ou

$$(18) \qquad A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, r_k^{-h}.$$

Ajoutons que pour ce cas-ci les formules (10) et (13) se réduisent à

$$b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s A_{h+1-s}, \quad b_h = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{h+1-s},$$

d'où

$$(19) \qquad b_{h-1} = \sum_{s=0}^{s=h} a_s A_{h-s}, \quad b_{h-1} = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s},$$

et que de plus l'équation (16) jointe aux équations (3) et (4) établit entre les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1} les relations

$$b_0 = a_1, \quad b_1 = 2a_2, \quad b_2 = 3a_3, \ldots$$

en général

$$b_{h-1} = ha_h,$$

par la quelle les équations (19) deviendront

$$(20) \qquad ha_h = \sum_{s=0}^{s=h} a_s A_{h-s},$$

$$(21) \qquad ha_h = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s}.$$

D'ailleurs on a

$$\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s} = a_h A_0 + \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{h-s},$$

et de plus, en vertu des équations (20), (2) et (3),

$$-A_0 = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n,$$

donc la formule (21) sera remplacée par

$$(22) \qquad (n-h)\, a_h = \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{s-h}.$$

On tire successivement de la formule (20)

$$(23) \quad \begin{cases} a_1 = a_0 A_1, \\ 2\, a_2 = a_0 A_2 + a_1 A_1, \\ 3\, a_3 = a_0 A_3 + a_1 A_2 + a_2 A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\, a_h = a_0 A_h + a_1 A_{h-1} + a_2 A_{h-2} + \ldots + a_{h-1} A_1; \end{cases}$$

et de la formule (22)

$$(24) \quad \begin{cases} a_{n-1} = a_n A_{-1}, \\ 2\, a_{n-2} = a_{n-1} A_{-1} + a_n A_{-2}, \\ 3\, a_{n-3} = a_{n-2} A_{-1} + a_{n-1} A_{-2} + a_n A_{-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\, a_{n-h} = a_{n-h+1} A_{-1} + a_{n-h+2} A_{-2} + a_{n-h+3} A_{-3} + \ldots + a_n A_{-h}. \end{cases}$$

En prenant la différence des formules (20) et (21), on obtiendra encore

$$(25) \qquad \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s A_{h-s} = 0,$$

formule analogue à la formule (12).

Dans le formules (24), qui constituent le théorème de Girard *), le coefficient a_n reste indéterminé, de même que a_0 dans les formules (23). Mais si l'on fait $x = 0$ dans les expressions F_x et $x^n F_{\frac{1}{x}}$, la comparaison des équations (2) et (3) donne

$$a_0 = (-1)^n r_1^{n_1} r_2^{n_2} \ldots r_m^{n_m}, \quad a_n = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème IV. Soit

$$V_x = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, dont la somme soit égale à n, et $P_{x,k}$ désignant, pour tout nombre entier et positif k, une fonction rationelle et entière de x d'un degré inferieur à n_k.

Soit, pour abréger,

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

et

$$f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ étant determinés par le système des formules (18), (26) et (23) ou (24), et les coefficients $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ par le système des formules (8) et (9) ou (14). On aura

$$V_x = \frac{f_x}{F_x}.$$

L'analyse précédente conduit encore à plusieurs conséquences, mais nous nous bornerons à signaler la suivante.

Concevons non seulement que la fonction f_x soit donnée, mais faisons actuellement

$$f_x = 1.$$

Alors on aura

$$b_0 = 1,$$
$$0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1},$$

*) Ce théorème, faussement attribué à Newton, appartient à Albert Girard, qui, 13 ans avant la naissance de Newton, en a donné l'énoncé dans un ouvrage dont voici le titre: Invention nouvelle en Algèbre, par Albert Girard, Mathématicien, à Amsterdam, chez G. Jansen Blaauw, 1629. — C'est M. J. de Gelder, prof. à Leyde, qui a fait cette remarque dans ses Wiskundige lessen, 2de Cursus, 2de uitgave, pag. 423.

et par suite les formules (14) donneront

$$0 = B_{-1} = B_{-2} = \ldots = B_{-(n-1)}.$$

Hâtons nous d'ajouter que pour ce cas l'équation (15) se réduit à

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}};$$

donc on aura le théorème suivant.

Théorème V. Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré n, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x.

Soit h un nombre entier et positif, vérifiant la condition

$$h < n-1.$$

On aura

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} = 0.$$

XXXVI.

Ein Theorem über Fakultäten.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In dem 1sten Hefte des VIIten Theiles dieser Zeitschrift S. 204 habe ich einige Sätze angegeben, welche zur Auffindung der höheren Differentialquotienten sehr allgemeiner Funktionen dienen; so ist z. B.

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\begin{array}{l} A_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + A_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + A_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots \\ \qquad \ldots + A_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) \end{array}\right\} \quad (1)$$

wobei die Coefficienten durch die Formel

$$A_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{p_0 (p\lambda)_n - p_1 (\overline{p-1}\lambda)_n + p_2 (\overline{p-2}\lambda)_n - \ldots\right\} \quad (2)$$

bestimmt sind. Hiervon lässt sich eine sehr einfache Anwendung auf die Theorie der Fakultäten machen.

Sei nämlich $f(y) = y^{-\mu}$, so wird

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p-1)\, y^{-\mu-p},$$

oder nach Vandermonde's Bezeichnung der Fakultäten

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \overset{p}{[\mu]}\, y^{-\mu-p}, \text{ folgl. } f^{(p)}(x^\lambda) = (-1)^p \overset{p}{[\mu]} (x^{-\lambda(\mu+p)}). \quad (3)$$

Ferner ist

$$f(x^\lambda) = x^{-\lambda\mu} \text{ und } \frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = (-1)^n \overset{n}{[\lambda\mu]}\, x^{-\lambda\mu-n}.$$

Substituiren wir diess für die linke Seite von (1) und auf der rechten Seite die aus (3) für $p=1, 2, \ldots n$ sich ergebenden derivirten Funktionen, so wird, nach Hebung von $x^{-\lambda\mu-n}$,

$$(-1)^n \overset{n}{[\lambda\mu]} = -A_1 \overset{1}{[\mu]} + A_2 \overset{2}{[\mu]} - A_3 \overset{3}{[\mu]} + \ldots + (-1)^n A_n \overset{n}{[\mu]},$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$\overset{n}{[\lambda\mu]} = A_n \overset{n}{[\mu]} - A_{n-1} \overset{n-1}{[\mu]} + A_{n-2} \overset{n-2}{[\mu]} - \ldots \pm A_1 \overset{1}{[\mu]}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung lehrt die Fakultät der Wurzel $\lambda\mu$ durch die Fakultäten der Wurzel μ ausdrücken und dürfte in dieser Allgemeinheit einen nicht unwichtigen Beitrag zur Fakultätentheorie bilden.

In manchen speziellen Fällen kann man die endliche Reihe in (2), welche zur Bestimmung der Coeffizienten A dient, summiren; so findet man z. B.

1) für $\lambda = -1$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} \cdot (-1)^n (n-1)_q = (-1)^n (n-1)(n-2)\ldots(n-q) \cdot n_q,$$

folglich nach Nro. (4):

$$(-1)^n \overset{n}{[-\mu]} = \overset{n}{[\mu]} - (n-1) \cdot n_1 \overset{n-1}{[\mu]} + (n-1)(n-2) \cdot n_2 \overset{n-2}{[\mu]} - \ldots \qquad (5)$$

2) für $\lambda = 2$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} (n-q)_q 2^{n-2q} = (q+1)(q+2)\ldots(2q) \cdot n_{2q} 2^{n-2q},$$

und daher nach Nro. (4)

$$\frac{1}{2^n} \overset{n}{[2\mu]} = \overset{n}{[\mu]} + \frac{2 \cdot n_2}{2^2} \overset{n-1}{[\mu]} + \frac{3.4 \cdot n_4}{2^4} \overset{n-2}{[\mu]} + \ldots \qquad (6)$$

3) für $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$A_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)},$$

und mithin

$$2^n \overset{n}{[\tfrac{1}{2}\mu]} = \overset{n}{[\mu]} + \frac{n(n-1)}{2} \overset{n-1}{[\mu]} + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{2.4} \overset{n-2}{[\mu]} + \ldots \qquad (7)$$

Man kann diese Sätze auch in etwas anderer Form darstellen, wenn man mit Crelle folgendermassen bezeichnet:

$$\mu(\mu \pm \delta)(\mu \pm 2\delta)\ldots(\mu \pm \overline{n-1}\,\delta) = (\mu, \pm\delta)^n.$$

Es ergiebt sich dann leicht aus (5), (6) und (7):

$$\left.\begin{aligned}(\mu, -1)^n = (\mu, +1)^n - (n-1).n_1(\mu, +1)^{n-1} \\ + (n-1)(n-2).n_2(\mu, +1)^{n-2} \dots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$(\mu, +\tfrac{1}{2})^n = (\mu, +1)^n - \frac{2.n_2}{2^2}(\mu, +1)^{n-1} + \frac{3.4.n_4}{2^4}(\mu, +1)^{n-2} - \dots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}(\mu, +2)^n = (\mu, +1)^n + \frac{n(n-1)}{2}(\mu, +1)^{n-1} \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}(\mu, +1)^{n-2} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Der letzte Satz hängt sehr genau mit dem Theoreme über die Gamma-Funktionen zusammen, welches ich im 6ten Theile des Archivs. S. 218. Formel (10) bewiesen habe.

XXXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Divisionsexempel.

Divisor: $1 \pm ax$,

Dividendus: $1 \mp x + (1-2a)x^2 \pm a(1-a+a^2)x^3$,

Quotient: $1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$.

Man soll untersuchen, ob die quadratische Gleichung

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2 = 0$$

reelle oder imaginäre Wurzeln hat, und zugleich die Grösse

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$$

in zwei reelle oder imaginäre Factoren des ersten Grades zerlegen.

Divisionsexempel.

Divisor: $1-(a+x)$,
Dividendus: $(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2-x^3$,
Quotient: $\{1+(a+x)\}^2$.

Man hat nämlich immer die Gleichung

$$(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2+x^3$$
$$=\{1+(a+x)\}\{1-(a+x)^2\}=\{1-(a+x)\}\{1+(a+x)\}^2.$$

XXXVIII.

Miscellen.

Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem Herrn Doctor Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Die älteren Methoden der Auflösung biquadratischer Gleichungen von Descartes und Euler, so wie die neueste von Ampère (Archiv. Thl. I. S. 16.), stehen ziemlich unverbunden neben einander. Wie aber leicht zu sehen, ist Ampère's Auflösung nur eine Modification der Auflösung von Descartes, und die Vermeidung der Methode der unbestimmten Coefficienten ist nur scheinbar, da dieselbe der gewöhnlichen elementaren Herleitung des Zusammenhanges der Coefficienten der Gleichung und der Combinationen ihrer Wurzeln zum Grunde liegt.

Dagegen ist Euler's Auflösung die reine Umkehrung der Cartesischen; denn Euler geht von dem Punkte aus, zu welchem man durch eine vollständige Durchführung des Verfahrens von Descartes gelangt.

Um nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$1)\qquad x^4+px^2+qx+r=0$$

zu finden, setzt man nach Descartes

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2-2ax+b)(x^2+2ax+c),$$

sucht a, b, c durch p, q, r auszudrücken, und löst dann die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} x^2 - 2ax + b = 0, \\ x^2 + 2ax + c = 0. \end{cases}$$

Die Coefficienten a, b, c erhält man durch Auflösung der Gleichungen

$$b + c - 4a^2 = p,\ 2a(b-c) = q,\ bc = r,$$

aus denen sich die folgenden ergeben:

$$3)\quad b = \tfrac{1}{2}\left(p + 4a^2 + \frac{q}{2a}\right),\quad 4)\quad c = \tfrac{1}{2}\left(p + 4a^2 - \frac{q}{2a}\right),$$

$$5)\quad a^6 + \frac{p}{2}a^4 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)a^2 - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Bezeichnet man a^2 mit y, so hat man die kubische Hülfsgleichung

$$6)\quad y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)y - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Nach Auflösung derselben ist a bekannt, wie auch b und c, und man erhält durch Auflösung der quadratischen Gleichungen (2)

$$7)\quad x = a \pm \sqrt{a^2 - b},\quad x = -a \pm \sqrt{a^2 - c},$$

oder mit Benutzung von (3) und (4)

$$8)\quad \begin{cases} x = a \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}p - a^2 - \dfrac{q}{4a}}, \\ x = -a \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}p - a^2 + \dfrac{q}{4a}}; \end{cases}$$

wobei es offenbar gleichgültig ist, ob man $a = +\sqrt{y_1}$ oder $a = -\sqrt{y_1}$ setzt, wenn y_1 eine beliebige von den drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung bezeichnet. Die Formen der Wurzeln (8) nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man statt der Coefficienten p und q der ursprünglichen Gleichung die sämmtlichen drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung aufnimmt. Es seien diese nämlich y_1, y_2, y_3; dann ist

$$9)\quad -\frac{p}{2} = y_1 + y_2 + y_3;\ \frac{q^2}{64} = y_1 y_2 y_3.$$

Wenn also q eine positive Zahl ist, dann ist

$$10)\quad \frac{q}{8} = \sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3};$$

und wenn q eine negative Zahl ist, so hat man

$$11)\quad \frac{q}{8} = -\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3},$$

wo jede Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Für a^2 setzen wir y_1, also $\sqrt{y_1}$ für a. Dann sind, wenn q positiv, unsere Wurzeln (8):

$$12)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2+y_3-2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}, \\ x = -\sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2+y_3+2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}; \end{cases}$$

das ist

$$13)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}, \\ x = \sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}. \end{cases}$$

Im zweiten Falle dagegen, wenn in der ursprünglichen Gleichung q eine negative Zahl bedeutet, sind unsere Wurzeln (8):

$$14)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2+y_3+2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}, \\ x = -\sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2+y_3-2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}; \end{cases}$$

das ist

$$13)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}, \\ x = \sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}. \end{cases}$$

Wir haben also in (13) und (15) Euler's Formeln als Endresultat gewonnen, sind mithin in den vollständigen Besitz aller Vortheile gelangt, welche Euler's Methode darbietet, ohne nöthig zu haben, von der etwas künstlichen Voraussetzung auszugehen, dass unsere biquadratische Gleichung Wurzeln von der Form

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}$$

habe, ohne ferner die künstliche Herleitung der kubischen Hülfsgleichung nach Euler für die ohne Vergleich einfachere und natürlichere nach Descartes aufnehmen zu müssen.

Die Aufnahme aller drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung in die Formeln (8) ist nichts als eine durch die Nothwendigkeit gebotene ganz natürliche Beseitigung des Bedenkens, ob denn auch für die Wurzeln dieselben Werthe kommen möchten, wenn man eine beliebige Wurzel der Hülfsgleichung substituirt. Dies Bedenken beschwichtigt man gewöhnlich dadurch, dass man auf die eine, stets vorhandene, positive Wurzel der kubischen Hülfsgleichung den Accent legt.

XXXIX.

Entwickelung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen der zweiten Ordnung.

Von dem
Herrn Doctor J. R. Boyman,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Malmedy.

Bezeichne $z=f(x, y)$ die allgemeine Gleichung der Rotationskörper, bezogen auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axe der Z zugleich Rotationsaxe; seien $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung, und sei γ der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltene Winkel, den die Loxodrome mit dem Meridian oder der Directrix bildet: so ist die allgemeine Differentialgleichung der Wendeflächen der Rotationskörper, wie sie in der Abhandlung des Verfassers „**De lineis loxodromicis etc. Berolini. 1839.**" entwickelt ist, folgende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left[y+y\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+x\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\right]}{y\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left[x+x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\right]}\ldots(1)$$

welche in Verbindung mit der Gleichung des gegebenen Rotationskörpers die entsprechende loxodromische Linie bestimmt.

Aus dieser Gleichung wollen wir im Folgenden die Gleichungen der Loxodromen auf den Rotationskörpern des zweiten Grades ableiten.

I. Cylindrische und Konische Loxodrome.

Der Rotationscylinder und der Rotationskegel sind dargestellt bezüglich durch folgende Gleichungen:

$$x^2+y^2=a^2\ldots(2);\ x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots(3);$$

in welchen a für beide Körper den Radius der Grundfläche, und c für den Kegel die Coordinate des Scheitels bezeichnet. Die Gleichung des Kegels geht aber in die des Cylinders über, wenn man in derselben $c=\infty$ setzt. Daher wird es nicht nöthig sein, die Loxodromen beider Körper unmittelbar zu suchen, sondern es genügt, bloss die konische Loxodrome unmittelbar zu entwickeln, um sodann aus dieser die cylindrische Loxodrome abzuleiten. Indem wir so verfahren, schlagen wir nur den sachgemässen Weg ein.

Nehmen wir daher obige Gleichung des Kegels:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots\ldots(3)$$

und differentiiren dieselbe, so erhalten wir:

$$xdx+ydy=-\frac{a^2}{c^2}(c-z)\,dz\ldots\ldots(4)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2(c-z)},\ \text{und}\ \frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{a^2(c-z)}.$$

Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung (1), so verwandelt sich dieselbe nach einigen Reductionen in folgende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}x}$$

welche Gleichung wir unter nachstehende Form bringen:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}(xdx+ydy).$$

Aus dieser erhält man nun, wenn man rechts den Werth in z aus Gleichung (4) substituirt und zum Zwecke der Integration durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2$ auf den verschiedenen Seiten dividirt, folgende Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{c-z}.$$

Hieraus ergeben sich ferner in x und z, so wie in y und z die beiden Gleichungen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{c-z},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{c-z}.$$

Nach Ausführung der angedeuteten Integration, wobei Const. $=$ $\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log c$ gefunden wird, erhält man:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z}\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

die Gleichung der Wendelfläche des Kegels, welche mit (3) verbunden die konische Loxodrome bestimmt; und

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v}&=\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z},\\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v}&=\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Kegelloxodrome bestimmt ist.

In anderer Form stellen diese Gleichungen sich also dar:

$$x=y\operatorname{tang}[\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z}],$$

$$x=v\sin[\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z}],$$

$$y=v\cos[\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\log\frac{c}{c-z}].$$

Setzen wir jetzt, um zu den Gleichungen der cylindrischen Loxodrome zu gelangen, in obigen Integralgleichungen $c=\infty$, so erhalten wir:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{dz}{a},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{dz}{a},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{dz}{a};$$

und daher nach Ausführung der Integration:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\operatorname{tang}\gamma.\frac{z}{a}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Cylinders, wodurch in Verbindung mit (2) die cylindrische Loxodrome bestimmt ist; und

$$\left.\begin{array}{l}\text{Arc sin}\,\frac{x}{v}=\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}\,,\\[1em]\text{Arc cos}\,\frac{y}{v}=\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche gemeinschaftlich ebenfalls die Cylinderloxodrome bestimmen.

Diese Gleichungen in anderer Form lauten:

$$x=y\,\text{tang}\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}),$$

$$x=v\,\sin\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}),$$

$$y=v\,\cos\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}).$$

II. Sphärische und Sphäroidische Loxodrome.

Bekanntlich sind die Gleichungen der Kugel und des Sphäroids beziehungsweise folgende:

$$x^2+y^2=a^2-z^2\ldots(9);\qquad x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)\ldots\ldots(10)$$

von welchen die zweite in die erstere übergeht, wenn man in derselben $b=a$ setzt. Wir können also auch hier dasselbe Verfahren, wie vorhin, anwenden, der Art nämlich, dass wir zunächst die Gleichung der Sphäroidischen Loxodrome unmittelbar entwickeln, und aus dieser sodann die Gleichung der Sphärischen Loxodrome einfach dadurch ableiten, dass wir bloss a statt b setzen.

Aus der gegebenen Gleichung des Sphäroids

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)\ldots\ldots\ldots(10)$$

erhält man nun durch Differentiation:

$$xdx+y\,dy=-\frac{a^2}{b^2}zdz\ldots\ldots\ldots(11)$$

und hieraus ergibt sich:

$$(\gamma)\ldots\ldots\frac{dz}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\text{ und }\frac{dz}{dy}=-\frac{b^2y}{a^2z}.$$

Werden diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung (1) substituirt, so erhält man für dieselbe nach einigen Vereinfachungen die nachstehende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma\,.\,\left(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2}\right)^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma\,.\,\left(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2}\right)^{\frac{1}{2}}x},$$

welche wir folgendermassen umformen:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma\,.\,\left(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2}\right)^{\frac{1}{2}}(xdx+ydy).$$

Setzen wir nun rechts aus Gleichung (11) den Werth in z, und dividiren Behufs der Integration auf beiden Seiten einzeln durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)$, so erhalten wir die Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)},$$

und hieraus in x und z, so wie in y und z die Gleichungen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)}.$$

Die Ausführung der angedeuteten Integration gibt, da Const. $=0$ ist:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{l}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\;..(12)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Sphäroids, welche mit (10) verbunden die Sphäroidische Loxodrome bestimmt; und

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{l}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\},\\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{l}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\;(13)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche die Sphäroidische Loxodrome ebenfalls vollkommen bestimmt ist.

Vorstehende Gleichungen stellen in anderer Form, wenn man zugleich den Ausdruck innerhalb der Klammer mit S bezeichnet, sich also dar:

$$x = y \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . S),$$
$$x = v \sin(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . S),$$
$$y = v \cos(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . S).$$

Die Gleichungen der Sphärischen Loxodrome ergeben sich nun ganz einfach aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man in denselben $b=a$ setzt. Alsdann findet man aus (12):

$$\text{Arc tang}\,\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z} \quad \text{. . . . . (14)}$$

für die Gleichung der Wendelfläche der Kugel, welche in Verbindung mit (9) die Sphärische Loxodrome bestimmt; und aus (13):

$$\left.\begin{aligned}\text{Arc sin}\,\frac{x}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z},\\ \text{Arc cos}\,\frac{y}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z}\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . . (15)}$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche ebenfalls zur vollständigen Bestimmung der Sphärischen Loxodrome dienen.

Diese Gleichungen in anderer Form sind:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$x = v \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$y = v \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma . \log\frac{a+z}{a-z}\right).$$

III. Hyperboloidische Loxodrome erster Art.

Die Gleichung des einmanteligen Rotationshyperboloids (à une nappe) ist bekanntlich:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + z^2) \quad \text{. . . . . (16)}$$

Dieselbe geht nun aber aus der des Rotationsellipsoids hervor, wenn man in dieser $b = b\sqrt{-1}$ setzt. Daher geben auch die vorhin entwickelten Resultate auf der Stelle die gesuchten Gleichungen

der Hyperboloidischen Loxodrome erster Art, wenn man in denselben $b\sqrt{-1}$ für b nimmt. Auf diese einfache Weise erhält man nun, da auch hier Const. $=0$ ist:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\}\ldots(17)$$

die Gleichung der Wendelfläche des einmanteligen Rotations-Hyperboloids, wodurch in Verbindung mit (16) die Hyperboloidische Loxodrome erster Art bestimmt ist; und:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{v}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\},\\ \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{y}{v}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\ldots(18)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche gemeinschaftlich die Hyperboloidische Loxodrome erster Art ebenfalls vollkommen bestimmen.

In anderer Form sind diese Gleichungen, wenn man noch zur Abkürzung den Ausdruck in der Klammer mit H_1 bezeichnet, folgende:

$$x=y\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,H_1\right),$$

$$x=v\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,H_1\right),$$

$$y=v\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,H_1\right).$$

In dem Falle, dass das einmantelige Rotationshyperboloid aus der gleichseitigen Hyperbel entstanden, ist $b=a$, und die vorstehenden Gleichungen gehen alsdann in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Arc\,tang}\dfrac{x}{y}=\\ =\dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\left[\log\dfrac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}\,.\log\dfrac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z}\right]\end{array}\right\}\ldots(19)$$

die Gleichung der Wendelfläche des gleichseitigen einmanteligen Rotationshyperboloids; und:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Arc sin}\frac{x}{v}\\
&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}\,.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z}\right],\\
&\text{Arc cos}\frac{y}{v}\\
&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}\,.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloidischen Loxodrome erster Art auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ.

Für diese Gleichungen hat man in anderer Form, wenn man zugleich den Ausdruck der Klammer mit G_1 bezeichnet, die folgenden:

$$x=y\,\text{tang}\left(\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\,.\,G_1\right),$$

$$x=v\sin\left(\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\,.\,G_1\right),$$

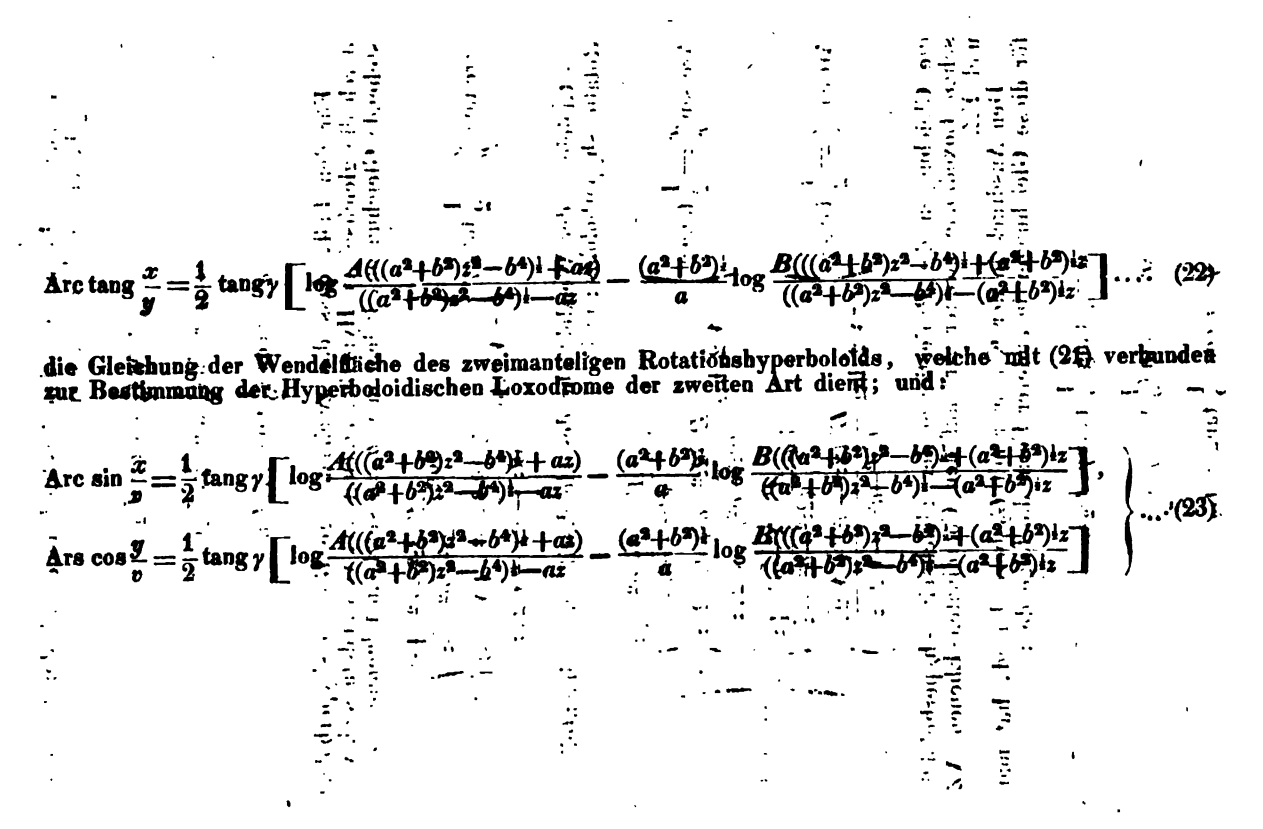
$$y=v\cos\left(\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\,.\,G_1\right).$$

IV. Hyperboloidische Loxodrome zweiter Art.

Die bekannte Gleichung des zweimanteligen Rotationshyperboloids (à deux nappes), nämlich:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(z^2-b^2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

geht ebenfalls aus der des Rotationsellipsoids hervor, wenn in dieser $a=a\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Wir gelangen also ebenso leicht zu den Gleichungen der Hyperboloidischen Loxodrome zweiter Art, indem wir in den für die Sphäroidische Loxodrome gewonnenen Ausdrücken $a\sqrt{-1}$ statt a nehmen. Alsdann erhält man, indem man die nach dem Anfangspunkt der Curve zu bestimmende Const. $=\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\left(\log B-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log B\right)$ setzt, folgende Gleichungen:



$$\text{Arc tang}\,\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right]\ldots\ (22)$$

die Gleichung der Wendelfläche des zweimanteligen Rotationshyperboloids, welche mit (21) verbunden zur Bestimmung der Hyperboloidischen Loxodrome der zweiten Art dient; und:

$$\left.\begin{aligned}\text{Arc sin}\,\frac{x}{v}&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right],\\ \text{Ars cos}\,\frac{y}{v}&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right]\end{aligned}\right\}\ldots\ (23)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen *XZ* und *YZ*, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Hyperboloidische Loxodrome der zweiten Art bestimmt wird.

In anderer Form, und den Ausdruck innerhalb der Klammer mit H_2 bezeichnend, erhält man:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . H_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . H_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . H_2\right).$$

Für den Fall, dass das zweimantelige Rotationshyperboloid durch die gleichseitige Hyperbel erzeugt ist, verwandeln sich vorstehende Gleichungen, indem man $b = a$ setzt, in folgende:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \log \frac{A'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - z} - \sqrt{2} . \log \frac{B'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} . z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} . z} \right\} \dots . (24)$$

die Gleichung der Wendelfläche des gleichseitigen zweimanteligen Rotationshyperboloids; und:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \log \frac{A'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - z} - \sqrt{2} . \log \frac{B'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} . z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} . z} \right\}, \\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \log \frac{A'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - z} - \sqrt{2} . \log \frac{B'((2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} . z)}{(2z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} . z} \right\} \end{aligned}\right\} \dots . (25)$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloidischen Loxodrome zweiter Art auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ.

Den Ausdruck in der Klammer mit G_2 bezeichnend, hat man für diese Gleichungen in anderer Form die folgenden:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . G_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . G_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma . G_2\right).$$

V. Paraboloidische Loxodrome.

Als Gleichung des Rotationsparaboloids hat man bekanntlich:

$$x^2+y^2=pz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus:

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}pdz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Daher erhält man:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{p}, \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{2y}{p}.$$

Substituirt man diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung (1), so findet man nach einigen Reductionen:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}x}.$$

Bringt man diese Gleichung in nachstehende Form:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}(xdx+ydy),$$

substituirt alsdann auf der rechten Seite aus (27) den Werth in z, und dividirt zum Zwecke der Integration auf beiden Seiten bezüglich durch $x^2+y^2=pz$, so erhält man die Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

und für die Gleichungen in x und z, so wie in y und z:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}.$$

Nun gibt die Integration, wenn man die nach dem Anfange der Curve zu bestimmende Constans $=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.(\log A-\frac{B}{p})$ setzt:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right] \quad \ldots \quad (28)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Rotationsparaboloids, welche mit (26) verbunden die Paraboloidische Loxodrome bestimmt, und:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Arc}\sin\frac{x}{p}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right],\\
&\operatorname{Arc}\cos\frac{y}{v}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right]
\end{aligned}\right\}\ldots (29)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche die Paraboloidische Loxodrome ebenfalls vollständig bestimmt ist.

Diese Gleichungen sind in anderer Form, indem man zugleich den Ausdruck der Klammer mit P bezeichnet, folgende:

$$x=y\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.P),$$

$$x=v\sin(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.P),$$

$$y=v\cos(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.P).$$

LX.

Ueber Legendre's Theorem von den Euler'schen Integralen zweiter Art.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der sinnreiche Gedanke, den Satz Legendre's über die Gammafunctionen mittelst eines bestimmten Integrales für $\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}$ abzu-

leiten, was offenbar der direkteste Weg ist, rührt bekanntlich von **Lejeune Dirichlet** her. Er benutzt hierzu die Gleichung *):

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^\infty\frac{dx}{x(1+x)^\mu}\qquad(1)$$

ganz unmittelbar, was aber etwas unbequem ist. Vielleicht dürfte folgender Weg einfacher und leichter sein.

Nach Nro. (1) ist identisch

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^\infty\frac{dx}{x(1+x)}+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^\mu}\right\}\frac{dx}{x},$$

indem sich das zweite Integral gegen das erste aus der Parenthese entspringende hebt. Hierbei sind nun die beiden ersten Integrale von μ unabhängig und bilden eine rein numerische Constante. Den Werth derselben kann man entdecken, wenn man die Integrale als die Gränzen betrachtet, denen sich die Ausdrücke

$$\int_0^n\frac{dx}{x}e^{-x}\text{ und }\int_0^n\frac{dx}{x(1+x)}$$

für unendliche wachsende n nähern. Es ist nämlich:

$$\int_0^n\frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^n\frac{dx}{x(1+x)}$$

$$=\int_0^n\frac{dx}{x}\left\{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right\}-\int_0^n\frac{dx}{x}+\int_0^n\frac{dx}{1+x}.$$

Hier hebt sich beiderseits das Integral $\int_0^n\frac{dx}{x}$, und es bleibt nach geschehener Integration:

$$\int_0^n\frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^n\frac{dx}{x(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3}+\ldots+l(n+1),$$

wofür man auch durch Zusetzung der Grösse $ln-ln$ schreiben kann:

$$\int_0^n\frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^n\frac{dx}{x(1+x)}$$

$$=ln-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3}+\ldots+l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Bekanntlich hat man aber folgende unter allen Umständen convergirende Reihe für den Integrallogarithmus:

*) M. s. den zweiten Band des Archivs Nro. XXV. §. 19. Formel (7).

$$li\,u = C + \frac{1}{2} l[(lu)^2] + \frac{1}{1} \cdot \frac{lu}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lu)^2}{1.2} + \ldots$$

worin $C = 0,5772156$ ist. Setzt man hierin $u = e^{-n}$, so ergibt sich

$$ln - \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{n^3}{1.2.3} + \ldots = -C + li(e^{-n}),$$

und folglich, wenn man dieses Resultat in die vorige Betrachtung einführt,

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(e^{-n}) + l(1 + \frac{1}{n}).$$

Gehen wir in dieser für jedes n geltenden Gleichung zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(0).$$

Da aber nach der Definition des Integrallogarithmus

$$li\,u = \int_0^u \frac{dx}{lx}$$

ist, so folgt für $u = 0$, $li(0) = 0$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C = -(0,5772156).$$

Durch Benutzung dieses Resultats geht die Gleichung (2) in die folgende über:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^\mu}\right\} \frac{dx}{x}.$$

Dieselbe gestaltet sich noch etwas eleganter, wenn man $\frac{1}{1+x} = z$ setzt, woraus $x = \frac{1-z}{z}$ und $dx = -\frac{dz}{z^2}$ folgt; ist ferner $x = \infty$ und $x = 0$ geworden, so hat z die Werthe $z = 0$ und $z = 1$ angenommen, und daher ist auch

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C - \int_1^0 \left\{z - z^\mu\right\} \frac{dz}{z^2 \cdot \frac{1-z}{z}},$$

oder wenn man die Gränzen vertauscht und wieder x für z schreibt:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^1 \frac{1 - x^{\mu-1}}{1-x} dx. \tag{3}$$

Diese Gleichung, welche man auch auf andere Weise abgeleitet hat, ist es, die man zu einem sehr einfachen Beweise des Legendre'schen Theoremes benutzen kann.

Setzt man in derselben $\mu+\frac{h}{n}$ für μ, wobei h und n ganze positive Zahlen bedeuten mögen, so wird

$$\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu}=-C+\int_0^1\frac{1-x^{\mu+\frac{h}{n}-1}}{1-x}dx,$$

oder für $x=z^n$:

$$\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu}=-C+n\int_0^1\frac{z^{n-1}-z^{n\mu+h-1}}{1-z^n}dz.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung für h der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ geschrieben und alle so entstehenden Gleichungen addirt, so erscheint die Gleichung:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}+\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{1}{n})}{d\mu}+\ldots+\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{d\mu}$$

$$=-nC+n\int_0^1\frac{nz^{n-1}-z^{n\mu-1}(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})}{1-z^n}dz,$$

oder weil

$$1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

ist:

$$\frac{dl\{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})\}}{d\mu}$$

$$=-nC+n\int_0^1\left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^{n\mu-1}}{1-z}\right\}dz.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (3) z und $n\mu$ für x und μ, so tritt $nd\mu$ an die Stelle von $d\mu$, und nach beiderseitiger Multiplikation mit n ist dann

$$\frac{dl\Gamma(n\mu)}{d\mu}=-nC+n\int_0^1\frac{1-z^{n\mu-1}}{1-z}dz.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen ergibt sich jetzt

$$\frac{d}{d\mu}\,l\left\{\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)}\right\}$$

$$=n\int_0^1\left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{1}{1-z}\right\}dz.$$

Der Werth dieses Integrales ist aber sehr leicht zu finden; denn man hat durch unbestimmte Integration

$$\int\left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{1}{1-z}\right\}dz=-l(1-z^n)+l(1-z)$$

$$=-l\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)=-l(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}),$$

folglich

$$\int_0^1\left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{1}{1-z}\right\}dz=-ln.$$

Demnach ist jetzt in Gemässheit des Vorigen:

$$\frac{d}{d\mu}\,l\left\{\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)}\right\}=-nln=l\left(\frac{1}{n^n}\right).$$

Multiplizirt man beiderseits mit $d\mu$, integrirt und nennt lq die hinzuzufügende Constante, so wird

$$l\left\{\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)}\right\}$$

$$=\mu\,l\left(\frac{1}{n^n}\right)+lq=l(n^{-n\mu}q),$$

woraus folgt:

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})=n^{-n\mu}.q\,\Gamma(n\mu).$$

Die Constante q bestimmt sich leicht, wenn man $\mu=\frac{1}{n}$ setzt und bemerkt, dass $\Gamma(1)=1$ ist. Man hat dann

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=n^{-1}q,$$

und weil nach dem von Euler gefundenen Satze die linke Seite

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}$$

ist,

$$q=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}.$$

So wird denn

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})=n^{\frac{1}{2}-n\mu}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(n\mu),$$

und diess ist der von Legendre zuerst bewiesene Satz.

XLI.

Ueber die Verwandlung der Funktionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Unter die schönsten Arbeiten Cauchy's gehört gewiss die Auffindung des Kennzeichens, wonach man jeder Funktion auf den ersten Blick ansehen kann, unter welchen Bedingungen sich dieselbe in eine convergente nach steigenden Potenzen ihrer Veränderlichen fortschreitende Reihe verwandeln lässt. Dasselbe spricht sich in folgendem Satze aus:

„Sei $F(x)$ die gegebene Funktion und um völliger Allgemeinheit willen $x=r(\cos u+\sqrt{-1}\sin u)$, in welcher Form alle denkbaren reellen und imaginären Werthe von x enthalten sind. Bleiben nun die Funktion $F(x)$ und ihr erster Differenzialquotient $F'(x)$ endlich und stetig für alle Werthe von x, deren Moduli innerhalb des Intervalles 0 bis R liegen, wo R eine durch die Natur der Funktion $F(x)$ selbst bestimmte Grösse ist, so kann man $F(x)$

für alle diese, aber auch nur für diese Werthe von x in eine convergente Reihe von der Form

$$A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots$$

verwandeln; die Gränzen für die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion und ihres Differenzialquotienten sind mithin zugleich die für die Entwickelbarkeit der Funktion."

Cauchy beweist dieses merkwürdige Theorem dadurch, dass er zeigt: für $R>r>0$ und $e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}=\Theta$, wo n ganz und positiv ist, hat man die Gleichung:

$$F(x)=\operatorname{Lim}\frac{1}{n}\left[\frac{r}{r-x}F(r)+\frac{\Theta r}{\Theta r-x}F(\Theta r)+\frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r-x}F(\Theta^2 r)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\Theta^{n-1}r}{\Theta^{n-1}r-x}F(\Theta^{n-1}r)\right],$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsen von n bezieht, so dass $\operatorname{Lim}\Theta=1$ wird *).

Hier wird sich gewiss Jedem, der den Gang des Beweises verfolgt, die Frage aufdrängen, wie wohl der geistreiche französische Analytiker zu dieser Betrachtungsweise, die von der bisherigen völlig verschieden ist, gekommen sei, und wie dieselbe mit anderen bekannten Methoden zusammenhänge. Hierauf ist die Antwort: hinter der ganzen Untersuchung steht ein sehr allgemeines bestimmtes Integral, dessen Werth die beliebige Funktion F darstellt, nämlich das Theorem:

$$F(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{\sqrt{-1}t}}{re^{\sqrt{-1}t}-a}F(re^{\sqrt{-1}t})\,dt,\ a<r,$$

welches unter den nämlichen Bedingungen richtig bleibt, unter denen sich $F(a)$ in eine nach Potenzen von a fortschreitende und convergente Reihe verwandeln lässt.

Wir wollen nun zuerst die Richtigkeit dieses Satzes beweisen und dann zeigen, wie er mit Cauchy's Untersuchungen zusammenhängt.

I. Lemma.

Für alle diejenigen Werthe von r, für welche sich $F(r)$ in eine nach steigenden Potenzen von r fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln lässt, ist

$$\int_0^{2\pi}e^{-nti}F(re^{ti})\,dt=\frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}2\pi, \tag{1}$$

wobei i zur Abkürzung für $\sqrt{-1}$ gebraucht wird.

---

*) Moigno, Leçons de calcul différentiel etc. XVII[ième] leçon und Archiv. Theil I. S. 364.

Nach dem Maclaurin'schen Theoreme hat man nämlich:

$$F(r) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} r + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 + \ldots, \qquad (2)$$

was aber nur so lange richtig bleibt, als die Reihe rechts convergirt, weil ausserdem die Funktion und die Reihe einander nicht gleich sind. Unter dieser Voraussetzung ist es auch erlaubt, $re^{ti} = r(\cos t + i \sin t)$ für r zu setzen, indem sich dann die Reihe in zwei andere zerlegt, nämlich

$$F(0) + \frac{F'(0)}{1} r \cos t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \cos 2t + \ldots$$
$$+ \quad i \left\{ \frac{F'(0)}{1} r \sin t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \sin 2t + \ldots \right\},$$

welche ebenfalls noch convergiren, wenn die Reihe (2) convergirt.

Multipliziren wir jetzt die Gleichung

$$F(re^{ti}) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} re^{ti} + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 e^{2ti} + \ldots\ldots$$

mit $e^{-nti} dt$ und integriren nach t zwischen den Gränzen $t=0$, $t=2\pi$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\, dt = \\ F(0)&\int_0^{2\pi} e^{-nti}\, dt + \frac{r F'(0)}{1} \int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ti}\, dt \\ &\qquad + \frac{r^2 F''(0)}{1.2} \int_0^{2\pi} e^{-(n-2)ti}\, dt + \ldots \end{aligned}\right\} . \qquad (3)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre etwa

$$\frac{r^m F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} \int_0^{2\pi} e^{-(n-m)ti}\, dt, \qquad (4)$$

wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet und es sich noch um den Werth des bestimmten Integrales handelt. Dasselbe ist auch

$$= \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\, t\, dt - i \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\, t dt.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: ob nämlich die willkürliche Zahl m von der gegebenen n verschieden ist, oder nicht.

Im ersten Falle hat man

$$\int \cos(n-m)\, t\, dt - i \int \sin(n-m)\, t\, dt = \frac{\sin(n-m)\, t}{n-m} + i\, \frac{\cos(n-m)\, t}{n-m};$$

folglich, weil auch $n-m$ eine ganze Zahl ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = 0.$$

Für $m=n$ dagegen ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Es verschwinden also in der Reihe (3) alle diejenigen Glieder, in denen die fortlaufenden Zahlen $m=1, 2, 3, \ldots$ von n verschieden sind, und es bleibt demnach bloss das Glied übrig, in welchem $m=n$ ist, d. h. gemäss des Ausdruckes (4) die Grösse

$$\frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} 2\pi;$$

folglich haben wir nach (3)

$$\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\,dt = \frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots.n} 2\pi,$$

womit das aufgestellte Lemma bewiesen ist.

II.

Wir können hieraus leicht unser im Anfang aufgestelltes Theorem beweisen. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}} F(re^{ti})\,dt.$$

Dabei lässt sich der unter dem Integralzeichen stehende Bruch

$$\frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}}$$

nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\ldots, 1>u>-1$$

in eine unendliche Reihe verwandeln, sobald $\frac{a}{r}$ wie u unter der Einheit liegt, also hinsichtlich der absoluten Werthe $a<r$ ist. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} F(re^{ti})\,dt + \frac{a}{r}\int_0^{2\pi} e^{-ti} F(re^{ti})\,dt + \frac{a^2}{r^2}\int_0^{2\pi} e^{-2ti} F(re^{ti})\,dt + \ldots\right\}.$$

Bestimmt man hier die Werthe sämmtlicher Integrale rechts mit Hülfe von Formel (1), so ergiebt sich für $a<r$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(0)+\frac{a}{1}F'(0)+\frac{a^2}{1.2}F''(0)+\ldots. \qquad (5)$$

Nun war aber früher vorausgesetzt, dass die Reihe

$$F(0)+\frac{r}{1}F'(0)+\frac{r^2}{1.2}F''(0)+\ldots.$$

convergire und $F(r)$ zur Summe habe; da nun $a<r$ ist, so muss die Reihe in (5) um so mehr convergiren und $F(a)$ zur Summe haben; daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(a),\ a<r; \qquad (6)$$

und diess gilt für alle solche Werthe von r, für welche sich $F(r)$ in eine nach steigenden Potenzen fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln lässt.

Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, diese ganze Betrachtungsweise umzukehren. Könnte man nämlich unabhängig vom Maclaurin'schen Satze die Richtigkeit des in Nro. (6) aufgestellten Theoremes erweisen und die Bedingungen ermitteln, unter welchen dasselbe gilt, so wären hiermit auch die Bedingungen gefunden, unter welchen man eine Funktion $F(a)$ in eine nach Potenzen von a fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln kann. Nun hat man aber den Satz

$$\int_0^c f(t)\,dt=\text{Lim}\frac{c}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{c}{n}\right)+f\left(\frac{2c}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{\overline{n-1}\,c}{n}\right)\right\},$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das unbegränzte Wachsen von dem ganzen positiven n bezieht. Hiernach ist für

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti}):$$

$$F(a)=\text{Lim}\,\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-a}F(c)+\frac{re^{\frac{2\pi}{n}i}}{re^{\frac{2\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{2\pi}{n}i})+\frac{re^{\frac{4\pi}{n}i}}{re^{\frac{4\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{4\pi}{n}i})+\ldots\right\};$$

oder für $e^{\frac{2\pi}{n}i}=\Theta$:

$$F(a)=\text{Lim}\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-a}F(0)+\frac{\Theta r}{\Theta r-a}F(\Theta r)+\frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r-a}F(\Theta^2 r)+\ldots\right\}.$$

Dieser Satz wäre es also eigentlich, den man beweisen müsste, woraus dann Nro. (6) und das Maclaurin'sche Theorem unmittelbar folgen würden. Diesen Weg hat sich in der That Cauchy gebrochen, wobei er auch die Bedeutung der vorigen Gleichung für die Integralrechnung ganz verschweigen konnte, wenn er seine Untersuchungen als zur Differenzialrechnung gehörig darstellen wollte.

XLII.

Ueber eine Anwendung des in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesenen Hauptsatzes der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

Der in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesene bekannte Hauptsatz der Theorie der bestimmten Integrale scheint mir nicht immer in seiner ganzen Wichtigkeit erkannt, wohl selbst zuweilen für einen gewissermaassen bloss näherungsweise richtigen Satz gehalten zu werden, was eine völlig unrichtige Ansicht ist. Namentlich scheint es mir, dass dieser Satz in den Lehrbüchern der höheren Analysis noch nicht allgemein genug zur Entwickelung der Grundformeln, auf denen die Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik beruhen, benutzt wird, da doch nach meiner Ueberzeugung gerade der in Rede stehende Satz den eigentlichen und wahren Grund aller dieser Anwendungen enthält. Ich habe mir daher vorgenommen, in verschiedenen nach und nach auf einander folgenden kleinen Aufsätzen die Anwendung dieses wichtigen Satzes etwas näher zu erläutern, und werde zunächst auf den folgenden Seiten eine Entwickelung der bekannten Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes ebener Curvenstücke mittheilen, welcher man, wie ich hoffe, wenn dieselbe auch weitläufiger als die gewöhnliche Darstellung ist, doch völlige Strenge und Evidenz nicht wird absprechen können.

Zuerst müssen wir die folgende Aufgabe auflösen.

Den Schwerpunkt eines Trapeziums $ABCD$ (Taf. VI. Fig. 1.), dessen parallele Seiten AC und BD sind, zu finden.

Um diese Aufgabe aufzulösen, halbire man die parallelen Seiten AC und BD des Trapeziums in E und F, und ziehe EF, so ist diese Linie nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Zieht man ferner die Linien DE und AF, und nimmt $EG=\frac{1}{3}DE$ und $FH=\frac{1}{3}AF$, so sind G und H die Schwerpunkte der Dreiecke ACD und ABD, und es ist also auch die Linie GH ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Folglich ist der Durchschnittspunkt S der Linien EF und GH der gesuchte Schwerpunkt des Trapeziums.

Legen wir nun durch A eine auf den parallelen Seiten des Trapeziums senkrecht stehende, durch S eine denselben Seiten parallele gerade Linie, und bezeichnen den Durchschnittspunkt dieser beiden Linien durch K, die Entfernung der beiden parallelen Seiten des Trapeziums von einander oder die sogenannte Höhe desselben aber durch AL, so ist nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte

$$AK=\frac{\frac{1}{3}AL.\Delta ACD+\frac{2}{3}AL.\Delta ABD}{\Delta ACD+\Delta ABD}$$

oder

$$AK=\frac{1+2\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}}{3(1+\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD})}.AL;$$

also, wie sogleich erhellet:

$$AK=\frac{1+2\frac{BD}{AC}}{3(1+\frac{BD}{AC})}.AL=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AL.$$

Weil aber offenbar

$$\frac{AK}{AL}=\frac{AJ}{AB}$$

ist, so ist auch

$$AJ=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AB.$$

Ferner ist offenbar

$$AB:BF-AE=AJ:SJ-AE,$$

d. i.

$$AB:\tfrac{1}{2}(BD-AC)=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AB:SJ-\tfrac{1}{2}AC,$$

woraus sich unmittelbar

$$SJ-\tfrac{1}{2}AC=\frac{(BD-AC)(AC+2BD)}{6(AC+BD)},$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$SJ=\frac{AC^2+AC.BD+BD^2}{3(AC+BD)}$$

ergiebt.

In Taf. VI. Fig. 2. sei jetzt $ABCD$ ein auf rechtwinklige Coordinaten bezogenes Curvenstück, in welchem alle Ordinaten gleiche Vorzeichen haben. Denkt man sich nun AB in n gleiche Theile getheilt, zieht durch alle Theilpunkte senkrechte Ordinaten, verbindet deren Endpunkte durch Sehnen der Curve mit einander, wodurch man n Trapeze erhält, und bezeichnet die den sämmtlichen Theilpunkten von AB mit Einschluss von A und B entsprechenden Abscissen und Ordinaten durch

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots.\ x_{n-1},\ x_n=b$$

und

$$\alpha=y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots.\ y_{n-1},\ y_n=\beta;$$

die Coordinaten des Schwerpunkts des Curvenstücks $ABCD$ aber durch X und Y, so ist, wenn der Kürze wegen, indem man sich n in's Unendliche wachsend denkt:

$$M=\operatorname{Lim}\left\{\begin{array}{r}(x_0+\frac{y_0+2y_1}{3(y_0+y_1)}\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{1}{2}(y_0+y_1)\frac{b-a}{n}\\ +(x_1+\frac{y_1+2y_2}{3(y_1+y_2)}\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{1}{2}(y_1+y_2)\frac{b-a}{n}\\ +(x_2+\frac{y_2+2y_3}{3(y_2+y_3)}\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{1}{2}(y_2+y_3)\frac{b-a}{n}\\ +(x_3+\frac{y_3+2y_4}{3(y_3+y_4)}\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{1}{2}(y_3+y_4)\frac{b-a}{n}\\ \text{u. s. w.}\\ +(x_{n-1}+\frac{y_{n-1}+2y_n}{3(y_{n-1}+y_n)}\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\frac{b-a}{n}\end{array}\right\}$$

und

$$N = \text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{r}(y_0+y_1)+(y_1+y_2)\\ +(y_2+y_3)\\ +(y_3+y_4)\\ \text{u. s. w.}\\ +(y_{n-1}+y_n)\end{array}\right\}$$

gesetzt wird, nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$X = \frac{M}{N},$$

wo es nun darauf ankommt, die Grössen M und N zu bestimmen.
Es ist aber

$$M = \text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{r}x_0(y_0+y_1)+x_1(y_1+y_2)\\ +x_2(y_2+y_3)\\ +x_3(y_3+y_4)\\ \text{u. s. w.}\\ +x_{n-1}(y_{n-1}+y_n)\end{array}\right\}$$

$$+\,\text{Lim}\,.\,\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\{y_0+3y_1+3y_2+3y_3+\ldots+3y_{n-1}+2y_n\}$$

$$= \text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{r}x_0y_0+\left(x_1-\frac{b-a}{n}\right)y_1\\ +x_1y_1+\left(x_2-\frac{b-a}{n}\right)y_2\\ +x_2y_2+\left(x_3-\frac{b-a}{n}\right)y_3\\ +x_3y_3+\left(x_4-\frac{b-a}{n}\right)y_4\\ \text{u. s. w.}\\ +x_{n-1}y_{n-1}+\left(x_n-\frac{b-a}{n}\right)y_n\end{array}\right\}$$

$$+\,\text{Lim}\,.\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\,\text{Lim}\,.\,\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$= \text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\,\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{2n}(x_0y_0+x_ny_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 y_0$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta);$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)=0,\ \operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta)=0$$

ist:

$$M=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n);$$

also nach dem Archiv. Thl. II. S. 275. bewiesenen allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$M=\int_a^b xydx.$$

Ferner ist

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta),$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta)=0$$

ist:

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n);$$

also nach dem in Rede stehenden Satze von den bestimmten Integralen:

$$N=\int_a^b ydx.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}.$$

Setzen wir ferner

$$M'=\text{Lim}.\left\{\begin{array}{l}\frac{y_0^2+y_0y_1+y_1^2}{3(y_0+y_1)}.\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)\frac{b-a}{n}\\+\frac{y_1^2+y_1y_2+y_2^2}{3(y_1+y_2)}.\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\frac{b-a}{n}\\+\frac{y_2^2+y_2y_3+y_3^2}{3(y_2+y_3)}.\tfrac{1}{2}(y_2+y_3)\frac{b-a}{n}\\ \text{u. s. w.}\\+\frac{y_{n-1}^2+y_{n-1}y_n+y_n^2}{3(y_{n-1}+y_n)}.\tfrac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\frac{b-a}{n}\end{array}\right\},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$Y=\frac{M'}{N},$$

wo es nun auf die Bestimmung der Grösse M' ankommt.

Es ist aber

$$M'=\text{Lim}.\frac{b-a}{6n}\left\{\begin{array}{l}y_0^2+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+\ldots+2y_{n-1}^2+y_n^2\\+y_0y_1+y_1y_2+y_2y_3+y_3y_4+\ldots+y_{n-1}y_n\end{array}\right\},$$

und folglich, weil

$$\begin{array}{l}y_0y_1=y_0(y_1-y_0)+y_0^2,\\y_1y_2=y_1(y_2-y_1)+y_1^2,\\y_2y_3=y_2(y_3-y_2)+y_2^2,\\y_3y_4=y_3(y_4-y_3)+y_3^2,\\ \text{u. s. w.}\\y_{n-1}y_n=y_{n-1}(y_n-y_{n-1})+y_{n-1}^2\end{array}$$

ist:

$$M'=$$

$$\text{Lim}.\frac{b-a}{6n}\left\{\begin{array}{l}2y_0^2+3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2+\ldots+3y_{n-1}^2+y_n^2\\+y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)$$

$$+\frac{1}{2}\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$-\frac{1}{2}\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}(\alpha^2+2\beta^2).$$

Nach dem schon vorher angewandten Satze von den bestimmten Integralen ist nun

$$\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)=\int_a^b y^2dx;$$

und nach dem Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen, ebenfalls sehr wichtigen, Satze von den Mittelgrössen ist, weil nach der Voraussetzung

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.y_n$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, wenn wir eine gewisse Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots.y_n-y_{n-1}$$

durch μ bezeichnen:

$$y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})$$
$$=\mu(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}).$$

Also ist

$$\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$=\text{Lim}\,.\mu\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1})$$

$$=\text{Lim}\,\mu\,.\,\text{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\text{Lim}\,.\mu\beta\frac{b-a}{n}.$$

Weil nun aber nach dem schon mehrmals angewandten Satze von den bestimmten Integralen

$$\text{Lim}\,.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=\int_a^b ydx$$

ist, und, wenn n in's Unendliche wächst, die Grössen

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots y_n-y_{n-1};$$

also natürlich auch die Mittelgrösse μ zwischen denselben, sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern; so ist offenbar

$$\text{Lim}\,\mu\,.\,\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=0.$$

Und weil nun offenbar auch

$$\text{Lim}\,.\,\mu\beta\frac{b-a}{n}=0$$

ist, so ist

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}=0.$$

Nimmt man hierzu endlich noch, dass offenbar

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}(\alpha^2+2\beta^2)=0$$

ist, so folgt aus dem Obigen

$$M'=\tfrac{1}{2}\int_a^b y^2dx,$$

also

$$Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

Durch die Formeln

$$X=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

ist nun die Lage des Schwerpunkts vollkommen bestimmt.

Hätte man die Coordinaten X, Y des Schwerpunkts eines Flächenstücks wie $ACEDB$ in Taf. VI. Fig. 3. zu bestimmen, so wäre, wenn wir die Abscissen der Punkte A, B und E respective durch a, b und e bezeichnen, nach der Lehre vom Schwerpunkte und nach dem Vorhergehenden:

$$X=\frac{\frac{\int_a^e xydx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\frac{\int_e^b xydx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx},$$

$$Y=\frac{\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^e y^2dx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_e^b y^2dx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx};$$

d. i.

$$X = \frac{\int_a^e xydx + \int_e^b xydx}{\int_a^e ydx + \int_e^b ydx},$$

$$Y = \tfrac{1}{2}.\frac{\int_a^e y^2dx + \int_e^b y^2dx}{\int_a^e ydx + \int_e^b ydx}.$$

Weil nun aber nach der Lehre von den bestimmten Integralen (Archiv. Thl. II. S. 268.)

$$\int_a^e ydx + \int_e^b ydx = \int_a^b ydx,$$

$$\int_a^e xydx + \int_e^b xydx = \int_a^b xydx,$$

$$\int_a^e y^2dx + \int_e^b y^2dx = \int_a^b y^2dx$$

ist, so erhält man wie vorher auch jetzt wieder:

$$X = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, \quad Y = \tfrac{1}{2}.\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

Das Vorhergehende ist für unsern jetzigen Zweck hinreichend. Späterhin hoffen wir auf andere ähnliche Anwendungen von dem allen obigen Betrachtungen hauptsächlich zum Grunde liegenden wichtigen Satze von den bestimmten Integralen zurückzukommen.

XLIII.

Ueber zwei Sätze aus der Algebra und aus der Zahlenlehre.

Nach der Abhandlung: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres par M. Poinsot in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville. Janvier et Février. 1845. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Durch leichte Rechnung überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & Ax+B \\ = & (x-a)A \\ & +Aa+B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Ax^2+Bx+C \\ = & (x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax \\ +Aa+B \end{array}\right\} \\ & +Aa^2+Ba+C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Ax^3+Bx^2+Cx+D \\ = & (x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^2 \\ +(Aa+B)x \\ +Aa^2+Ba+C \end{array}\right\} \\ & +Aa^3+Ba^2+Ca+D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\\
&=(x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^3\\ +(Aa+B)x^2\\ +(Aa^2+Ba+C)x\\ +Aa^3+Ba^2+Ca+D\end{array}\right\}\\
&+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,
\end{aligned}$$

u. s. w.

und übersieht hier auch schon das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten, auf völlig unzweideutige Weise.

Nehmen wir nun dieses Gesetz für jede ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades als gültig an, so ist

$$\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=Ax^n+(x-a)\left\{\begin{array}{l} Bx^{n-2}\\ +(Ba+C)x^{n-3}\\ +(Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\ \quad\text{u. s. w.}\\ +(Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\ +Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{array}\right\}\\
&+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+Da^{n-3}+\ldots+La^2+Ma+N.
\end{aligned}$$

Addiren wir jetzt auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Grösse

$$-Aa^n+Aa^n=0,$$

und bemerken, dass

$$A(x^n-a^n)=A(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=(x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^{n-1}\\ +(Aa+B)x^{n-2}\\ +(Aa^2+Ba+C)x^{n-3}\\ +(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\ \quad\text{u. s. w.}\\ +(Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\ +Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{array}\right\}\\
&+Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots+La^2+Ma+N,
\end{aligned}$$

und sehen also hieraus, dass das bemerkte Gesetz für jede ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades gilt, wenn es für

jede ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades gilt, nach dem Obigen folglich offenbar allgemein gültig ist.

Wir haben daher jetzt den folgenden Satz:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist, so ist für jedes a immer

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+f(a),$$

wo $f_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades bezeichnet, deren höchstes Glied denselben Coefficienten wie das höchste Glied der Function $f(x)$ hat *).

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades sei, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, und dass

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.\ a_n$$

n ganz beliebige Grössen seien. Dann ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-a_1)f_1(x)+f(a_1),\\
f_1(x)&=(x-a_2)f_2(x)+f_1(a_2),\\
f_2(x)&=(x-a_3)f_3(x)+f_2(a_3),\\
f_3(x)&=(x-a_4)f_4(x)+f_3(a_4),\\
&\text{u. s. w.}\\
f_{n-1}(x)&=(x-a_n)f_n(x)+f_{n-1}(a_n);
\end{aligned}$$

wo nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots.\ f_n(x)$$

ganze rationale algebraische Functionen respective vom Grade

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ \ldots.\ 0$$

sind, deren höchste Glieder sämmtlich den Coefficienten A haben, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die constante Grösse $f_n(x)=A$ sein muss.

Durch successive Anwendung der obigen Gleichungen erhalten wir aber leicht für $f(x)$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
f(x)=\ &f(a_1)\\
&+(x-a_1)f_1(a_2)
\end{aligned}$$

*) Eine andere Darstellung des Beweises dieses Satzes s. m. Archiv. Thl. II. S. 354.

$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

von welchem sich nun die folgenden Anwendungen machen lassen.

§. 3.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind.

Ist dann $f(a_1)=0$, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f(x)=\quad(x-a_1)f_1(a_2)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_2)=(a_2-a_1)f_1(a_2),$$

und folglich, wenn $f(a_2)=0$ ist, weil die Grössen a_1 und a_2 ungleich sind, also nicht $a_2-a_1=0$ ist, jederzeit $f_1(a_2)=0$.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$f(x)=\quad(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_3)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)f_2(a_3),$$

und folglich, wenn $f(a_3)=0$ ist, weil die Grössen a_1, a_2, a_3 unter einander ungleich sind, also nicht

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)=0$$

ist, jederzeit $f_2(a_3)=0$.

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} f(x)= \quad & (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4) \\ & \text{u. s. w.} \\ & +(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1}) \\ & +(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n) \\ & +A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n), \end{aligned}$$

also

$$f(a_4)=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4),$$

und folglich, wenn $f(a_4)=0$ ist, da die Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 unter einander ungleich sind, also nicht

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=0$$

ist, jederzeit $f_3(a_4)=0$.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man übersieht aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, dass, wenn die n Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots . a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind und

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist, jederzeit auch

$$f_1(a_2)=0,\ f_2(a_3)=0,\ f_3(a_4)=0,\ f_4(a_5)=0,\ \ldots f_{n-1}(a_n)=0$$

ist. Dann ist aber nach dem obigen allgemeinen für die Function $f(x)$ gefundenen Ausdrucke

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots .(x-a_n),$$

und wir gelangen daher jetzt zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ des $n$ten Grades, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, jederzeit verschwindet, wenn man für x nach und nach die n sämmtlich unter einander ungleichen Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots . a_n$$

setzt, so dass

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist; so ist

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n).$$

§. 4.

Könnte es ausser den sämmtlich von einander verschiedenen Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

für welche

$$f(a_1)=0, f(a_2)=0, f(a_3)=0, f(a_4)=0, \ldots f(a_n)=0$$

ist, noch eine von diesen Grössen verschiedene Grösse α geben, für welche

$$f(\alpha)=0$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter der gemachten Voraussetzung

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

ist,

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n)=0$$

sein, welches ungereimt ist, da, weil nach der Voraussetzung α keiner unter den Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

gleich ist, also keiner der Factoren

$$\alpha-a_1, \alpha-a_2, \alpha-a_3, \alpha-a_4, \ldots \alpha-a_n$$

verschwindet, und natürlich auch der Coefficient A des höchsten Gliedes der Function $f(x)$ nicht verschwinden kann, weil dieselbe sonst, wie doch angenommen wurde, nicht von dem $n$ten Grade sein könnte. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Algebra:

Lehrsatz. **Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe der Grösse x, für welche eine von dieser Grösse abhängende ganze rationale algebraische Function verschwindet, kann nie grösser sein als der Grad dieser Function.**

§. 5.

Wir wollen jetzt annehmen, dass alle im Obigen gebrauchten Symbole ganze Zahlen bezeichnen, und dass die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

in Bezug auf eine gewisse Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruent seien.

Ist dann $f(a_1)$ durch p theilbar, d. h

$$f(a_1) \equiv 0 (\text{Mod. } p),$$

so ist, weil nach §. 2.

$$f(a_2) = f(a_1) + (a_2 - a_1) f_1(a_2)$$

ist, wenn auch $f(a_2)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_2) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

ist, offenbar auch $(a_2 - a_1) f_1(a_2)$ durch p theilbar, d. h.

$$(a_2 - a_1) f_1(a_2) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p).$$

Weil aber a_1 und a_2 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in $a_2 - a_1$ nicht auf, und muss also nach einem bekannten Satze von den Primzahlen in $f_1(a_2)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_1(a_2) \equiv 0 (\text{Mod. } p)$$

sein. Nach §. 2. ist ferner

$$\begin{aligned} f(a_3) \equiv\ & f(a_1) \\ & + (a_3 - a_1) f_1(a_2) \\ & + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3), \end{aligned}$$

und wenn also jetzt auch $f(a_3)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_3) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

ist, so muss offenbar auch

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3)$$

durch p theilbar, d. h.

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

sein. Weil aber a_1, a_2, a_3 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in keiner der Differenzen $a_3 - a_1$, $a_3 - a_2$ auf, und muss also nach demselben Satze von den Primzahlen wie vorher in $f_2(a_3)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_2(a_3) \equiv 0 (\text{Mod. } p)$$

sein. Auf ähnliche Art ist nach dem in §. 2. bewiesenen Satze

$$f(a_4) = f(a_1) + (a_4-a_1)f_1(a_2) + (a_4-a_1)(a_4-a_2)f_2(a_3) + (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4),$$

und wenn also jetzt auch $f(a_4)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so muss offenbar auch

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4)$$

durch p theilbar, d. h.

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Weil aber a_1, a_2, a_3, a_4 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in keiner der Differenzen a_4-a_1, a_4-a_2, a_4-a_3 auf, und muss also nach dem vorher schon mehrmals angewandten Satze von den Primzahlen in $f_3(a_4)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt jetzt keinem Zweifel mehr, und man übersieht aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, dass, wenn die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander nicht congruent, und die Grössen

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), \ldots f(a_n)$$

sämmtlich durch p theilbar sind, d. h.

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist: dann jederzeit auch die Grössen

$$f_1(a_2), f_2(a_3), f_3(a_4), f_4(a_5), \ldots f_{n-1}(a_n)$$

durch p theilbar sind, d. h.

$$f_1(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_2(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_4(a_5) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f_{n-1}(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

st. Dann ist aber nach §. 2. offenbar auch die Differenz

$$f(x) - A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

durch p theilbar, d. h.

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p),$$

und wir gelangen daher jetzt zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ des $n$ten Grades, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, jederzeit einen durch die Primzahl p theilbaren Werth erhält, wenn man für x nach und nach die n in Bezug auf den Modulus p sämmtlich unter einander nicht congruenten Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

setzt, so dass also

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so ist jederzeit für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p).$$

§. 6.

Könnte es ausser den in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruenten n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

für welche

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)},$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)},$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)}.$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)},$$
u. s. w.
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)}$$

ist, noch eine diesen Grössen in Bezug auf den Modulus p nicht congruente Grösse α geben, für welche $f(\alpha)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(\alpha) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)}$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter den gemachten Voraussetzungen

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p\text{)}$$

ist, offenbar

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)}$$

sein, welches, wenn die Primzahl p in A nicht aufgeht, nach dem oben schon mehrmals angewandten Satze von den Primzahlen ungereimt ist, da p unter den gemachten Voraussetzungen auch in keinem der Factoren

$$\alpha-a_1, \ \alpha-a_2, \ \alpha-a_3, \ \alpha-a_4, \ \ldots \alpha-a_n$$

aufgehen kann. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Zahlenlehre:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x ist, und die Primzahl p in dem Coefficienten des höchsten Gliedes dieser Function nicht aufgeht, so kann es nie mehr als n in Bezug auf den Modulus p unter einander nicht congruente Werthe von x geben, für welche

$$f(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p\text{)}$$

ist.

Andere Beweise dieses Satzes haben Gauss (Disquisitiones arithmeticae. p. 40.), Lagrange (Mem. de l'Acad. des sc. de Berlin. 1767. p. 192.), Legendre (Hist. de l'Acad. des sc. de Paris. 1785.) und Euler (Nov. Comm. Acad. sc. Petrop. T. XVIII. pag. 93.), letzterer jedoch nur für einen besonderen Fall, gegeben. Auch s. m. das Mathematische Wörterbuch. Art. Zahl. Nr. 19. und Archiv der Mathematik und Physik. Thl. II. S. 5.

Die oben im Wesentlichen nach Poinsot geführten Beweise der beiden Sätze in §. 4. und dem vorliegenden Paragraphen bieten, wie es uns scheint, vorzüglich deshalb ein besonderes Interesse dar, weil durch dieselben die beiden genannten Theoreme, welche als die Fundamentalsätze der Algebra und der Zahlenlehre betrachtet werden können, auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückgeführt werden, welches auch der wichtigste Grund ist, welcher uns veranlasst hat, dieselben hier mitzutheilen. Ausserdem verdienen dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Strenge gewiss überhaupt recht sehr, bei dem Unterrichte in der Algebra und in der Zahlenlehre benutzt zu werden.

§. 7.

Wir wollen jetzt

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

setzen, und annehmen, dass es n in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruente Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots a_n$$

von x gebe, für welche

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod, } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist. Dann ist nach §. 5. für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod.} p).$$

Bezeichnen wir aber überhaupt die $k$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots\ldots a_n$$

durch

$$\underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_k}$$

so ist nach einem allgemein bekannten Satze

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

$$\begin{aligned}
= x^n &- \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} . x^{n-1} \\
&+ \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} . x^{n-2} \\
&- \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_3} . x^{n-3} \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&+ (-1)^{n-1} . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_{n-1}} . x \\
&+ (-1)^n . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_n}
\end{aligned}$$

und folglich nach dem Obigen für jedes x:

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$\begin{aligned}
\equiv Ax^n &- A . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} . x^{n-1} \\
&+ A . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} . x^{n-2} \\
&- A . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_3} . x^{n-3} \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&+ (-1)^{n-1} . A . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_{n-1}} . x \\
&+ (-1)^n . A . \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_n} \quad (\text{Mod. } p).
\end{aligned}$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen

$$f_1(x) = \Big\{ A_1 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} \Big\} x^{n-1}$$

$$+ \Big\{ A_2 - A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} \Big\} x^{n-2}$$

$$+ \Big\{ A_3 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_3} \Big\} x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ \Big\{ A_{n-1} - (-1)^{n-1} .\, A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_{n-1}} \Big\} x$$

$$+ A_n - (-1)^n \,.\, A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_n}$$

setzen, für jedes x

$$f_1(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Folglich ist

$$f_1(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f_1(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Dies könnte, da n die Anzahl der in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruenten Grössen

$$a_1,\; a_2,\; a_3,\; a_4,\; \ldots\; a_n;$$

der Grad der Function $f_1(x)$ aber nur $n-1$ ist, nach dem in §. 6. bewiesenen Lehrsatze nicht der Fall sein, wenn die Primzahl p in dem Coefficienten

$$A_1 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1}$$

nicht aufginge, d. h. wenn nicht

$$A_1 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

wäre. Also ist

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

und folglich nach der Lehre von den Congruenzen für jedes x auch

$$\Big\{ A_1 + A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} \Big\} x^{n-1} \equiv \text{(Mod. } p).$$

Aus dieser Congruenz und der Congruenz

$$f_1(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

folgt nach der Lehre von den Congruenzen, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} f_2(x) = & \Big\{ A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} \Big\} x^{n-2} \\ & + \Big\{ A_3 + A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_3} \Big\} x^{n-3} \\ & \text{u. s. w.} \\ & + \Big\{ A_{n-1} - (-1)^{n-1} A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_{n-1}} \Big\} x \\ & + A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_n} \end{aligned}$$

setzen, für jedes x:

$$f_2(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p);$$

also:

$$\begin{aligned} f_2(a_1) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f_2(a_2) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f_2(a_3) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f_2(a_4) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ & \text{u. s. w.)} \\ f_2(a_n) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p); \end{aligned}$$

welches aus ganz ähnlichen Gründen wie vorher nach §. 6. wieder nicht möglich ist, wenn nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2}$$

durch die Primzahl p theilbar, oder nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist. Also ist

$$A_2 - A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist nun schon klar, und wir werden daher jetzt zu dem folgenden Satze geführt:

Lehrsatz. Wenn

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

und für n in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander nicht congruente Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ als Werthe von x

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so ist jederzeit

$$A_1 + A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_2 - A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_3 + A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_3} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

u. s. w.

$$A_{n-1} - (-1)^{n-1}.A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_{n-1}} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_n - (-1)^n\,.A\,.\,\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{B}_n} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

§. 8.

Es seien jetzt

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots.$$

alle Zahlen, welche kleiner als die beliebige Zahl p und zu der

selben relative Primzahlen sind, und x sei eine ganz beliebige Zahl, welche mit p relative Primzahl ist. Dann sind auch die Producte

$$ax,\ bx,\ cx,\ dx,\ ex,\ldots.$$

mit p relative Primzahlen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, und also eine die Einheit übersteigende Primzahl z. B. in ax und p aufginge, nach einem bekannten Satze diese Primzahl entweder in a oder in x aufgehen müsste, so dass also entweder a oder x mit p nicht relative Primzahl sein würde, was gegen die Voraussetzung streitet. Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \\ &\text{u. s. w,} \end{aligned}$$

wo

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ldots.$$

sämmtlich kleiner als p sind, so kann leicht gezeigt werden, dass diese Grössen sämmtlich zu p relative Primzahlen und sämmtlich unter einander ungleich sind. Wäre nämlich z. B. a_1 nicht mit p relative Primzahl, und ginge folglich eine die Einheit übersteigende Primzahl in a_1 und p auf, so würde wegen der Gleichung

$$ax = \alpha p + a_1$$

diese Primzahl auch in ax, folglich nach dem schon vorher angewandten Satze entweder in a oder in x aufgehen, und es würde also entweder a oder x nicht mit p relative Primzahl sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Wäre ferner z. B. $a_1 = d_1$, so wäre wegen der beiden Gleichungen

$$ax = \alpha p + a_1,\ dx = \delta p + d_1$$

offenbar

$$ax - \alpha p = dx - \delta p,$$

und folglich

$$(a-d)x = (\alpha-\delta)p.$$

Also ginge p, welches mit x relative Primzahl ist, in $(a-d)x$ auf, und müsste folglich nach einem bekannten Satze in $a-d$ aufgehen, was ungereimt ist, da nach der Voraussetzung der absolute Werth von $a-d$ offenbar kleiner als p ist. Weil nun hiernach die Zahlen

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots,$$

deren Anzahl der Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

gleich ist, sämmtlich kleiner als p, unter einander ungleich und zu p relative Primzahlen sind, so ist klar, dass ohne Rücksicht auf die Ordnung die Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

und

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots$$

von einander nicht verschieden sind, und dass also jederzeit

$$abcde \ldots = a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots$$

ist.

Bezeichnen wir aber die Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots,$$

welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind, durch n, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

durch Multiplication auf der Stelle, dass die Differenz der Producte

$$x^n \, abcde \ldots \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots,$$

d. h. nach dem Vorhergehenden die Differenz der Producte

$$x^n \, abcde \ldots \text{ und } abcde \ldots$$

durch p theilbar, oder dass

$$(x^n - 1) \, abcde \ldots \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist. Weil nun aber

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

mit p sämmtlich relative Primzahlen sind, so muss nach einem bekannten Satze p in $x^n - 1$ aufgehen, d. h. es muss

$$x^n - 1 \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein, wobei nach dem Obigen vorausgesetzt wird, dass x und p relative Primzahlen sind, und n die Anzahl der Zahlen bezeichnet, welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind.

Ist p eine Primzahl, so sind

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p-1$$

die sämmtlichen Zahlen, welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind. Wenn also nur die Primzahl p in x nicht aufgeht, so ist nach dem Vorhergehenden jederzeit

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

d. h. unter den gemachten Voraussetzungen ist $x^{p-1} - 1$ immer durch p theilbar, welches bekanntlich der Fermat'sche Satz ist.

§. 9.

Wenn wir nun unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl ist, für jedes x

$$f(x) = x^{p-1} - 1$$

setzen, so ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Fermat'schen Satze

$$f(1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
u. s. w.
$$f(p-1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p);$$

und folglich nach dem in §. 5. bewiesenen Lehrsatze für jedes x:

$$f(x) = x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(p-1)) \text{ (Mod. } p).$$

Für $x=0$ ist also

$$-1 \equiv (-1)(-2)(-3)\ldots(-(p-1)) \text{ (Mod. } p),$$

d. h., weil $p-1$ offenbar eine gerade Zahl ist,

$$-1 \equiv 1.2.3.4\ldots(p-1) \text{ (Mod. } p),$$

folglich

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Wenn also p eine Primzahl ist, so ist die Grösse

$$1.2.3.4\ldots(p-1)+1$$

jederzeit durch p theilbar, welches bekanntlich der Wilson'sche Satz ist.

Man sieht hieraus, wie leicht sich auf diese Weise mit Hülfe der oben bewiesenen allgemeinen Sätze aus dem Fermat'schen Satze der Wilson'sche Satz herleiten lässt, welche Herleitung von **Poinsot** a. a. O. wenigstens in der obigen Art nicht gegeben worden ist, so wie denn überhaupt die Darstellung in diesem Aufsatze mehreres uns Eigenthümliche enthält, wie man bei der Vergleichung beider Arbeiten finden wird.

§. 10.

Uebrigens ist endlich noch zu bemerken, dass das Wilson'sche Theorem eigentlich nur ein besonderer Fall des in §. 7. bewiesenen Satzes ist.

Wenn wir nämlich ganz wie im vorhergehenden Paragraphen jetzt wieder

$$f(x)=x^{p-1}-1$$

setzen, so ist in §. 7. der Exponent $n=p-1$, und

$$A=1,\ A_1=0,\ A_2=0,\ldots A_{p-2}=0,\ A_{p-1}=-1;$$

ferner

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ldots a_{p-1}=p-1.$$

Also hat man nach dem in §. 7. bewiesenen Satze offenbar die folgenden Congruenzen:

$$\underset{(1,\,2,\,3,\ldots,\,p-1)}{\mathfrak{A}_1} \equiv 0\ (\mathrm{Mod.}\ p),$$

$$\underset{(1,\,2,\,3,\ldots,\,p-1)}{\mathfrak{A}_2} \equiv 0\ (\mathrm{Mod.}\ p),$$

$$\underset{(1,\,2,\,3,\ldots,\,p-1)}{\mathfrak{A}_3} \equiv 0\ (\mathrm{Mod.}\ p),$$

u. s. w.

$$\underset{(1,\,2,\,3,\ldots,\,p-1)}{\mathfrak{A}_{p-2}} \equiv 0\ (\mathrm{Mod.}\ p),$$

$$1+(-1)^{p-1}\,.\underset{(1,\,2,\,3,\ldots,\,p-1)}{\mathfrak{A}_{p-1}} \equiv 0\ (\mathrm{Mod.}\ p).$$

Aber

$$\underset{(1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, p-1)}{\mathfrak{B}_{p-1}} = 1.2.3.4\ldots(p-1),$$

und folglich

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1).(-1)^{p-1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Ist nun die Primzahl p grösser als 2, so ist $p-1$ eine gerade Zahl, also

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

wobei aber sogleich in die Augen fällt, dass diese Congruenz auch für $p=2$ gilt, und daher allgemein ist.

Alle vorher aus dem in §. 7. bewiesenen Satze hergeleiteten Congruenzen sind übrigens an sich wichtig und interessant.

XLIV.

Applications des théorèmes relatifs a la théorie des fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

---

§. 1.

Pour qu'on puisse suivre avec plus de commodité les applications suivantes, nous réproduirons d'abord le théorème III. du Nro. XXXV. T. VII. de ce journal.

Théorème. Soit f_x une fonction rationnelle et entière de x du degré p.

Soit F_x une fonction rationnelle et entière de x du degré q, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s}(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s), n_1, n_2, $\ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et r_0, r_1, r_2, $\ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x=0,$$

résolue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, ensorte que $n_0-s=0$, lorsque l'équation $F_x=0$ n'aura pas une racine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire, liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x=(x-r_0)^s F_x,$$

s étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire à la condition

$$s+q>p.$$

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k=n_k\,\frac{r_k^s\,f r_k}{\partial_{r_k}^{n_k}\,\varphi r_k},$$

h et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$(1)\qquad \frac{f_x}{F_x}=\sum_{k=0}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=s}\partial_{r_k}^{n_k-1}\,T_k\left\{\frac{1}{x-r_k}+\frac{x^h}{r_k^{h+1}}\right\}.$$

Ajoutons encore que $\partial_x^n\,\psi_x$ désigne la dérivée, et $\partial_x^{-n}\,\psi_x$ l'intégrale de l'ordre n par rapport à x d'une fonction quelconque ψ_x, ensorte que

$$(2)\qquad \partial_x^n\,\psi_x=\frac{d^n\,\psi_x}{dx^n},\quad \partial_x^{-n}\psi_x=\int^n\psi_x\,dx^n.$$

Cela posé, on voit que par la formule (1) toute fonction rationnelle et fractionnaire de x sera réduite aux expressions de la forme

$$\frac{1}{x-r},\quad x^h,$$

h étant un nombre entier et positif. Il suffit donc de savoir appliquer une opération relative à x aux expressions

$$\frac{1}{x-r},\quad x^h,$$

pour qu'on puisse appliquer cette opération à toute fonction rationnelle et fractionnaire de x. On sait, par exemple,

$$\partial_x^n\frac{1}{x-r}=\frac{n!}{(x-r)^{n+1}},$$

et

$$\partial_x^n x^h = \frac{h!}{(h-n)!} x^{h-n},$$

en désignant le produit $1.2\ldots n$ par $n!$. Donc la formule (1) donnera

$$(3) \qquad \partial_x^n \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{n!}{(x-r_k)^{n+1}} + \frac{h!}{(h-n)!} \frac{x^{h-n}}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Pareillement on a

$$\partial_x^{-n} \frac{1}{x-r} = \frac{(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ l(x-r) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n-1} \right\} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

et

$$\partial_x^{-n} x^h = \frac{h!}{(h+n)!} x^{h+n} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

$c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ étant des constantes d'intégration. Donc on tire de la formule (1)

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\partial_x^{-n} \frac{f_x}{F_x} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} \\ &+ \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \begin{aligned} &\frac{(x-r_k)^{n-1}}{(n-1)!} \left[l(x-r_k) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n-1} \right] \\ &+ \frac{h!}{(h+n)!} \frac{x^{h+n}}{r_k^{h+1}} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ce n'est pas tout. La lettre x étant générale peut être remplacée par une caractéristique, et la formule (1) fournit le moyen de trouver l'opération indiquée par une fonction rationnelle et fractionnaire de cette caractéristique. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

§. II.

Substituons d'abord la caractéristique ∂_x à x dans la formule (1), alors, en désignant par φ_x une fonction quelconque de la variable x à laquelle se rapporte le signe ∂_x, on aura

$$(1) \qquad \frac{f\partial_x}{F\partial_x} \varphi_x = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{\partial_x - r_k} + \frac{\partial_x^h}{r_k^{h+1}} \right\} \varphi_x,$$

et la recherche de l'expression

$$\frac{f\partial_x}{F\partial_x} \varphi_x,$$

sera réduite à la recherche des expressions

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x\,,\quad \partial_x^k\,\varphi_x\,.$$

Mais f_x étant une fonction rationnelle et entière de x, on trouvera directement $f\partial_x\,\varphi_x$. Nous faisons donc pour plus de simplicité

$$f_x = 1\,,$$

de sorte qu'on peut prendre $s=0$ et $n_0=0$. Dans ce cas la formule (1) §. I. se réduira à

$$(2)\qquad \frac{1}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{R_k}{x-r_k},$$

et l'équation (1) §. II. deviendra

$$(3)\qquad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\,R_k\frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x\,,$$

R_k et F_x étant déterminés par les équations

$$(4)\qquad R_k = \frac{n_k}{\partial_{r_k}^{n_k}\,F_{r_k}},$$

$$(5)\qquad F_x = (x-r_1)^{n_1}\,(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}.$$

Posons maintenant

$$(6)\qquad y = \frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x\,;$$

on aura

$$(\partial_x - r_k)\,y = \varphi_x\,,$$

ou

$$\partial_x\,y - r_k\,y = \varphi_x\,,$$

équation differentielle à laquelle on satisfait en prenant

$$y = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\,\varphi_x\,dx\,,$$

et substituant cette valeur de y dans l'équation (6) on trouvera

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\,\varphi_x\,dx.$$

Donc l'équation (3) se changera en

$$(7) \qquad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, e^{r_k x} \int e^{-r_k x}\, \varphi_x\, dx,$$

et la recherche de l'expression

$$\frac{1}{F\partial_x}\varphi_x$$

dépendra d'opérations connues.

Les constantes d'intégration sont comprises implicitement dans le second membre de l'équation (7). Pour les avoir explicites, nous rappelons la formule

$$\chi_x \int \psi_x\, dx = \int_{\text{x}}^{x} \chi_x\, \psi_{x'}\, dx' + \chi_x\, C,$$

x étant une valeur particulière de x, et C désignant une quantité indépendante de x, mais du reste arbitraire et fonction de toutes les variables autres que x qui soient contenues dans la fonction ψ_x. Daprès cela la formule (7) sera mise sous la forme

$$(8) \qquad \frac{1}{F\partial_k}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_{\text{x}}^{x} e^{r_k(x-x')}\, \psi_{x'}\, dx' + K,$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, e^{r_k x}\, C,$$

C étant fonction arbitraire de r et k, mais indépendante de x.

D'ailleurs on a suivant une formule connue

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} e^{r_k x}\, CR_k = \sum_{h=0}^{h=n_k} (n_k\overset{h}{-}1)\, \partial_{r_k}^{h} e^{r_k x}\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

ou

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} e^{r_k x}\, CR_k = \sum_{h=0}^{h=n_k} (n_k\overset{h}{-}1)\, e^{r_k x}\, x^h\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

h étant un nombre entier, et $(n_k\overset{h}{-}1)$ étant déterminé par l'équation

$$(n_k\overset{h}{-}1) = \frac{(n_k-1)(n_k-2)\ldots(n_k-h)}{1.2.3.4\ldots\ h}.$$

Or, puisque $(n_k\overset{h}{-}1)$ et R_k sont indépendants de x, et que C représente une quantité arbitraire mais indépendante de x, on substituera simplement C à

$$(n_k\overset{h}{-}1)\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

e qui fait dépendre C de h: donc on aura

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} R_k e^{r_k x} C = \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C,$$

et l'équation (9) se réduit à

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C. \tag{10}$$

Les opérations indiquées dans le second membre de cette équation sont relatives à k et h. D'après ce qui a été dit, la lettre C sera par suite censée fonction de k et h, et pour exprimer cette dépendance, nous remplaçons C par $C_{k,h}$. Avec cette distinction nous substituons la valeur de K de l'équation (10) dans la formule (8), et il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = &\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_{\mathrm{x}}^{x} e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx' \\ &+ \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C_{k,h}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

En vertu d'une formule connue, on développera encore la dérivée

$$P = \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_{\mathrm{x}}^{x} e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx', \tag{12}$$

de manière qu'on ait

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} (n_k \overset{h}{-} 1)\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k\, \partial_{r_k}^{h} \int_{\mathrm{x}}^{x} e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx',$$

ou

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} Q_{k,h} \int_{\mathrm{x}}^{x} (x-x')^h\, e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx', \tag{13}$$

en posant, pour abréger,

$$Q_{k,h} = (n_k \overset{h}{-} 1)\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k,$$

ou, suivant l'équation (4),

$$Q_{k,h} = (n_k \overset{h}{-} 1)\, n_k \partial_{r_k}^{n_k-1-h} \frac{1}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}. \tag{14}$$

L'équation (13), jointe à l'équation (12), transformera la formule (11) en

$$(15)\ \left\{\frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}\left\{\begin{matrix} Q_{k,h}\int_{\text{x}}^{x}(x-x')^h e^{r_k(x-x')}\varphi_{x'}\,dx' \\ + e^{r_k x} x^h C_{k,h}\end{matrix}\right\}\right..$$

Les formules (11) et (15) sont générales et subsistent pour toute fonction rationnelle et entière F_x et pour toute fonction φ_x. Elles se simplifieront en attribuant à F_x une forme particulière.

1. Lorsque l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1,$$

la formule (11) se réduit à

$$(16)\qquad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\left\{R_k\int_{\text{x}}^{x} e^{r_k(x-x')}\varphi_{x'}\,dx' + e^{r_k x} C_k\right\}.$$

2. Lorqu'on fait $m=1$ et qu'on substitue simplement n et r à n_1 et r_1, la formule (11) donnera

$$(17)\qquad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \partial_r^{n-1} R_1\int_{\text{x}}^{x} e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{h=0}^{h=n} e^{rx} x^h C_h.$$

Or, pour ce cas l'équation (5) se réduit à

$$(18)\qquad F_x = (x-r)^n,$$

d'où il suit

$$\partial_x^n F_x = n!,$$

et

$$\partial_r^n F_r = n!\,;$$

donc on aura, eu égard à l'équation (4),

$$R_1 = \frac{n}{\partial_r^n F_r} = \frac{1}{(n-1)!},$$

puis

$$\partial_r^{n-1} R_1\int_{\text{x}}^{x} e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\,dx' = \frac{1}{(n-1)!}\int_{\text{x}}^{x}\partial_r^{n-1} e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\,dx'$$
$$= \int_{\text{x}}^{x}\frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!} e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\,dx'.$$

Cette équation jointe à l'équation (18) change la formule (17) en

$$(19)\quad \frac{1}{(\partial_x - r)^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{k=0}^{k=n} e^{rx} x^k C_k\,.$$

3. En prenant $r=0$ dans la précédente, on obtient

$$(20)\qquad \frac{1}{\partial_x^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{k=0}^{k=n} x^k C_k\,,$$

formule par laquelle une intégrale multiple sera ramenée à une intégrale simple.

Il est bon d'observer qu'en résolvant par rapport à u l'équation différentielle

$$F\partial_x\, u = \varphi_x\,,$$

on aura

$$u = \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x\,,$$

et que par suite la valeur de u sera exprimée par le second membre de la formule (11) ou (15). On voit que cette valeur de u comprend des quantités arbitraires dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m\,,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. III.

Soit Δ_x un signe d'opération déterminé par l'équation

$$(1)\qquad \Delta_x f_x = \frac{f_{x+\varepsilon} - f_x}{\varepsilon}\,.$$

Substituons Δ_x à x dans la formule (2) §. II., et appliquons les opérations à une fonction φ_x. On aura

$$(2)\qquad (F\Delta_x)^{-1}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{1}{\Delta_x - r_k}\varphi_x\,.$$

Or, en posant

$$y = \frac{1}{\Delta_x - r_x}\varphi_x\,,$$

il suit

$$\Delta_x y - r_k y = \varphi_x\,,$$

équation aux différences finies, qui sera verifiée en prenant

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k}(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Sigma (1+\varepsilon r_k)^{-\frac{x}{\varepsilon}} \varphi_x ,$$

ou

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=\mathrm{x}}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

x étant une valeur particulière de x, le signe Σ se rapportant à la variable x', dont l'accroissement est représenté par ε, et Π_x étant une fonction qui ne change pas, si l'on attribue à x l'accroissement ε, mais du reste arbitraire et fonction de r et k. On aura par suite

$$\frac{1}{\Delta_x - r_k} \varphi_x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=\mathrm{x}}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

ce qui change la formule (2) en

$$(3) \quad (F\Delta_x)^{-1} \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=\mathrm{x}}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + K,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} R_k \Pi_x .$$

Suivant une formule connue on déduit de celle-ci

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} \overset{h}{(n_k-1)}\, \partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x$$

et comme on a

$$\partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} = x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\,\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}-h} ,$$

il viendra

$$K' = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\,\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \frac{\overset{h}{(n_k-1)}}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x$$

Or, $\dfrac{\overset{h}{(n_k-1)}}{(1+\varepsilon r_k)^h}$ et R_k étant indépendants de x, et Π_x représentant une fonction arbitraire des variables autres que x, on substituera simplement Π_x à

$$\frac{\overset{h}{(n_k-1)}}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x ,$$

ce qui fait dépendre Π_x de h: donc on aura

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x .$$

C'est cette valeur de K qu'il faut substituer dans la formule (3), et pour mettre en évidence que Π_x dépend de k et h, on pourra écrire $\Pi_{x,k,h}$ au lieu de Π_x. Avec cette distinction il viendra

$$(4)\begin{cases}(F_{\Delta_x})^{-1} \varphi_x = \sum\limits_{k=1.}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum\limits_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} \\ \quad + \sum\limits_{k=1}^{k=m+1} \sum\limits_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_{x,k,h}.\end{cases}$$

Remarquons qu'on peut faire subir à la formule (4) des transformations et des simplifications semblables à celles que l'on a fait subir à la formule (11) §. II. Observons de plus, qu'en résolvant par rapport à u l'équation aux differences finies

$$F_{\Delta_x} u = \varphi_x ,$$

le signe Δ_x étant toujours déterminé par l'équation (1), on aura

$$u = (F_{\Delta_x})^{-1} \varphi_x .$$

Donc la valeur de u sera exprimée par le second membre de l'équation (4), et l'on voit qu'elle contiendra des fonctions périodiques dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au dégré de la fonction F_x par rapport à x. Ajoutons qu'en vertu de l'équation (1) le signe Δ_x se réduira au signe ∂_x, lorsqu'on fait

$$\varepsilon = 0,$$

et que par conséquent la formule (4) réproduira la formule (11) §. II.

§. IV.

En adoptant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, et remplaçant x par le signe $\frac{\partial_x}{\partial_y}$ dans la formule (2) §. II., il vient

$$\left(F_{\frac{\partial_x}{\partial_y}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y}.$$

Soit $\varphi_{x,y}$ une fonction des variables x, y, auxquelles se rapportent les signes ∂_x, ∂_y. On déduit de l'équation précédente

$$\left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}\varphi_{x,y}=\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}R_k\frac{\partial_y}{\partial_x-r_k\partial_y}\varphi_{x,y},$$

et, en vertu des principes établis dans le §. II., cette formule sera mise sous la forme

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}\varphi_{x,y}=\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}R_k\int_{\text{x}}^{x}e^{r_k(x-x')\partial_y}\,\partial_y\,\varphi_{x',y}\,dx',\\+\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}x^h e^{r_k x\partial_y}C_{y,k,h}.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a généralement

$$(2)\qquad e^{a\partial_v}\,\psi_v=\psi_{v+a},$$

et

$$(3)\qquad \partial_{v+a}^{n}\,\psi_{v+a}=\partial_v^{n}\,\psi_{v+a},$$

ce qui change la précédente en

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}\varphi_{x,y}=\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}R_k\int_{\text{x}}^{x}\partial_y\,\varphi_{x',y+r_k(x-x')}\,dx'\\+\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}x^h C_{y+r_k x,k,h},\end{aligned}\right.$$

formule qui fait voir comment l'opération

$$\left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}$$

peut être appliquée a une fonction quelconque de x et y. Posons maintenant

$$(5)\qquad \varphi_{x,y}=\partial_y^{-p}f_{x,y},$$

p étant le degré de F_x par rapport à x. On aura

$$\partial_y\,\varphi_{x',y}=\partial_y^{-(p-1)}f_{x',y},$$

et, en vertu de la formule (20) §. II.,

$$\partial_y\,\varphi_{x',y}=\int_{\text{y}}^{y}\frac{(y-y')^{p-2}}{(p-2)!}f_{x',y'}\,dy'+\sum_{h=0}^{h=p-1}y^h B_h,$$

y étant une valeur particulière de y, et B_h désignant une quantité

indépendante de y, mais du reste arbitraire et fonction de h et x. De plus on tire de la précédente, eu égard à la formule (3),

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_y \varphi_{x', y+r_k(x-x')} = \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dy' \\ \qquad + \sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h B_h . \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $\varphi_{x,y}$ et $\partial_y \varphi_{x', y+r_k(x-x')}$ tirées des équations (5) et (6) dans la formule (4), il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} \left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y} = \\ \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dx'dy' \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h C_{y+r_k x, k, h} + H, \end{cases}$$

la valeur de H étant fournie par l'équation

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h B_h\, dx'.$$

Puis on a

$$[y+r_k(x-x')]^h = \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)}\, y^{h-n}\, r_k^n (x-x')^n ,$$

n étant un nombre entier : donc

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)} y^{h-n} r_k^n (x-x')^n B_h\, dx' ,$$

èquation qu'on peut mettre sous la forme

$$(8)\qquad H = \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)} B_h\, y^{h-n} (x-x')^n N dx' ,$$

ayant fait, pour abréger,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k r_k^n ,$$

ou bien, suivant l'équation (4) §. II.,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^n}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} .$$

Mais, en vertu du théorème V. du Nr. XXXV. T. VII. de ce journal, on a

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^n}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} = 0,$$

pour tout nombre entier et positif n inférieur au degré de la fonction F_x diminué de l'unité. On aura par conséquent

$$N = 0,$$

lorsque n sera un nombre entier et positif inférieur à $p-1$. Or, n est non seulement un nombre entier, mais l'équation (8) fait voir que n représentera un des nombres $0, 1, 2, \ldots h$, et h un des nombres $0, 1, 2, \ldots p-2$, de sorte que n sera toujours inférieur à $p-1$. Donc on aura

$$N = 0,$$

et par suite

$$H = 0;$$

ce qui montre que les fonctions arbitraires B_k comprises dans H disparaîtront de la formule (7), laquelle sera en conséquence

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\left(F\partial_{\frac{x}{\partial_y}}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y} \\ &= \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dx'\, dy \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h\, C_{y+r_k x,k,h}\,. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que lorsque l'équation aux dirivées partielles

$$\partial_y^p\, F\partial_{\frac{x}{\partial_y}}\, u = f_{x,y},$$

dans laquelle $\partial_y^{-p}\, F\partial_{\frac{x}{\partial_y}}$ représente une fonction homogène du degré p par rapport aux caractéristiques ∂_x, ∂_y, sera résolue par rapport à u, il viendra

$$u = \left(F\partial_{\frac{x}{\partial_y}}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y},$$

d'où il suit que la valeur de u sera exprimée par le second

membre de la formule (9). Ajoutons que cette valeur de u comprend des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$n_1+n_2+\ldots+n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. V.

La formule (1) §. IV. n'est qu'un cas particulier de la formule plus générale

$$(1)\qquad \left(F\frac{\partial_x}{\nabla}\right)^{-1}\varphi_{x,y,z,..}=\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}R_k\frac{\nabla}{\partial_x-r_k\nabla}\varphi_{x,y,z,..},$$

∇ étant une fonction des signes $\partial_y, \partial_z, \ldots$, et $\varphi_{x,y,z,\ldots}$ une fonction des variables $x, y, z, \ldots$, auxquelles se rapportent les signes $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \ldots$. Cette formule se déduit de la formule (2) §. II. en substituant le signe $\frac{\partial_x}{\nabla}$ à x et appliquant les opérations à la fonction $\varphi_{x,y,z,..}$. D'après ce qui a été dit dans le §. II. on en déduit

$$(2)\left\{\begin{aligned}\left(F\frac{\partial_x}{\nabla}\right)^{-1}\varphi_{x,y,z,..}=&\sum_{k=1}^{k=m+1}\partial_{r_k}^{n_k-1}R_k\int_x^x e^{r_k(x-x')\nabla}\nabla\,\varphi_{x',y,z}\,dx'\\&+\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=1}^{h=n_k}x^h e^{r_k x\nabla}C,\end{aligned}\right.$$

C étant indépendant de x, mais du reste arbitraire et fonction de $k, h, y, z, \ldots$. Cette formule fera dépendre l'opération

$$\left(F\frac{\partial_x}{\nabla}\right)^{-1}\varphi_{x,y,z\ldots}$$

d'une opération de la forme

$$(3)\qquad e^{\alpha\nabla}f_{y,z,..}\,.$$

Lorsque le signe ∇ représente une fonction du premier degré par rapport aux caractéristiques $\partial_y, \partial_z, \ldots$, soit

$$\alpha\nabla=\alpha\partial_y+\beta\partial_z+\ldots,$$

on aura

$$e^{\alpha\nabla}f_{y,z}=e^{\alpha\partial_y+\beta\partial_z+\ldots}f_{y,z,..}=f_{y+\alpha,z+\beta,\ldots}.$$

Mais le signe ∇ passant le premier degré, il ne sera plus possible d'exprimer l'expression (3) en forme finie. Toutefois, en réduisant en série, on a généralement

$$e^{\alpha} = \sum_{q=0}^{q=s-1} \frac{\alpha^q}{q!} + \alpha^s \int_0^1 \frac{(1-v)^{s-1}}{(s-1)!} e^{v\alpha}\, dv,$$

q étant un nombre entier, et s un nombre entier et positif qu'on peut faire accroître jusqu'à l'infini: d'où il suit

$$(4) \qquad e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots} = \sum_{q=0}^{q=s-1} \frac{\alpha^q \nabla^q}{q!} f_{y,z,\ldots} + S,$$

dans laquelle

$$S = \alpha^s \nabla^s \int_0^1 \frac{(1-v)^{s-1}}{(s-1)!} e^{v\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots}\, dv.$$

On ne saura donc déterminer généralement la valeur de l'opération $e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots}$ pour toute fonction $f_{y,z,\ldots}$ et pour toutes les valeurs qu'on attribue aux variables y, z,.. Mais la fonction $f_{y,z,\ldots}$, étant rationnelle et entière par rapport à y, z,..., ou du moins développable en série convergente pour toute valeur des variables y, z,.., on aura

$$S = 0,$$

lorsqu'on attribue à s une valeur infiniment grande, ce qui change l'équation (4) en

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots} = f_{y,z,\ldots} + \frac{\alpha}{1!} \nabla f_{y,z,\ldots} + \frac{\alpha^2}{2!} \nabla^2 f_{y,z,\ldots} + \ldots,$$

formule qui, jointe à la formule (2), fera connaître la valeur de l'expression

$$\left(\frac{F\partial_x}{\nabla}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,\ldots}.$$

Dans quelques cas on parvient même à déterminer l'expression (3) à l'aide d'intégrales définies. En effet, partant de l'équation

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du,$$

et remplaçant u par $t-\mu$, on en conclut

$$e^{\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{2t\mu}\, dt,$$

en supposant que μ ne soit pas infini, ou bien, en supposant que le produit

$$e^{-t^2} e^{2t\mu}$$

soit nul pour $t = \pm\infty$. Puis on a pareillement

$$e^{\nu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{2u\nu}\, du,$$

et par suite

$$e^{\mu^2}\, e^{\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{2t\mu}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{2u\nu}\, du,$$

ou

$$e^{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} e^{2t\mu}\, e^{2u\nu}\, dt\, du,$$

et ainsi de suite. En posant, pour fixer les idées,

$$\mu = \alpha\partial_y\,, \quad \nu = \beta\partial_z\,,$$

et appliquant les opérations à une fonction de y et z, on tire de la précédente

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z}\, dt\, du,$$

ou

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} f_{y+2\alpha t,\, z+2\beta u}\, dt\, du.$$

Ajoutons toutefois que, d'après ce qu'on vient de dire, cette formule subsistera seulement, lorsque l'expression

$$e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z}\,,$$

ou

$$e^{-(t^2+u^2)} f_{y+2\alpha t,\, z+\beta u}\,,$$

s'évanouira pour $t=\pm\infty$ et $u=\pm\infty$.

XLV.

Ein paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

Die durch Gauss begründete Theorie der complexen Zahlen würde nach unserer Ueberzeugung gewiss eine viel schnellere Anerkennung und Verbreitung gefunden haben, wenn es dem berühmten Geometer gefallen hätte, zugleich recht zahlreiche Anwendungen jener Theorie zu geben, und wir glauben selbst, dass es jetzt noch nicht zu spät sei, solche Anwendungen, so viel sich ihrer darbieten wollen und so einfach sie auch an sich sein mögen, aufzusuchen und bekannt zu machen. Am nächsten liegen die Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, wozu wir bereits Thl. VI. S. 225. des Archivs einen Beitrag zu geben versucht haben; ein paar der einfachsten wollen wir hier noch folgen lassen, indem wir die Voraussetzung machen, dass die Einfachheit der Gegenstände in dem angegebenen Grunde ihre Rechtfertigung finden werde. Vielleicht dürften sie Lehrern zur Benutzung beim Unterricht willkommen sein.

1.

Es sei die Gleichung

$$x^n - a = 0 \qquad (1)$$

gegeben, wo a eine positive, negative oder imaginäre Zahl bedeuten mag, so ist die vollständige Auflösung derselben in der Gleichung

$$x = \sqrt[n]{((a))}$$

enthalten. Denn man construire die Zahl a in der Ebene der complexen Zahlen, und sie nehme daselbst die Gestalt an $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo φ einen zwischen 0 incl. und 2π enthaltenen Winkel darstellt; so wird der Gleichung (1) jeder complexe Werth für x genügen, dessen Modulus, zur Potenz n erhoben, $= \varrho$ und dessen Winkel, n mal gesetzt, entweder φ selbst oder einen um ein Vielfaches von 2π davon verschiedenen Werth liefert, d. h. man wird haben

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

wo für k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null gesetzt werden darf. Dass dieser Ausdruck übrigens nur n von einander verschiedene Werthe darstellt, die in der Ebene der complexen Zahlen gleichförmig vertheilt auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$ liegen, ergibt sich aus der Construction des Ausdrucks unmittelbar.

So entsprechen z. B. der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = 0$ zu setzen ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$x'' = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ *)},$$
$$x''' = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

welche in der Ebene der complexen Zahlen, Taf. VI. Fig. 4., wo AX die positive reelle und AY die positive imaginäre Einheit bezeichnet, durch die Punkte X, B, C dargestellt werden. Diese Werthe wurden erhalten, indem man $k = 0, 1, 2$ setzte; wollte man $k = 3$ etc. annehmen, so würde man nur wieder zu den nämlichen Punkten der Ebene gelangen.

Oder der Gleichung

$$x^3 + 1 = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = \pi$ zu setzen ist, entsprechen die drei Wurzeln:

---

*) Wir verstehen, nach Cauchy, immer die positive Wurzel, wenn wir ein einfaches Wurzelzeichen setzen.

$$x' = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$
$$x'' = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$x''' = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

in Taf. VI. Fig. 5. B, C, D.

Ebenso entsprechen der Gleichung

$$x^3 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}) = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9} = 0{,}9397 + i.0{,}3420,$$
$$x'' = \cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9} = -0{,}7660 + i.0{,}6428,$$
$$x''' = \cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9} = -0{,}1736 - i.0{,}9848;$$

in Taf. IV. Fig. 6. B, C, D. In allen diesen Fällen führt jeder der Bögen XB, XC, XD, wenn man ihn von X aus dreimal auf der Kreisperipherie abträgt, genau wieder zu demjenigen Punkte derselben, der dem Winkel φ der gegebenen Zahl a entspricht, nämlich in Taf. VI. Fig. 4. zu X, in Taf. VI. Fig. 5. zu C, in Taf. VI. Fig. 6. zu M; die Punkte B, C, D selbst aber liegen um je 120 Grade aus einander.

Wenn der Modulus ϱ von a verschieden von Eins ist, so geht die vorstehende Operation in einem Kreise vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$ vor sich, worüber es keines Zusatzes weiter bedarf. Ebenso bedarf es kaum der Erinnerung, dass, wenn die complexe Zahl a in der Form $\alpha + i\beta$ gegeben ist, man ϱ und φ durch die Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

zu bestimmmen hat. Man vergleiche übrigens den schon angeführten Artikel Thl. VI. S. 225. des Archivs, besonders §. 3. u. §. 4.

2.

Es sei ferner die Gleichung

$$x^3 + qx + r = 0 \tag{2}$$

gegeben, so werden bekanntlich ihre Wurzeln nach der Cardanischen Regel durch die Gleichung

$$x = y + z$$

gegeben, wo y und z an die Bedingungen gebunden sind:

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}, \quad z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},$$

$$yz = -\frac{q}{3};$$

von welchen drei Bedingungsgleichungen die letzte nur aussagt, dass das Product der zusammengehörigen Werthe von y und z reell sein müsse, wenn nämlich, wie wir hier annehmen wollen, die Coefficienten der Gleichung (2) gleichfalls reell sind.

Die Werthe von y^3 und z^3 werden reell oder imaginär, je nachdem

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \geqq -\left(\frac{r}{2}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{q}{3}\right)^3 < -\left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

die beiden ersten von jenen Bedingungsgleichungen reduciren sich demnach im ersten Falle auf die Formen

$$y^3 = A, \quad z^3 = B;$$

im zweiten Falle auf die Formen

$$y^3 = A + iB, \quad z^3 = A - iB.$$

In beiden Fällen lässt sich demnach die Aufsuchung der drei Werthe, deren sowohl y als z fähig ist, immer nach der vorhin angegebenen Behandlung der Gleichung (1) leisten, und es tritt mithin der sogenannte Casus irreducibilis hier nicht in den Rang eines Ausnahmefalls, sondern es wird ihm im Geiste der Theorie der complexen Zahlen genau die nämliche Behandlung zu Theil, wie jedem andern in der Cardanischen Formel enthaltenen Falle.

Statt die bekannten allgemeinen Formeln zu entwickeln, die uns keine bestimmten Constructionen gestatten würden, ziehen wir es vor, die Sache an numerischen Beispielen zu erläutern.

Es sei 1) gegeben:

$$x^3 - 18x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{-180}, \quad z^3 = -6 - \sqrt{-180},$$
$$= -6 + i.13{,}416, \quad = -6 - i.13{,}416;$$

welche beiden complexen Werthe in Taf. VI. Fig. 7. construirt sind, wo AX die Richtung der positiven reellen und AY die Richtung der positiven imaginären Zahlen bezeichnet; $AB = -6$, $BC = i.13{,}416$, $BD = -i, 13{,}416$. Um von hieraus zu den Formen

$$y^3 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad z^3 = \varrho'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

überzugehen, hat man

$$\varrho = \varrho' = \sqrt{6^2 + 13{,}416^2} = 14{,}696;$$

$$\cos\varphi = -\frac{6}{14{,}696},\ \sin\varphi = \frac{13{,}416}{14{,}696},\ \varphi = 114^\circ\,5'\,42'';$$

$$\cos\varphi' = -\frac{6}{14{,}696},\ \sin\varphi' = -\frac{13{,}416}{14{,}696},\ \varphi' = 245^\circ\,54'\,18'';$$

welche Grössen gleichfalls in der Figur sichtbar sind, nämlich $AC = \varrho$, $XAC = \varphi$, $AD = \varrho'$, $XAD = \varphi'$.

Die Werthe von y und z selbst finden sich nun nach Anleitung der oben gegebenen Auflösung der Gleichung (1). Man construirt aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AE = \varrho^{\frac{1}{3}} = 2{,}449$ einen Kreis und schneidet auf dessen Peripherie von E aus sowohl von EF ein Drittel $= EL$, als auch von EG ein Drittel $= EL'$ ab; alsdann geben die Punkte L und L' resp. zwei Werthe y' und z' von y und z; und geht man von diesen Punkten um je 120° und 240° weiter, so erhält man die beiden andern Werthe von y so wie von z, nämlich y'' und y''' in M und N, und z'' und z''' in M' und N'. Diese sechs Punkte liegen, wovon man sich leicht überzeugen kann, symmetrisch zu beiden Seiten der Achse AX; nämlich es entsprechen einander L und N', M und M', N und L'.

Um endlich x zu finden, hat man diejenigen Werthe von y und z zusammen zu suchen, deren Product reell ist. Aber zwei imaginäre Zahlen geben nur dann ein reelles Product, wenn die Summe ihrer Winkelzahlen Null oder ein beliebiges Vielfaches von π ausmacht *); folglich lehrt ein Blick auf die Figur, dass man x zusammenzusetzen habe

entweder aus L und N', $x' = y' + z'''$;
oder aus M und M', $x'' = y'' + z''$;
oder aus N und L', $x''' = y''' + z'$.

Folglich hat man unmittelbar in Betracht der symmetrischen Lage jener Punkte

---

*) Man kann dies analytisch beweisen, indem das Product

$$\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.\,\varrho'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \varrho\varrho'\,(\cos\overline{\varphi + \varphi'} + i\sin\overline{\varphi + \varphi'})$$

nur dann reell wird, wenn $\sin\overline{\varphi + \varphi'} = 0$ ist. Aber auch auf geometrischem Wege ergibt es sich leicht, indem die mit dem einen Factor nach Vorschrift des andern Factors vorzunehmende Drehung genau in die Achse der reellen Zahlen überführen muss.

$$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi}{3} = 2.2{,}449.\cos 38^\circ 1' 54'' = 3{,}8587,$$

$$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} = 2.2{,}449.\cos 158^\circ 1' 54'' = -4{,}5433,$$

$$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} = 2.2{,}449.\cos 278^\circ 1' 54'' = 0{,}6845.$$

Es sei 2) gegeben

$$x^3 + 18x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{252}, \quad z^3 = -6 - \sqrt{252},$$
$$= 9{,}874 \qquad\qquad = -21{,}874;$$

welche beiden reellen Werthe durch die Punkte B und C, Taf. VI. Fig. 8., der Achse der reellen Zahlen dargestellt werden mögen, indem $AB = 9{,}874$ und $AC = -21{,}874$. Will man dieselben unter den Formen

$$y^3 = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad z^3 = \varrho'(\cos\varphi' + i \sin\varphi')$$

darstellen, so hat man zu setzen

$$\varrho = 9{,}874, \quad \varrho' = 21{,}874;$$
$$\varphi = 0, \qquad \varphi = \pi.$$

Die Werthe von y finden sich nun nach dem Obigen, indem man aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AD = \varrho^{\frac{1}{3}} = 2{,}1453$ einen Kreis construirt und diesen von D aus in drei gleiche Theile theilt; die Theilpunkte D, E, F entsprechen alsdann den drei Werthen y', y'', y''' von y.

Ebenso finden sich die Werthe von z, wenn man gleichfalls aus A einen Kreis mit dem Halbmesser $AG = \varrho'^{\frac{1}{3}} = 2{,}7967$ construirt und diesen von H aus in drei gleiche Theile theilt; hier entsprechen die Theilpunkte J, H, K den drei Werthen z', z'', z''' von z.

Die zusammengehörigen Werthe von y und z, deren Summe x ausmacht, sind hier wieder durch die Bedingung charakterisirt, dass ihr Product reell sein soll. Mit Rücksicht darauf, dass nach dem Obigen in diesem Falle die Summe der Winkelzahlen von y und z Null oder ein Vielfaches von π betragen muss, ist also x zusammenzusetzen

entweder aus D und H, $x' = y' + z''$;
oder aus E und J, $x'' = y'' + z'$;
oder aus F und K, $x''' = y''' + z'''$;

folglich erhält man unmittelbar aus der Figur

$$x' = \varrho^{\frac{1}{3}} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos\pi = -0{,}6514,$$

$$x'' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin\frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 + i\,.\,4{,}2799,$$

$$x''' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos\frac{5\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin\frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin\frac{5\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 - i\,.\,4{,}2799.$$

Welche Abkürzungen sich bei dieser Rechnung anbringen lassen, und wie sich daran eine allgemeine Behandlung der Cardanischen Regel knüpfen lässt, das ist ohne Mühe klar. Bemerken wollen wir nur noch, dass, so wie in der symmetrischen Lage der Werthe von y gegen die von z in Taf. VI. Fig. 7. der Grund zu erkennen ist, wesshalb bei der Addition die rein imaginären Theile verschwanden und alle drei Werthe von x reell wurden, ebenso in der Verletzung dieser Symmetrie in Taf. VI. Fig. 8. der Grund gesucht werden muss, wesshalb hier die imaginären Theile in zwei Fällen stehen bleiben und nur Ein reeller Werth von x erscheint. Wenn die beiden Kreise in Taf. VI. Fig. 8. einander decken, während alles übrige ungeändert bleibt, d. h. wenn $y^3 = -z^3$, so tritt eine symmetrische Lage jener Werthe gegen die Achse AY ein, und es verschwinden mithin aus den Werthen von x die reellen Theile; doch ist dieser Fall der stillschweigenden Voraussetzung entgegen, dass $r \gtrless 0$ sein soll.

3.

Man hat eine Formel, vermittelst deren man die Quadratwurzel aus einer complexen Zahl $a+ib$ auf algebraischem Wege findet, nämlich

$$\sqrt{(a+ib)} = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)\right)} + i\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)\right)}. \qquad (3)$$

Diese Formel finden wir durch geometrische Betrachtung wie folgt.

Wir übertragen die complexe Zahl $a+ib$ auf die Form $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, indem wir setzen

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

so werden nach Vorschrift der Gleichung (1) die beiden Werthe von $\sqrt{((a+ib))}$ dargestellt durch

$$\varrho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ und } \varrho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\overline{\frac{\varphi}{2}+\pi} + i\sin\overline{\frac{\varphi}{2}+\pi}\right),$$

welche in den einen Ausdruck

$$\sqrt{((a+ib))} = \pm\, \varrho^{\frac{1}{2}} (\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2})$$

zusammengefasst werden können. Hierin sind nur für $\cos\frac{\varphi}{2}$ und $\sin\frac{\varphi}{2}$ die bekannten Ausdrücke durch $\cos\varphi$ an die Stelle zu setzen, um zu der Gleichung (3) zu gelangen. Man hat

$$2 \cos(\frac{\varphi}{2})^2 = 1 + \cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\varrho \cos(\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},$$

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{((\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}))};$$

$$2 \sin(\frac{\varphi}{2})^2 = 1 - \cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\varrho \sin(\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{((\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}))};$$

und durch Substitution dieser beiden Werthe für $\varrho^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}$ und $\varrho^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}$ entsteht unmittelbar die obige Formel. Man überzeugt sich auch leicht, dass trotz der mehrfachen doppelten Zeichen, welche durch die Rechnung hineingekommen sind, die Formel (3) dennoch nur zwei Werthe enthält; denn die beiden Theile auf der rechten Seite der Gleichung (3) müssen einerlei oder verschiedene Zeichen besitzen, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Wollte man eine ähnliche algebraische Formel für Cubikwurzelausziehung haben, so würde man setzen

$$\sqrt[3]{((a+ib))} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi}{3} + i \sin\frac{\varphi}{3}),$$

$$\text{und} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i \sin\frac{\varphi+2\pi}{3}),$$

$$\text{und} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i \sin\frac{\varphi+4\pi}{3});$$

und hier würde es nothwendig werden, für $\cos\frac{\varphi}{3}$ und $\sin\frac{\varphi}{3}$ Ausdrücke durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ an die Stelle zu setzen. Aber

solche Ausdrücke existiren nicht; denn die Auflösung der bekannten Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{4}\sin\varphi = 0$$

liefert nach der Cardanischen Regel

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{((\cos\varphi + i\sin\varphi))} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{((\cos\varphi - i\sin\varphi))},$$

$$\sin\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2i}\sqrt[3]{((\cos\varphi + i\sin\varphi))} - \frac{1}{2i}\sqrt[3]{((\cos\varphi - i\sin\varphi))};$$

und diese Ausdrücke fordern genau wieder die Auflösung desjenigen Problems, von dessen Lösung wir ausgegangen sind, so dass wir uns im Cirkel bewegt haben.

Aber man erkennt leicht, dass diese Schwierigkeit mit jener andern zusammenhängt, dass man nicht im Stande ist, durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen; — denn wäre eine Construction zu diesem Zwecke vorhanden, so brauchte man ihr nur mit der Rechnung zu folgen, um auch für jenen Fall die gesuchte Formel zu erhalten; — und es zeigt sich somit, wie die Unauflösbarkeit des berühmten Problems von der Trisectio anguli unmittelbar die Unausführbarkeit der algebraischen Cubikwurzelausziehung aus complexen Zahlen zur Folge hat, ja mit ihr bei unserer geometrischen Auffassung der complexen Zahlen eines und dasselbe ist.

XLVI.

Ueber die geometrische Darstellung complexer Functionen.

Von dem
Herrn Doctor T. Wittstein
zu Hannover.

1.

Wenn man sich von dem Laufe einer Function $y=f(x)$, wo y und x nur reeller Werthe fähig sind, ein anschauliches Bild entwerfen will, so pflegt man in einer Ebene die Werthe von x und y als rechtwinklige Abscissen und Ordinaten zu construiren und die Endpunkte dieser letzteren durch einen Zug zu verbinden, der sodann die geometrische Darstellung jener Function abgiebt. Diese Veranschaulichung hört aber auf anwendbar zu sein, sobald für x und y auch imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, und so pflegt man z. B. überall, wo für gewisse reelle Werthe von x die Werthe von y ins Imaginäre fallen, die betreffende Curve als geschlossen anzusehen und darüber hinaus von einer geometrischen Darstellung der gegebenen Function nicht weiter zu reden. So schätzbar nun aber — und zwar nicht für Lernende allein — selbst zur Lösung rein analytischer Fragen jenes geometrische Hülfsmittel ist, eben so wichtig wird die Frage, ob und wie dasselbe auch auf imaginäre Functionen Ausdehnung finden könne: eine Frage, welche in der von Gauss gegebenen Möglichkeit, imaginären Zahlen eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, eine befriedigende Antwort zu versprechen scheint. Wir wollen nachstehend einige Untersuchungen darüber anstellen, wie weit man hierin gelangen kann, und welche Anwendungen sich daraus sowohl für die analytische Geometrie, als auch rückwärts für die Theorie der complexen Zahlen ziehen lassen.

2.

Wollte man unter der Voraussetzung, dass sowohl für x als auch für y imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, allgemein

die Aufgabe stellen, die Function $y=f(x)$ nach Analogie der reellen Functionen geometrisch zu construiren, so ist nicht schwer zu übersehen, dass dieser Aufgabe in ihrem vollen Umfange nicht Genüge geleistet werden kann Denn offenbar würde man als Analogon der Abscissen-Achse in der Ebene, hier die Ebene der complexen Zahlen — gleichsam eine Abscissen-Ebene — anzusehen haben, als Analogon der Ordinaten-Achse aber eine mit jener rechtwinklig verbundene zweite Ebene der complexen Zahlen, — eine Ordinaten-Ebene, — zu welcher sodann durch den Endpunkt einer jeden Abscisse eine Parallele gelegt werden könnte, die zu dem festzulegenden Punkte hinführte. Welche Lage man nun auch der Ordinaten-Ebene geben wollte, so würde dennoch immer zwar zu jedem complexen Coordinatenpaar ein bestimmter Punkt des Raumes, aber nicht umgekehrt zu jedem Punkte des Raumes ein bestimmtes Paar, sondern eine unendliche Menge von Paaren complexer Coordinaten gehören; und damit ist die Unzulänglichkeit dieser geometrischen Versinnlichung hinreichend dargethan. Wenn man nun die Ueberlegung macht, dass zwei complexe Coordinaten jederzeit vier von einander unabhängige reelle Grössen enthalten, während deren drei schon zur Festlegung eines Punktes im Raume hinreichen, so liegt der Schluss nahe, dass erst in einem Raume von vier Dimensionen ausführbar sein würde, was uns der thatsächlich vorhandene Raum von drei Dimensionen versagt.

Aber die genannte Unausführbarkeit zieht noch eine andere Folge nach sich. Nimmt man nämlich für den Augenblick einen Raum von vier Dimensionen als zulässig an, so kann man in demselben ebenso, wie in der Ebene die beiden reellen Coordinaten x und y durch die einzige complexe Zahl

$$x+iy$$

dargestellt werden, auch die beiden complexen Coordinaten $x=x'+ix''$ und $y=y'+iy''$ in die eine — wir möchten sagen hypercomplexe Zahl zusammenfassen

$$x'+ix''+j(y'+iy''),$$

wo $j^2=i^2=-1$ sein muss, indem j eine neue imaginäre Einheit bezeichnet, die den rechtwinkligen Uebergang aus der complexen Abscisse in die complexe Ordinate zu vermitteln hat. Dieses findet eine merkwürdige Bestätigung durch eine Untersuchung von Hamilton*). Derselbe stellt nämlich, um aus der Ebene der complexen Zahlen in den Raum überzugehen, hypothetisch die dreitheilige Form auf

$$a+ib+jc,$$

als deren Modulus die positive Quadratwurzel aus $a^2+b^2+c^2$ anzusehen ist, und gelangt durch arithmetische Operationen an

*) S. d. Abhandlung: „On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra. By Sir W. R. Hamilton" in dem Philosophical Magazine für 1844 und 1845, wo dieselbe bis jetzt noch nicht geschlossen ist.

dieser Form, und mit Festhaltung des Gesetzes, dass der Modulus eines Products gleich dem Producte der Moduli der Factoren sein müsse, zu dem Resultate, dass jedes Product sich unter der viertheiligen Form

$$a + ib + jc + kd$$

darstelle, wo man $ij = -ji = k$ und $k^2 = -1$ zu setzen und die positive Quadratwurzel aus $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ als Modulus derselben anzusehen habe. Das Rechnen mit diesen viertheiligen Formen (Quaternions) liefert aber wieder nur viertheilige Formen, deren Entwickelung den Gegenstand der angeführten Abhandlung ausmacht, und damit scheint in der That unsere oben aufgestellte Form einer hypercomplexen Zahl, als nächster Fortschritt von der complexen Zahl aus, so wie die Forderung eines Raumes von vier Dimensionen zur Ausführung der Operationen an diesen Zahlen, vollkommen gerechtfertigt zu sein.

3.

Aus dem Vorstehenden lässt sich ohne Mühe der Schluss ziehen, dass der Raum von drei Dimensionen in allen denjenigen Fällen zur geometrischen Construction der Function $y = f(x)$ hinreichend sein muss, wo entweder nur x, oder nur y imaginäre Werthe annehmen kann, während die andere Veränderliche reell bleibt.

Es sei erstens nur x imaginärer Werthe fähig, so wird man die Ebene der complexen Zahlen als Ebene der x, und eine im Nullpunkte derselben errichtete unbegränzte Normale als Achse der y anzusehen haben. Jedem complexen Werthe von x gehört sodann vermöge der Gleichung $y = f(x)$ ein bestimmter Punkt des Raumes zu, und umgekehrt, und das Continuum aller dieser Punkte von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ bildet eine Fläche, welche mithin das geometrische Bild der gegebenen Function darstellt.

Es sei zweitens nur y imaginärer Werthe fähig, so wird eine beliebige im Raume gezogene Gerade die Achse der x, und eine im Nullpunkte derselben normal damit verbundene Ebene der complexen Zahlen die Ebene der y abgeben. Hier gehört jedem reellen Werthe von x ein bestimmter Punkt des Raumes zu, und umgekehrt, und das Continuum aller der Function $y = f(x)$ entsprechenden Punkte von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ bildet eine Linie, welche als das geometrische Bild der gegebenen Function anzusehen sein wird.

Setzt man im ersten Falle $x = x' + ix''$, so dass mithin die Achse der x' als Achse der reellen Zahlen und die Achse der x'' als Achse der imaginären Zahlen in der Ebene der x betrachtet wird, so hat man

$$y = f(x' + ix'')$$

oder, wie man im Geiste der analytischen Geometrie schreiben würde,

$$y = F(x', x'')$$

als Gleichung der resultirenden Fläche

Setzt man ebenso im zweiten Falle $y = y' + iy''$ und zerfällt $f(x)$ in die beiden Theile $\varphi(x) + i\psi(x)$, so sind gleichfalls im Geiste der analytischen Geometrie

$$y' = \varphi(x), \quad y'' = \psi(x)$$

die beiden Gleichungen der entstehenden Linie.

4.

Es liegt auf der Hand, dass die beiden angegebenen Constructionsmethoden auch dann noch anwendbar bleiben, wenn für beide veränderliche x und y imaginäre Werthe zugelassen werden, aber zugleich eines von den vier Bestimmungsstücken dieser beiden complexen Werthe in der Construction unbeachtet bleiben darf. Mit Hülfe dieser Bemerkung sind wir im Stande, die Mehrzahl der bis jezt gegebenen Beweise des Satzes:

> dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann,

an dem Faden der genannten Constructionsmethoden systematisch zu reproduciren.

Es sei die Function $y = f(x)$ von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \ldots + a_n,$$

und man erhalte durch die Substitution

$$x = p + iq = r(\cos t + i \sin t)$$

das Resultat

$$y = P + iQ = R(\cos T + i \sin T),$$

so ist zu beweisen, dass man durch schickliche Wahl von x zu dem Resultate $y = 0$, d. h. entweder

$$R = 0,$$

wobei T jeden beliebigen Werth haben kann, oder gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gelangen könne.

Beweis von Cauchy *).

Am nächsten dürfte es liegen, da in dem geforderten Endresultate der Werth von T gleichgültig ist, die Grösse

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

als Function von x zu construiren, wobei nach der ersten der obigen Constructionsmethoden zu verfahren sein würde. Die entstehende Fläche liegt, da R nur positiv ist, vollständig auf Einer Seite der Ebene der x; ferner, wenn x über eine gewisse Grösse hinaus wächst, so entfernt sie sich immer weiter von der Ebene der x; folglich muss sie in der Nähe des Nullpunkts dieser Ebene nothwendig wenigstens Ein Minimum besitzen.

Dass nun dieses Minimum nicht von Null verschieden sei, wird von Cauchy auf rein analytischem Wege gezeigt. Wie man zu demselben Resultate auch durch eine geometrische Betrachtung gelangen könne, bei welcher der bis dahin vernachlässigte Werth von T wieder in die Construction hineingezogen wird, haben wir in einem früheren Artikel zu zeigen gesucht; doch gehört diese Betrachtung im Grunde nicht hieher, weil sie das bisherige geometrische Bild verlässt, und findet besser weiter unten ihren Platz.

Dritter Beweis von Gauss **).

Nicht so unmittelbar scheint es sich darzubieten, die Grösse

$$T = \operatorname{arc} tg\left(\left(\frac{Q}{P}\right)\right)$$

als Function von x nach der ersten Methode zu construiren, welche Grösse nämlich für den in Frage stehenden Fall durch die Bedingung charakterisirt wird, dass sie eines jeden beliebigen (reellen) Werthes muss fähig sein. Im Allgemeinen ist T eine vielförmige Function von x, der für jeden Werth des x unendlich viele um je π von einander verschiedene Werthe zukommen; folglich entsprechen im Allgemeinen jeder complexen Abscisse unendlich viele um je π von einander verschiedene Ordinaten, und die resultirende Fläche besteht demnach aus einem Systeme über einander liegender Schichten, die um einen Abstand von je π, diesen im Sinne der Ordinaten gemessen, von einander entfernt sind. Nur für solche Werthe von x, welche $f(x)=0$ machen, muss nach dem oben Gesagten die ganze Ordinate in die Fläche hineinfallen; von welcher eigenthümlichen Beschaffenheit der Fläche man sich etwa dadurch ein Bild machen kann, dass man sie mit einer Schraubenfläche vergleicht, welche sich um jene Ordinate wie um eine Spindel herumwindet; oder auch so, dass jede einzelne Schicht

*) Analyse algébrique. Chap. X.

**) Commentationes soc. reg. Gotting. recentiores. Tom. III.

der Fläche an dieser Stelle das Ansehen eines Wasserwirbels oder Wasserstrudels erhält. Die Existenz solcher Stellen der Fläche wären also nachzuweisen.

Zum Behufe dieser Nachweisung führt Gauss die genannte Eigenthümlichkeit auf die analytische Thatsache zurück, dass an den betreffenden Stellen die Grösse

$$V = \frac{\partial^2 T}{\partial r . \partial t}$$

unendlich gross wird, und beweist nun, dass, wenn man für r einen hinlänglich grossen Werth r_0 an die Stelle setzt, die Gleichung

$$\int_0^{r_0} \partial r \int_0^{2\pi} V \partial t = \int_0^{2\pi} \partial t \int_0^{r_0} V \partial r$$

aufhört richtig zu bleiben, dass mithin V innerhalb der Gränzen der Integration eine Unterbrechung der Continuität erleiden muss, welche sodann unmittelbar die verlangte Folge nach sich zieht.

Erster Beweis von Gauss *).

Zieht man statt R und T, welche in den beiden vorhergehenden Beweisen betrachtet wurden, die beiden Grössen P und Q in Betracht, und construirt dieselben als Functionen von x gleichfalls nach der ersten der in §. 3. angegebenen Constructionsmethoden, so erhält man zwei Flächen, von denen leicht nachgewiesen werden kann, dass sie beide die Ebene der x schneiden.

Die Gleichungen der beiden Durchschnittscurven sind

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

und es kommt mithin jetzt noch darauf an zu zeigen, dass beide Curven auch einander schneiden müssen, damit man gleichzeitig habe $P = 0$ und $Q = 0$. Dazu führt aber eine specielle Betrachtung der beiden Curven selbst, wie sie Gauss a. a. O. anstellt

Beweis von Deahna **).

Um die complexe Zahl y nach der zweiten Constructionsmethode des §. 3. in einer Ebene für sich dargestellt zu erhalten, dürfte der einzige brauchbare Weg darin bestehen, dass man die Achse der x als Achse der r ansieht und zugleich für jeden Werth von r den Winkel t (der in der Construction nicht sichtbar wird) alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Alsdann erhält man als geometrisches Bild der gegebenen Function nicht eine Linie,

---

*) Demonstratio nova Theorematis etc. Helmstadii. 1799.

**) Crelle's Journal. 20. Band. S. 337.

wie in §. 3., sondern jedem einzelnen Werthe von r entspricht schon in der zugehörigen Ordinaten-Ebene eine geschlossene Curve, deren Radius vector $= R$ und Elongation $= T$ ist, und das Continuum aller dieser Curven von $r=0$ bis $r=\infty$ bildet eine krumme Fläche, die eine Art von kegelförmigem Raum umschliesst. Dieser Raum ist im Sinne der wachsenden r offen, und läuft mit $r=0$ in einen Punkt aus, dessen Lage auf der Ebene der y durch das letzte Glied a_n der Gleichung $f(x)=0$ festgestellt wird.

Der in Frage stehende Beweis verlangt nun die Nachweisung, dass die entstandene Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, und dieses wird nachgewiesen sein, sobald sich zwei zur Achse der r normale Schnitte jener Fläche angeben lassen, von denen der eine ganz ausserhalb der Achse liegt, der andere aber diese Achse umschliesst. Als den einen Schnitt kann man aber die Spitze der kegelförmigen Fläche für $r=0$ ansehen, welche niemals mit der Achse zusammenfallen kann; und den andern weist Deahna dadurch nach, dass für ein hinlänglich grosses r der Werth von $\frac{\partial T}{\partial t}$ stets positiv bleibt, mithin T zugleich mit t wächst, und folglich, während t von 0 bis 2π sich ändert, T gleichfalls das nämliche Intervall durchlaufen muss.

Der hier angegebenen Form des Beweises können wir sogleich noch eine andere Fassung desselben zur Seite stellen, durch welche wir wieder auf den Beweis von Cauchy zurückgeführt werden. Um nämlich zu zeigen, dass die genannte Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, nehmen wir willkürlich einen ausser der Achse liegenden Punkt in jener Fläche an; und können wir nun nachweisen, dass, wie auch dieser Punkt gewählt sein mag, man immer einen zweiten Punkt jener Fläche angeben kann, der der Achse näher liegt, so ist gleichfalls der in Rede stehende Satz bewiesen. Diese Nachweisung haben wir aber auf geometrischem Wege Th. VI. Nr. XXXV. des Archivs geliefert, indem unsere dortige Ebene der complexen Zahlen als identisch mit der jetzigen Ebene der y angesehen werden kann, nachdem auf diese die beiden betrachteten Punkte der krummen Fläche projicirt worden sind.

Die Reihe dieser Beweise scheint uns, so weit die geometrische Darstellung der Sache in Betracht gezogen wird, ein vollständig in sich abgeschlossenes Ganzes zu bilden, wovon wir namentlich das als Beweis anführen möchten, dass wir in der That den Beweis von Deahna auf dem oben angegebenen Wege selbstständig gefunden und erst hinterher uns überzeugt haben, dass dieser Beweis im Wesentlichen nicht neu war.

5.

Die analytische Geometrie beschäftigt sich in ihrem planimetrischen Theile mit Linien in der Ebene, und in ihrem stereometrischen Theile mit Linien im Raume und mit Flächen; sie drückt jede Linie in der Ebene durch eine Gleichung zwischen zwei

Veränderlichen aus, jede Linie im Raume durch zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen, jede Fläche endlich durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen. Gestützt auf die in §. 3. entwickelten Constructionsmethoden sind wir aber jetzt im Stande, in jenen drei Fällen die betreffende Linie oder Fläche immer durch Eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen

$$y = f(x)$$

darzustellen, und zwar bedeutet diese Gleichung entweder eine Linie in der Ebene, oder eine Linie im Raume, oder eine Fläche, jenachdem x und y reell sind, oder nur x, oder nur y reell ist.

Was zunächst die analytische Möglichkeit der beiden letzten Fälle betrifft, so wird die Linie im Raume offenbar nur dadurch zu Stande kommen können, dass die Function $f(x)$ entweder complexe Constanten in sich schliesst, oder Operationen angezeigt enthält, deren Resultate gleichfalls complexe Zahlen sind. So ist z. B.

$$y = ax + b,$$

wenn a und b complexe Zahlen sind, aber x nur reeller Werthe fähig sein soll, die allgemeine Gleichung einer geraden Linie im Raume; und ebenso ist

$$y = \sqrt[3]{((ax^2))},$$

wo a reell sein mag oder nicht, die Gleichung eines Systems von drei congruenten ebenen Curven, deren Ebenen einander in der Achse der x unter Winkeln von 120° schneiden.

Eine Fläche dagegen würde dadurch entstehen müssen, dass die Function $f(x)$ mit der complexen Veränderlichen x nur solche Operationen vorzunehmen forderte, welche stets ein reelles Resultat geben. Dies lässt sich aber durch keine der bekannten Operationen allgemein leisten, weil jede Operation an einer complexen Zahl im Allgemeinen wieder eine complexe Zahl liefert; es wird jederzeit nur eine gewisse Gruppe complexer Werthe für x angegeben werden können, für welche $f(x)$ reell wird; und da diese Werthe von x in der Ebene der x im Allgemeinen eine Linie bilden werden, so stellt in dieser Beschränkung die Gleichung $y = f(x)$ auch nur eine Linie im Raume dar. Man durfte in der That kein anderes Ergebniss erwarten, da diese Auffassung der Linie im Raume sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass die Coordinaten vertauscht sind.

Es sei z. B.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ &= (a' + ia'')(x' + ix'') + b' + ib'', \end{aligned}$$

so hat man, damit y reell werde, die Bedingungsgleichung

$$a' x'' + a'' x' + b'' = 0,$$

und sodann

$$y = a' x' - a'' x'' + b',$$

welche beiden Gleichungen zwischen den drei reellen Veränderlichen x', x'', y eine gerade Linie im Raume darstellen. Wollte man aber die gegebene Gleichung für x auflösen, so würde man haben

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-b}{a} \\ &= \frac{y-b'-ib''}{a'+ia''} \\ &= \frac{(y-b')a'-a''b''}{a'^2+a''^2} - i\,\frac{(y-b')a''+a'b''}{a'^2+a''^2}, \end{aligned}$$

folglich, indem man $x = x' + ix''$ setzt,

$$x' = \frac{(y-b')a'-a''b''}{a'^2+a''^2},$$
$$x'' = \frac{(y-b')a''+a'b''}{a'^2+a''^2}$$

als die beiden Gleichungen der geraden Linie im Raume, welche, wie sich leicht nachweisen lässt, mit den beiden zuerst gefundenen Gleichungen zwischen x', x'', y identisch sind.

Wir können hieraus allgemein den Schluss ziehen, dass jede Gleichung zwischen einer reellen und einer complexen Veränderlichen

$$F(x, y) = 0$$

stets eine Linie im Raume bedeutet, und zwar stets die nämliche Linie, man mag y als Function von x ansehen oder umgekehrt; sobald nur bestimmt angegeben ist, welche der beiden Veränderlichen reell und welche imaginär sein soll. Eine Vertauschung in dieser letzteren Beziehung wird im Allgemeinen eine andere Linie hervorbringen. Am bequemsten aber bleibt es in allen Fällen, die imaginäre Veränderliche als Function der reellen aufzufassen und zu construiren, wie wir es anfangs gethan haben, weil man alsdann in einer einzigen Gleichung ausgesprochen erhält, wozu man sonst deren zwei nöthig haben würde.

Was nun aber die bis hierher noch unerledigte Frage nach der Gleichung einer Fläche betrifft, welche für jeden complexen Werth, den man dem x beilegen mag, stets nur einen reellen Werth für $y = f(x)$ hervortreten lassen soll, so gelangt man zu derselben nur durch Einführung einer neuen Art von Function, welche eben durch die hier geforderte Eigenschaft charakterisirt

wird. Die Grundformen dieser Functionen sind schon in §. 4. bei den dort construirten Flächen in Anwendung gekommen; es sind folgende vier:

$$y = \text{Mod.}\ x\,,$$
$$y = \text{Arc.}\ x,$$
$$y = \text{Coëff. real.}\ x,$$
$$y = \text{Coëff. imag.}\ x\ ^{*});$$

welche dadurch complicirter werden können, dass man statt x eine beliebige complexe Function von x und statt y eine beliebige reelle Function von y an die Stelle setzt. So würde z. B. die allgemeine Gleichung der Ebene durch

$$y = \text{Coëff. real.}\ (ax + b)$$

dargestellt werden können, wo a und b allgemein complexe Zahlen bezeichnen; denn diese Gleichung löst sich auf in

$$\begin{aligned} y &= \text{Coëff. real.}\ \{(a' + ia'')(x' + ix'') + b' + ib''\} \\ &= a'x' - a''x'' + b'', \end{aligned}$$

welches die gewöhnliche Form dieser Gleichung ist.

Hiernach können wir also allgemein sagen, dass, **obgleich eine Gleichung zwischen zwei complexen Veränderlichen**

$$F(x, y) = 0$$

an und für sich einer geometrischen Deutung nicht fähig ist, dennoch, wenn man sie für eine der Veränderlichen auflöst, und statt dieser complexen Veränderlichen nur einen ihrer reellen Bestandtheile in Betracht nimmt, die Gleichung stets eine Fläche bedeute: jedoch im Allgemeinen eine verschiedene Fläche, jenachdem man die eine oder die andere Veränderliche als abhängige Veränderliche ansieht.

6.

Gestützt auf die hier entwickelten Grundgesetze ergiebt sich nun eine neue und höchst eigenthümliche Behandlung der Objecte der analytischen Geometrie, welche nicht nur der bisherigen analytischen Geometrie vollkommen parallel läuft, sondern auch in mehr als einer Hinsicht durch Einfachheit und Eleganz ihrer Ent-

---

*) Es sei $x = x' + i\,x'' = \varrho\,(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$, so ist Mod. $x = \varrho$, Arc. $x = \varphi$, Coëff. real. $x = x'$, Coëff. imag. $x = x''$. Wir haben diese Bezeichnungen ihrer leichten Verständlichkeit wegen gewählt, obgleich sie sich wenig durch Einfachheit auszeichnen.

wickelungen solche Vorzüge besitzt, dass wir hoffen dürfen, sie bald in den Unterricht und die betreffenden Lehrbücher aufgenommen zu sehen.

Untersuchen wir, um an einem einfachen Beispiele den Geist dieser neuen Behandlung anschaulich zu machen, die Bedeutung einer Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei Veränderlichen

$$Ay + Bx + C = 0,$$

so können 1) für reelle Werthe der Coefficienten A, B, C auch die Veränderlichen x und y im einfachsten Falle nur reeller Werthe fähig sein, und die Gleichung stellt in diesem Falle eine gerade Linie in der Ebene xy dar, wie bekannt.

Werden dagegen 2) für A, B, C auch complexe Werthe zugelassen, so kann die Gleichung nur bestehen, wenn von den beiden Veränderlichen x und y mindestens die eine gleichfalls complexe Werthe annehmen darf. Es sei y diese Veränderliche, so findet man durch Auflösung für y

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

wofür man zur Abkürzung schreiben kann

$$y = ax + b,$$

wo a und b im Allgemeinen wieder complexe Zahlen sind. Zur Construction dieser Gleichung legen wir nun eine Achse der x und eine Ebene der y zum Grunde; dass die Gleichung alsdann aber eine gerade Linie im Raume darstellt, lässt sich genau eben so zeigen, wie man es in der Ebene zu thun pflegt.

Es ist nämlich der Quotient $\frac{y-b}{x} = a$, also constant; folglich bezeichnet

$$y - b = ax,$$

wo für den Augenblick $y-b$ als Ordinate angesehen werden mag, eine durch den Nullpunkt des Systems gehende gerade Linie, die in einer durch die x Achse gelegten Ebene zu Stande kommt, welche gegen die Ebene xy' eine Neigung $=$ Arc. a besitzt; die Neigung dieser Linie gegen die x Achse selbst wird durch einen Winkel bestimmt, dessen trigonometrische Tangente $=$ Mod. a ist. Dieser letzte Winkel kann, da Mod. a stets positiv ist, nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ enthalten sein; doch liegt darin keine Beschränkung, da Arc. a eines jeden Werthes zwischen 0 und 2π fähig ist.

Die Gleichung

$$y = ax + b$$

selbst stellt nun eine Parallele mit jener Geraden dar, welche durch einen Punkt der Ebene der y führt, dessen complexe Coordinate $= b$ ist.

Nimmt man $B=0$, so liefert die Gleichung

$$y=b$$

eine zur x Achse parallele Gerade, und ist ausserdem $C=0$, mithin

$$y=0,$$

so fällt die Gerade mit der x Achse zusammen.

Ist aber $A=0$, so kann die Gleichung

$$Bx+C=0$$

mit der hier geforderten Beschränkung, dass x nur reeller Werthe fähig sein soll, nur noch bestehen, wenn $\frac{C}{B}$ reell ist; sie bezeichnet aber unter dieser Voraussetzung nicht mehr eine Gerade, sondern eine zur Achse der x normale Ebene, welche diese Achse in dem Punkte $x=-\frac{C}{B}$ schneidet; mithin die Ebene der y selbst, wenn $C=0$ und folglich $x=0$ ist. Dieser Ausnahmefall gehört indessen streng genommen nicht hieher, da hier die von vorn herein vorausgesetzte Möglichkeit, y als abhängige Veränderliche anzusehen, aufgehoben ist.

Werden für die Coefficienten A, B, C reelle oder complexe Werthe gesetzt, so kann

3) die Gleichung

$$Ay+Bx+C=0$$

als solche auch noch bestehen, wenn für beide Veränderliche x und y complexe Werthe zugelassen werden; soll aber die Gleichung in diesem Falle einer geometrischen Deutung fähig sein, so muss man sie für eine der Veränderlichen auflösen und von dieser Veränderlichen sodann nur einen ihrer reellen Bestandtheile in Betracht ziehen. Es sei y diese Veränderliche, so kann man als einfachste Formen der resultirenden Function — insofern nämlich die Abhängigkeit zwischen y und x noch durch eine lineare Gleichung dargestellt werden soll — ansehen

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax+b)$$

und

$$y = \text{Coëff. imag.}\,(ax+b),$$

wo $a=-\frac{B}{A}$ und $b=-\frac{C}{A}$ im Allgemeinen noch complexe Zahlen sein werden. Beide Gleichungen construiren wir für eine

Ebene der x und eine Achse der y; dass die durch diese beiden Gleichungen dargestellten Flächen aber Ebenen sind, beweisen wir wie folgt.

Betrachtet man zunächst die erste Gleichung

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax+b)\,,$$

so zieht man aus der Natur dieser Gleichung unmittelbar den Schluss, dass die Grösse Coëff. imag. $(ax+b)$ jeden beliebigen reellen Werth muss annehmen können, während x alle complexen Werthe in der Ebene der x durchläuft; setzt man aber, indem w eine willkürliche reelle Constante bedeutet,

$$\text{Coëff. imag.}\,(ax+b) = w,$$

so wird durch die Beschränkung, welche man hiemit den Werthen von x auferlegt, der Umfang der obigen Gleichung aufgehoben, und durch die Vereinigung beider Gleichungen entsteht

$$y + iw = ax + b,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die mithin mit allen ihren Punkten in der obigen Fläche liegt. Bringt man diese Gleichung auf die früher betrachtete Form, wo die complexe Coordinate als Function der reellen aufgefasst wurde, so hat man

$$x = \frac{1}{a}\,y + \frac{iw-b}{a},$$

und hier erkennt man aus dem Coefficienten $\frac{1}{a}$ die Lage der geraden Linie und aus dem Coefficienten $\frac{iw-b}{a}$ ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene der x.

Lässt man nun w sich ändern, so nimmt diese gerade Linie successiv andere, der ursprünglichen parallele Lagen an, indem nur die Lage ihres Durchschnittspunkts mit der Ebene der x sich ändert; und bezeichnet man mit x_0 alle der Annahme $y=0$ entsprechenden Werthe von x, so hat man

$$x_0 = \frac{iw-b}{a}$$

als Gleichung der Linie der Durchschnittspunkte jener Geraden mit der Ebene der x. Diese Gleichung aber ist, wegen der Willkürlichkeit von w, identisch mit der folgenden:

$$\text{Coeff. real.}\,(ax_0+b) = 0,$$

und bezeichnet demnach eine gerade Linie in der Ebene der x, deren Coordinaten der reelle Coefficient x' und der imaginäre

Coefficient x'' der complexen Zahl $x = x' + ix''$ sind *). Man kann mithin in der durch die Gleichung

$$y = \text{Coëff. real. } (ax + b)$$

dargestellten Fläche unzählig viele gerade Linien angeben, die einander parallel sind und deren Durchschnittspunkte mit der Ebene der x wieder eine gerade Linie bilden; jene Fläche ist folglich eine Ebene.

Dass man ebenso die Bedeutung der zweiten Gleichung

$$y = \text{Coëff. imag. } (ax + b)$$

nachweisen kann, liegt auf der Hand; diese Gleichung stellt also gleichfalls eine Ebene dar.

Setzt man $B = 0$, so nehmen beide Gleichungen die Formen an

$$y = \text{Coëff. real. } b, \quad y = \text{Coeff. imag. } b,$$

und jede stellt in diesem Falle eine zur Ebene der x parallele Ebene dar; und ist ausserdem $C = 0$, folglich

$$y = 0,$$

so hat man die Ebene der x selbst. Dies ist genau derselbe Fall, der oben bei der Discussion der geraden Linie unter der Annahme $A = 0$ eintrat; denn dort hatten die Buchstaben x und y die umgekehrte Bedeutung von ihrer jetzigen.

Nehmen wir aber hier $A = 0$, so zerfällt die Gleichung

$$Bx + C = 0$$

sofort in die beiden

$$\text{Coëff. real. } (Bx + C) = 0,$$
$$\text{Coëff. imag. } (Bx + C) = 0;$$

von denen jede eine durch die Achse der y gelegte Ebene darstellt.

7.

Der Gang unserer Untersuchung hat uns von vorn herein gleichsam von selbst darauf geführt, bei der Betrachtung der Linie stets von einer Achse der x und einer Ebene der y; dagegen bei der Betrachtung der Fläche von einer Ebene der x und einer Achse der y zu sprechen. Obgleich diese Ver-

*) Beiläufig erhalten wir hier noch ein neues Mittel, um die Gleichung einer Linie in der Ebene darzustellen, worauf wir jedoch gegenwärtig nicht weiter eingehen wollen.

tauschung der Coordinaten allerdings einiges Unbequeme hat, namentlich sobald man Betrachtungen der einen Art in solche der andern Art hineinziehen will, so wollen wir ihr dennoch für unsern gegenwärtigen Zweck bis zu Ende treu bleiben.

Untersuchen wir nun, um von unsern zuletzt gewonnenen Resultaten einige Anwendung zu machen, zunächst die Lage zweier geraden Linien gegen einander, deren Gleichungen seien

$$y = ax + b,$$
$$y = cx + d;$$

so wird die Existenz eines Durchschnittspunktes beider Linien an die Bedingung gebunden sein, dass die gleichzeitige Gültigkeit beider Gleichungen nothwendig für die Veränderliche x einen reellen Werth zu liefern habe. Da nun die Gleichsetzung $y=y$ liefert

$$x = \frac{d-b}{a-c},$$

so ist

$$\text{Coëff. imag.} \left(\frac{d-b}{a-c}\right) = 0$$

die gesuchte Bedingungsgleichung; und wenn diese erfüllt ist, so sind

$$x = \frac{d-b}{a-c} \text{ und } y = \frac{ad-bc}{a-c}$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes.

Jene Bedingungsgleichung wird z. B. erfüllt, wenn alle Constanten reell sind, wie bekannt; ferner wenn man hat $d=b$, denn alsdann schneiden sich beide Gerade in der Ebene der y; sie wird auch erfüllt, falls man die Sache so ansehen will, wenn man hat $a=c$, denn alsdann sind beide Gerade einander parallel. Ist gleichzeitig $d=b$ und $a=c$, so decken die Linien einander.

Um den Winkel λ zu finden, den jene beiden geraden Linien mit einander einschliessen, denken wir uns zu beiden durch den Nullpunkt des Systems Parallelen gelegt; ausserdem werde aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $=1$ eine Kugelfläche construirt, auf welcher sowohl die Durchschnittspunkte jener beiden Parallelen als auch der Durchschnittspunkt der positiven Seite der Achse der x vorkommen. Alsdann ist der gesuchte Winkel λ Seite eines sphärischen Dreiecks; und setzt man

$$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$c = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi');$$

so wird

$$\cos\lambda = \cos(\operatorname{arctg}\varrho).\cos(\operatorname{arctg}\varrho') + \sin(\operatorname{arctg}\varrho)\sin(\operatorname{arctg}\varrho')\cos(\varphi-\varphi')$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{1+\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')}{\sqrt{1+\varrho^2}.\sqrt{1+\varrho'^2}}.$$

Sollen beide Linien auf einander rechtwinklig stehen, so hat man $\cos\lambda = 0$, folglich

$$\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi') = -1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$a'c' + a''c'' = -1,$$

wenn $a = a' + ia''$ und $c = c' + ic''$ gesetzt wird.

Um hievon eine Anwendung zu machen, wollen wir die Aufgabe lösen: durch den Nullpunkt des Systems normal zu der Geraden

$$y = ax + b$$

eine Ebene zu legen.

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} y &= cx \\ &= (c' + ic'')x \end{aligned}$$

eine durch den Nullpunkt des Systems gelegte Gerade, so wird diese in der gesuchten Ebene enthalten sein, wenn man gleichzeitig hat

$$a'c' + a''c'' = -1.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichung eine der beiden Unbestimmten c' und c'', z. B. die erste, so erhält man

$$a'y + x = iac''x,$$

und da hier c'' noch jedes beliebigen reellen Werthes kann fähig sein, insofern die Gerade $y = cx$ eine beliebige Lage innerhalb der gesuchten Ebene haben darf, so umfasst die Gleichung

$$\text{Coëff. real. } \frac{a'y + x}{ax} = 0$$

alle Lagen der Geraden $y = cx$, welche dieselbe normal zu der Geraden $y = ax + b$ annehmen kann, und ist folglich die Gleichung der gesuchten Ebene. Man kann dieselbe, um die reelle

Coordinate x als solche getrennt hervortreten zu lassen, auch auf die Form bringen *)

$$\text{Coëff. real.}\left(\frac{a'y}{a}\right) = -x\,.\,\text{Coëff. real.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Hätte man oben c'' statt c' eliminirt, so würde man als Gleichung der Ebene schliesslich erhalten haben

$$\text{Coëff. imag.}\left(\frac{i a'' y}{a}\right) = x\ \text{Coëff. imag.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Beide Gleichungen aber sind identisch, denn sie lassen sich auf die Form

$$x = -(a'^2 + a''^2)\,.\,\text{Coëff. real.}\left(\frac{y}{a}\right)$$

zurückführen.

Man kann hieraus einen Schluss ziehen, welcher der Discussion der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

in §. 6. (wo die Coordinaten die umgekehrte Bedeutung haben wie vorhin) zur Ergänzung dienen kann. Fällt man nämlich auf diese Ebene aus dem Nullpunkte des Systems ein Perpendikel, so bezeichnet Mod. a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen dieses Perpendikel mit der Achse der y einschliesst; und π — Arc. a den Neigungswinkel, welchen eine durch dieses Perpendikel und die Achse der y gelegte Ebene mit der Ebene $x'y$ bildet. Folglich ist zugleich Mod. a die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

mit der Ebene der x; und $\frac{\pi}{2}$ — Arc. a derjenige Winkel, welchen die Schnittlinie jener Ebene mit der Ebene der x in dieser Ebene mit der reellen Achse der x' einschliesst. Die Gleichung jenes Perpendikels selbst aber wird

$$x = -(a'^2 + a''^2)\,\frac{y}{a},$$

wo y seine reelle und x seine complexe Coordinate bezeichnet.

---

*) Durch Anwendung der Gleichungen Coëff. real. $(A \pm B)$ = Coëff. real. $A \pm$ Coëff. real. B; Coëff. real. $\frac{A}{n} = \frac{1}{n}$ Coëff. real. A, wenn n reell ist, etc. Diese und ähnliche Gleichungen lassen sich leicht aus der Natur der hier eingeführten Function nachweisen.

Die Lagenverhältnisse von Ebenen lassen sich auf die Lagenverhältnisse der auf ihnen errichteten Perpendikel zurückführen, sind jedoch auch einer unabhängigen Entwickelung fähig. Beides weiter auszuführen unterlassen wir hier, da, wie wir glauben, die bisherigen Andeutungen schon hinreichend den Geist der neuen Behandlung der analytischen Geometrie zu erkennen geben, welches allein der Zweck dieses Aufsatzes sein soll.

8.

Will man nach den hier aufgestellten Principien die geometrische Bedeutung einer algebraischen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei Veränderlichen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

untersuchen, so wird man wieder zu unterscheiden haben, ob die unabhängige Veränderliche, z. B. x, nur die Reihe der reellen Zahlen, oder ob sie die Ebene der complexen Zahlen zu durchlaufen als fähig angesehen werden soll. Im ersten Falle werden die reellen oder complexen Werthe der abhängig Veränderlichen y eine Linie der zweiten Ordnung, — im zweiten Falle dagegen wird sowohl der reelle, als der imaginäre Coefficient der abhängig Veränderlichen y, jeder für sich, eine Fläche der zweiten Ordnung festlegen. Die Coefficienten der obigen Gleichung, A, B, C etc., dürfen dabei entweder reelle oder selbst complexe Zahlen sein.

Wir hoffen diesen Gegenstand bei einer andern Gelegenheit weiter auszuführen, und heben hier nur folgenden einzelnen Fall heraus. Wenn nämlich alle Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Zahlen sind und die unabhängig Veränderliche x gleichfalls nur die Reihe der reellen Zahlen durchlaufen darf, so können dennoch, da die Gleichung vom zweiten Grade ist, für y schon complexe Werthe eintreten, und die Curve bleibt mithin nicht in Einer Ebene.

Nehmen wir z. B. die Gleichung der Ellipse in ihrer einfachsten Gestalt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b die beiden Halbachsen der Ellipse bezeichnen, und betrachten y als Function von x; so haben wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

und hier bleibt y reell, so lange $x^2 < a^2$ ist, und wird dagegen imaginär, nämlich von der Form

$$y = \pm i \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

sobald $x^2 > a^2$ wird. Nehmen wir also, wie früher, zu der Achse der x eine Ebene der y, und bezeichnen in letzterer mit y' die Achse der reellen und mit y'' die Achse der imaginären Zahlen, so erhalten wir vermöge jener Gleichung eine Curve, die von $x=-a$ bis $x=a$ ganz in der Ebene xy' liegt, in den Punkten $x=\pm a$ die Achse der x durchschneidet, und von hier an, nämlich von $x=a$ bis $x=\infty$ und von $x=-a$ bis $x=-\infty$, ganz in die Ebene xy'' hineinfällt. Jenen ersten Theil der Curve nennt man Ellipse, diesen letzten Hyperbel, und es zeigt sich mithin, dass von unserm hier entwickelten Standpunkte aus Ellipse und Hyperbel nur Theile einer und der nämlichen Curve sind, welche man vollständig erhält, wenn man alle Werthe von y für $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ in Betracht zieht. Zugleich ist hieraus auf der Stelle klar, mit welchem Rechte man die Hyperbel eine Ellipse mit imaginärer Nebenachse, oder auch die Ellipse eine Hyperbel mit imaginärer Nebenachse nennen könne; denn die letztere Benennung ist dadurch gerechtfertigt, dass die vorstehende Betrachtung auch von der Gleichung der Hyperbel hätte ihren Auslauf nehmen können.

Dem Kreise gehört hiernach eine gleichseitige Hyperbel mit gleicher Hauptachse als nothwendige Ergänzung zu, welche mit ihm die Achse der x gemeinschaftlich besitzt, aber in einer zu der Ebene des Kreises normalen Ebene liegt.

Die Gleichung der Parabel

$$y = \pm \sqrt{px}$$

liefert, wenn p als positiv vorausgesetzt wird, reelle Werthe für positive x und imaginäre Werthe von der Form

$$y = \pm i \sqrt{-px}$$

für negative x. Sie erstreckt sich mithin gleichfalls von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, und zwar besteht sie aus zwei congruenten Theilen, von denen der eine von $x=0$ bis $x=+\infty$ ganz in die Ebene xy', der andere aber von $x=0$ bis $x=-\infty$ ganz in die Ebene xy'' hinein fällt. Von diesen beiden Theilen wird gewöhnlich schon jeder für sich eine Parabel genannt, während sie hier erst zusammengenommen die vollständige Curve ausmachen.

Allgemein kann man hieran die Bemerkung knüpfen, dass, wenn

$$F(x, y) = 0$$

eine algebraische Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y bezeichnet, die in dieser Gleichung enthaltene Curve stets sich von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ erstrecken muss; denn es ist bewiesen (vergl. §. 4.), dass für jeden Werth von x sich stets ein complexer Werth von y muss angeben lassen, welcher der Bedingung der Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt. Es kann mithin bei unserer Auffassung der Sache keine im Sinne der x geschlossene algebraische Curve geben.

Dieselbe Bemerkung lässt sich auch auf diejenigen Flächen übertragen, welche in einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen enthalten sind. Beide Bemerkungen zusammen genommen aber können als der geometrische Ausdruck des in §. 4. behandelten algebraischen Fundamental-Theorems angesehen werden.

XLVII.

Zur Entwickelung in Reihen und Summirung der Reihen.

Von dem

Herrn Doctor Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 1.

Der Bruch

$$\frac{1}{a-x}$$

giebt, wenn man theilt, die Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)},$$

und wir wollen $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ das allgemeine Glied dieser Reihe nennen, so dass die Reihe dargestellt werden kann durch

$$\sum_0^n \frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-x}.$$

Das Ergänzungsglied erzeugt durch fortgesetzte Division die weiteren Glieder der Reihe. $\frac{1}{a-x}$ soll der erzeugende Bruch für die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist, heissen. Eben so

wird $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}$ der erzeugende Bruch sein für die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^{n+r+1}}{a^{n+r+1}}$. Man hat offenbar

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}$$

und

$$\frac{1}{a-x}-\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}=\sum_0^n\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2<1$, so ist offenbar

$$\frac{1}{a-x}=\sum_0^\infty\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Hat man allgemein den Bruch

$$\frac{1}{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n},$$

so entsteht durch Division eine Reihe von folgender Form

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots,$$

deren allgemeines Glied $A_n\,x^n$ ist. Hat man bei dem Gliede $A_n\,x^n$ den Rest R_n, so ist das Ergänzungsglied

$$\frac{R_n}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n},$$

und es ist genau

$$\frac{1}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n+\frac{R_n}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}.$$

Hier ist $\frac{1}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}$ der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_n\,x^n$ ist; desgleichen aber ist $\frac{R_n}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}$ der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1}\,x^{n+r+1}$ ist, wenn hier n unveränderlich, r veränderlich (0, 1, 2,..) ist. Heisst also K der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_n\,x^n$, K' der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1}\,x^{n+r+1}$ ist, so ist genau

$$K-K'=\sum_0^n A_n\,x^n.$$

Verschwände das Ergänzungsglied für ein unendlich grosses n,

oder, was das Nämliche ist, wäre die Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$ ist, konvergent, so hätte man ganz genau

$$K = \sum_0^\infty A_n x^n.$$

Hat man also eine Reihe, von der man weiss, dass sie durch Division entstanden ist,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

und man verlangt die Summe der $r+1$ ersten Glieder, oder

$$\sum_0^r A_n x^n,$$

so suche man den erzeugenden Bruch für die Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$, und den für die Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1} x^{n+r+1}$ ist; sind K und K' diese beiden Brüche, so ist genau

$$K - K' = \sum_0^r A_n x^n, \qquad (1)$$

welche Formel eine merkwürdige, höchst einfache Summirungsmethode in sich schliesst.

Wir werden nun im Folgenden zu zeigen suchen, auf welche Weise man den erzeugenden Bruch bestimmen kann, und alsdann die gefundenen Formeln zur Reihensummirung anwenden.

§. 2.

Vor Allem wollen wir die Gestalt der Reihe untersuchen, die aus dem Bruche

$$\frac{1}{(a-x)^m}$$

entsteht.

Nach dem, was man in §. 1. gesehen, hat sie die Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Soll diese Reihe wirklich durch Division aus dem Bruche $\frac{1}{(a-x)^m}$ entstanden sein, so muss sie die Eigenschaft haben, dass, wenn sie beliebig weit fortgeführt und mit $(a-x)^m$ multiplizirt wird, alle Glieder des Produktes, die Potenzen von x enthalten, verschwinden, und das x nicht enthaltende Glied $= 1$ sei.

Wird die Reihe nur bis zum Gliede $A_n x^n$ fortgeführt, so werden im Produkte diejenigen Potenzen von x, deren Exponent $> n$, nicht verschwinden, alle andern aber werden verschwinden, n mag

nun sein, was es will. Nun lässt sich leicht einsehen, dass es eine einzige Reihe giebt, die diese Eigenschaft hat. Denn gäbe es eine andere

$$A'_0 + A'_1 x + A'_2 x^2 + \ldots + A'_n x^n + \ldots$$

und man multiplizirte sie mit $(a-x)^m$, setzte alsdann die Gleichungen an, die sich aus den angeführten Bedingungen ergeben, so würde man eine Reihe Gleichungen des ersten Grades erhalten, aus denen $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots A'_n \ldots$ bestimmt werden könnten, und man sieht leicht ein, dass diese Werthe mit $A_0, A_1, \ldots A_n, \ldots$ zusammenfallen.

Nun behaupte ich aber, die Reihe

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a^m} + m\frac{x}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^{m+2}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{x^3}{a^{m+3}} + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{x^n}{a^{m+n}}\end{array}\right\}\ldots (1)$$

habe diese Eigenschaft, sei also die Reihe, welche durch die verlangte Division entstanden.

Denn es ist allgemein

$$(a-x)^m = a^m - ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 - \ldots (-1)^m x^m.$$

Multiplizirt man nun die Reihe (1) mit $(a-x)^m$, so ist das Glied des Produktes, das die Potenz x^n enthält:

$$\frac{1}{a^n}\left\{\begin{array}{l}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} - m\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} \\ \qquad + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)} - \ldots\end{array}\right\}.$$

Ist $n < m$, so ist das letzte Glied dieser Reihe:

$$(-1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n};$$

für $n = m$ ist es:

$$(-1)^m;$$

und für $n > m$:

$$(-1)^m\frac{m(m+1)\ldots(m+n-m-1)}{1.2\ldots(n-m)} = (-1)^m\frac{m(m+1)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-m)}.$$

Nun folgt aus Archiv. Thl. I. Nr. X. S. 72. (12) für $k=1$, $p=n$, $m=m$, $n=-m$, dass im ersten Falle die Reihe

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} - m\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots = (m-m)_n = 0.$$

Dasselbe gilt auch für den zweiten und dritten Fall. Es ist nämlich allgemein:

$$(m\overset{1}{-}m)_n = 0 = \overset{1}{m}_n + \overset{1}{m}_{n-1}(-\overset{1}{m})_1 + \overset{1}{m}_{n-2}(-\overset{1}{m})_2 + \ldots + \overset{1}{m}_1(-\overset{1}{m})_{n-1} + (-\overset{1}{m})_n.$$

Im ersten Falle ist diese Reihe vollgliederig, im zweiten ebenfalls, im dritten aber ist, da

$$(-\overset{1}{m})_r = \frac{(-m)(-m+1)(-m+2)\ldots(-m+r)}{1.2\ldots r},$$

für $r \overset{=}{>} m$, $(-\overset{1}{m})_r = 0$, was auf unsern Satz zurückkommt. Das allgemeine Glied der aus dem Bruche $\frac{1}{(a-x)^m}$ entstehenden Reihe ist also

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{x^n}{a^{m+n}} = \overset{1}{m}_n \frac{x^n}{a^{m+n}},$$

und man erhält die Reihe, wenn man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt, dabei aber $\overset{1}{m}_0 = 1$ annimmt (M. s. die vorher angeführte Abhandlung im ersten Theile.).

Das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

entstehenden Reihe ist folglich

$$A\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n,$$

und das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{a-bx}$$

entstehenden Reihe:

$$A\,\frac{b}{a^{n+1}}\,x^n$$

Umgekehrt auch wird eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$A.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n$$

ist, zum erzeugenden Bruch haben:

$$\frac{A}{(a-bx)^m}.$$

§. 3.

Ist ein Bruch zusammengesetzt aus der (algebraischen) Summe einer Reihe von Brüchen, welche die Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

haben, so ist das allgemeine Glied der aus ihm hervorgehenden Reihe offenbar gleich der (algebraischen) Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, die durch Division aus den einzelnen Brüchen erzeugt werden. Und umgekehrt, ist das allgemeine Glied ein Inbegriff einer Reihe Formen der Gestalt:

$$A.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.\frac{b^n}{a^{m+n}}x^n,$$

so ist der erzeugende Bruch auch ein Inbegriff einer Reihe von Brüchen der Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

§. 4.

Das in §. 2. Aufgeführte gilt offenbar auch für den Fall, dass A und a imaginär sind.

Sei also $A = R(\cos T + i\sin T)$, $a = r(\cos t + i\sin t)$, so ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T + i\sin T)}{[r(\cos t + i\sin t) - bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$R(\cos T + i\sin T).\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.\frac{b^n}{r^{m+n}}.\frac{x^n}{(\cos(m+n)t + i\sin(m+n)t)}$$
$$= \frac{Rb^n x^n}{r^{m+n}}.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.\frac{\cos T + i\sin T}{\cos(m+n)t + i\sin(m+n)t} =$$
$$\frac{Rb^n x^n}{r^{m+n}}.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}[\cos((m+n)t - T) - i\sin((m+n)t - T)].$$

Dessgleichen ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T - i\sin T)}{[r(\cos t - i\sin t) - bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$\frac{Rb^n x^n}{r^{m+n}}.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}[\cos((m+n)t - T) + i\sin((m+n)t - T)].$$

Nun ist aber

$$\frac{R(\cos T+i\sin T)}{[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m}+\frac{R(\cos T-i\sin T)}{[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m}$$

ein reeller Bruch, dessen Nenner:

$$(r^2-2brx\cos t+b^2x^2)^m,$$

und dessen Zähler:

$$\begin{aligned}&R(\cos T+i\sin T)\,[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m\\+\,&R(\cos T-i\sin T)\,[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m,\end{aligned}$$

welche Grösse reell ist.

Das allgemeine Glied der aus diesem Bruche entstehenden Reihe ist somit:

$$\frac{2Rb^nx^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cos((m+n)t-T).$$

Und umgekehrt gehört zu einem solchen allgemeinen Gliede ein erzeugender Bruch:

$$\frac{\left\{\begin{aligned}&R(\cos T+i\sin T)[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m\\+\,&R(\cos T-i\sin T)\,[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m\end{aligned}\right\}}{[r^2-2brx\cos t+b^2x^2]^m}.$$

Für $m=1$ ist das allgemeine Glied:

$$\frac{2Rb^nx^n}{r^{n+1}}\cos((n+1)t-T),$$

und der erzeugende Bruch:

$$2R\,\frac{r\cos(T-t)-bx\cos T}{r^2-2brx\cos t+b^2x^2}.$$

Diese Andeutungen mögen genügen. Wir wenden uns nun zu Summirungen, wie sie durch die entwickelten Formeln möglich werden, und deren Prinzip in §. 1. erläutert wurde. Es werden also hier eine Reihe Beispiele folgen.

§. 5.

1) Es sei das allgemeine Glied einer Reihe $(2.4^n+3)x^n$, und man verlange die Summe

$$\sum_0^r(2.4^n+3)x^n.$$

Das allgemeine Glied zerfällt in $2.4^n x^n$ und $3.x^n$. Betrachtet man den ersten Theil, so ist in §. 2. $A=2$, $b=4$, $a=1$, $m=1$, also der erzeugende Bruch $\frac{2}{1-4x}$; dessgleichen ist der erzeugende Bruch von $3.x^n$ hier $\frac{3}{1-x}$; also ist

$$K\ (\S.\ 1.) = \frac{2}{1-4x} + \frac{3}{1-x} = \frac{5-14x}{1-5x+4x^2}.$$

Für K' ist das allgemeine Glied: $2.4^{n+r+1}\,x^{n+r+1} + 3x^{n+r+1}$, also der erzeugende Bruch

$$K' = \frac{2.4^{r+1}x^{r+1}}{1-4x} + \frac{3x^{r+1}}{1-x} = \frac{(2.4^{r+1}+3)x^{r+1} - (2.4^{r+1}+12)x^{r+2}}{1-5x+4x^2}.$$

Mithin ist

$$K-K' = \sum_0^n (2.4^n+3)x^n = \frac{5-14x-(2.4^{r+1}+3)x^{r+1}+(2.4^{r+1}+12)x^{r+2}}{1-5x+4x^2}.$$

Diese Grösse wird für $x=1$: $\frac{\text{Null}}{\text{Null}}$; ihr wahrer Werth ist alsdann:

$$\frac{-14-(r+1)(2.4^{r+1}+3)+(r+2)(2.4^{r+1}+12)}{3}.$$

Dessgleichen wird sie $\frac{0}{0}$ für $x=\frac{1}{4}$ oder $4x=1$; ihr wahrer Werth ist alsdann:

$$\frac{-14-(r+1)(2.4^{r+1}+3).\frac{1}{4^r}+(r+2)(2.4^{r+1}+12).\frac{1}{4^{r+1}}}{-5+2}$$
$$= \frac{14.4^{r+1}+(r+1)(2.4^{r+1}+3).4-(r+2)(2.4^{r+1}+12)}{3\ .\ 4^{r+1}},$$

wie man findet, wenn man Zähler und Nenner nach x differenzirt und dann $x=\frac{1}{4}$ setzt.

2) Man soll die Summe

$$\sum_0^r \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n$$

angeben. Für diesen Fall ist in §. 2.: $A=1$, $b=1$, $a=1$, $m=3$, also

$$K = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Das allgemeine Glied der durch K' entstehenden Reihe ist

$$\frac{(n+r+2)(n+r+3)}{1.2} x^{n+r+1}$$

$$= \left[\frac{n^2+(2r+5)n+(r+2)(r+3)}{1.2}\right] x^{n+r+1}$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)+(2r+5-3)(n+1)+r^2+3r+4}{1.2}\right] x^{n+r+1}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} x^{n+r+1} + \frac{2r+2}{1.2}(n+1)x^{n+r+1} + \frac{r^2+3r+4}{1.2} x^{n+r+1};$$

folglich der erzeugende Bruch

$$K' = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^3} + (r+1)\frac{x^{r+1}}{(1-x)^2} + \frac{r^2+3r+4}{2} \cdot \frac{x^{r+1}}{1-x}$$

$$= \frac{x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2}) - x^{r+2}(r^2+4r+5)}{(1-x)^3} + \frac{\frac{r^2+3r+4}{2} x^{r+3}}{(1-x)^3}.$$

Mithin

$$\sum_0^r \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} x^n =$$

$$\frac{1-x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2}) + x^{r+2}(r^2+4r+5) - x^{r+3}(\frac{r^2+3r+4}{2})}{(1-x)^3}.$$

3) Es soll die Summe $\sum_0^r x^n \cos nt$ angegeben werden.

Nach §. 4. ist hier $R=1$, $b=1$, $r=1$, $T=t$, also

$$K = \frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x^{n+r+1}\cos(n+r+1)t$ als allgemeines Glied ist $R=b=r=1$, $T=-(rt)$, mithin

$$K' = \frac{\cos(r+1)t - x\cos rt}{1-2x\cos t+x^2} x^{r+1},$$

folglich

$$\sum_0^r x^n \cos nt = \frac{1-x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x=1$ ist

$$1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\ldots\ldots+\cos rt$$

$$=\frac{1-\cos t+\cos rt-\cos(r+1)t}{2-2\cos t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos rt-\cos(r+1)t}{1-\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2r+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t},$$

wie bekannt.

4) Es sei

$$\sum_0^r [2(3n^2-1)2^n+12n]x^n$$

anzugeben.

Es ist

$$2(3n^2-1)2^n+12n$$

$$=3.2^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-2^{n+1}.9(n+1)+2^{n+2}+12(n+1)-12,$$

also

$$[2(3n^2-1)2^n+12n]x^n$$

$$=12\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.2^nx^n-18.(n+1)2^nx^n+4.2^nx^n+12.(n+1)x^n-12x^n,$$

folglich

$$K=\frac{12}{(1-2x)^3}-\frac{18}{(1-2x)^2}+\frac{4}{1-2x}+\frac{12}{(1-x)^2}-\frac{12}{1-x}.$$

Das allgemeine Glied $A_{n+r+1}x^{n+r+1}$ (§. 1.) ist hier:

$$[6(n+r+1)^2-2](2x)^{n+r+1}+12(n+r+1)x^{n+r+1},$$

oder wenn man $r+1=p$ setzt:

$$[12.\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}+(12p-18)(n+1)+4+p^2-12p](2x)^n.(2a)^p$$
$$+(12(n+1)-12)x^px^n+12p.x^px^n;$$

also

$$K'=\frac{12.(2x)^p}{(1-2x)^3}+\frac{(12p-18)(2x)^p}{(1-2x)^2}+\frac{4+p^2-12p}{1-2x}.(2x)^p$$
$$+\frac{12.x^p}{(1-x)^2}-\frac{12.x^p}{1-x}+\frac{12p.x^p}{1-x}=$$

$$(2x)^{r+1}\left[\frac{12}{(1-2x)^3}+\frac{12r-6}{(1-2x)^2}+\frac{r^2-10r-7}{1-2x}\right]+x^{r+1}\left[\frac{12}{(1-x)^2}+\frac{12r}{1-x}\right].$$

Die verlangte Summe ist nun $K - K'$.

Weitere Beispiele zu geben, halten wir für unnöthig. Wir haben nur auf diese Summirungsweise aufmerksam machen wollen, da ihr Gang ein einfacher und klarer ist. Es liessen sich noch mancherlei Formeln daraus ableiten, auf welche wir vielleicht später zurückkommen werden.

XLVIII.

Beiträge zu den Elementen der Geometrie.

Von

Herrn Rudolf Wolf,

Docenten der Mathematik und Archivar der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Bern.

I.

Wenn ich mich längst zu der sich immer mehr Bahn brechenden Ansicht bekenne, dass die künstlichen Schranken zwischen einzelnen Theilen der Geometrie zusammenbrechen müssen, insofern diese Wissenschaft in ihrer innern Gliederung fortschreiten soll, — so halte ich namentlich dafür, dass die ebene Geometrie der Raumgeometrie durch eine gleichmässigere Behandlung beider näher zu bringen ist, und ich gebe mich der Hoffnung hin, dem mathematischen Publikum binnen Kurzem einen betreffenden Versuch vorlegen zu können. Folgendes möge zur Probe dienen.

Wie der Flächenberechnung in der Ebene der Satz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Flächeninhalt, zu Grunde liegt, so gründet sich die Körperberechnung auf den Satz: Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Rauminhalt. Für ersteren Satz wüsste ich keinen klareren Beweis zu geben, als den von Gerwien, wie er

im Archiv. Thl. IV. S. 237. angedeutet wurde; da er sich aber nicht auf den Raum ausdehnen lässt, so muss ich ihn dennoch verwerfen. Ebensowenig kann ich den von Euklid oder Legendre beibehalten, da ich es für unwissenschaftlich halte, die Berechnung von Dreieck und Tetraeder auf die Berechnung von Parallelogramm und Parallelepipedum zu gründen. Ich habe nun für das Dreieck folgenden Beweis adoptirt. Ich lasse ein Dreieck der Fläche nach entstehen, indem sich eine Gerade parallel zu einer seiner Seiten fortbewegt, während ihre veränderlichen Grenzpunkte in den beiden andern Seiten bleiben, — zeige dann (mit Hülfe der bei meinem geometrischen Systeme unmittelbar aus den Congruenzsätzen hervorgehenden Aehnlichkeitssätze), dass für Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe die Erzeugende in gleichen Abständen von den Spitzen gleich lang ist, und schliesse aus der fortwährenden Gleichheit der Erzeugenden auf die Gleichheit des Erzeugten. — Für die folgenden Flächensätze die gewöhnlichen Beweise beibehaltend, bin ich so in den Stand gesetzt, die entsprechenden Raumsätze auf ganz analoge Weise zu erledigen.

a) Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich. — Wenn (Taf. VI. Fig. 9.) $abc = hik$ und $do \parallel tu$, so ist T. $abcd =$ T. $hiko$. Denn ist $vw \parallel tu$, so hat man, da parallele Schnitte eines Tetraeders ähnlich sind, $efg \sim abc$ und $lmn \sim hik$, folglich auch, wenn rg, cp, kq und ns senkrecht zu den Dreiecksseiten gezogen sind, $rgf \sim pcb$ und $smn \sim qik$. Aus diesen ähnlichen Dreiecken folgen die Proportionen:

$$1)\ gr : cp = gf : cb = ef : ab \qquad 2)\ sn : kq = nm : ki = lm : hi.$$

Da ferner parallele Ebenen parallele Kanten bilden, also $ef \parallel ab$ und $lm \parallel hi$ sein muss, so verhalten sich

$$3)\ ef : ab = ed : ad \qquad 4)\ lm : hi = lo : ho.$$

Endlich schneiden parallele Ebenen proportional, also verhält sich auch

$$5)\ ed : ad = lo : ho.$$

Die Verbindung dieser fünf Proportionen gibt die zwei neuen

$$ef : ab = lm : hi \qquad gr : cp = sn : kq,$$

aus deren Multiplication

$$ef . gr : ab . cp = lm . sn : hi . kq \text{ oder } \Delta efg : \Delta abc = \Delta lmn : \Delta hik$$

folgt. Nun ist nach der Voraussetzung $\Delta abc = \Delta hik$, also muss auch $\Delta efg = \Delta lmn$ sein. Es kann sich aber der Rauminhalt eines Tetraeders dadurch erzeugen, dass sich eine Ebene parallel einer Seitenfläche fortbewegt, während ihre veränderlichen Grenzlinien in den drei andern Seitenflächen bleiben. Da nun für zwei Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe die Erzeugende in gleichen Distanzen von der Spitze nach dem Bewiesenen immer gleiche Grösse hat, so müssen auch die erzeugten Tetraeder gleiche Grösse haben, w. z. b. w.

b) **Tetraeder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Basen.** — Wenn $dh \parallel ik$ (Taf. VI. Fig. 10.) und $abc:efg=m:n$, so verhält sich auch $T.\,abcd : T.\,efgh = m:n$. Denn theilt man die Basen: ab in m unter sich gleiche Theile und ef in n unter sich gleiche Theile, und verbindet die Theilpunkte je mit den Spitzen c und g, so hat man offenbar abc und efg in m und n auch unter einander gleiche Theile getheilt. Jeder dieser Theile bestimmt mit der zu ihm gehörenden Spitze d oder h ein Tetraeder, und alle diese Tetraeder haben gleichen Inhalt, weil sie bei gleicher Höhe äquivalente Grundflächen haben. Es verhalten sich also die ganzen Tetraeder wie die Zahlen m und n, welche die in ihnen enthaltenen kleinen Tetraeder zählen, w. z. b. w.

c) **Tetraeder von gleicher Basis verhalten sich wie ihre Höhen.** — Ist (Taf. VI. Fig. 11.) $abc = efg$, so sollen sich die Tetraeder $abcd$ und $efgh$ wie ihre Höhen verhalten. Um dies zu beweisen, nehmen wir ein Tetraeder $iklm$ zu Hülfe, welches mit $abcd$ gleiche Höhe habe (so dass $dm \parallel rs$), während $ilm \parallel egh$ und $ikl \backsimeq egf$. Dieses Tetraeder hat mit $abcd$ nach der Voraussetzung gleiche Höhe und äquivalente Grundfläche, also gleichen Inhalt. Denkt man sich nun $efgh$ so in $iklm$ gelegt, dass die gleichen Grundflächen zusammenfallen, so muss auch wegen des vorausgesetzten Parallelismus egh in ilm fallen; es sind daher die beiden Tetraeder, in Beziehung auf egh und ilm als Grundflächen, von gleicher Höhe, und man hat daher

$$T.\,efgh : T.\,iklm = egh : ilm = eg \,.\, hq : il \,.\, mo = hq : mo.$$

Zieht man nun die Höhen mn und hp senkrecht auf rs und verbindet no und pq, so muss $no \perp il$ und $pq \perp eg$ stehen, da mo und hq als Dreieckshöhen senkrecht zu il und eg. Es stellen also die Winkel mon und hqp die Neigungen der parallelen Flächen ilm und egh gegen rs vor, sind also gleich; folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke mno und hpq ähnlich, also $hq:mo = hp:mn$. Man hat daher endlich

$$T.\,efgh : T.\,iklm = hp:mn \quad \text{oder} \quad T.\,efgh : T.\,abcd = hp:mn.$$

d) **Die Inhalte zweier Tetraeder verhalten sich wie die Producte aus Höhe und Basis.** — Stellen $v_1\, g_1\, h_1$ und $v_2\, g_2\, h_2$ Volumen, Grundfläche und Höhe zweier Tetraeder vor, und ist ferner v_3 gleich dem Inhalte eines Tetraeders der Höhe h_1 und Grundfläche g_2, so hat man nach *b*) und *c*):

$$v_1 : v_3 = g_1 : g_2, \qquad v_3 : v_2 = h_1 : h_2;$$

folglich durch Multiplication:

$$v_1 : v_2 = g_1 \,.\, h_1 : g_2 \,.\, h_2.$$

e) **Wählt man den Inhalt eines Tetraeders, dessen Grundfläche die Basis 1 und Höhe 2 hat, während seine Höhe 3 beträgt, zur Volumeneinheit, — so ist das Volumen jedes Tetraeders gleich dem Drittheile**

des Productes aus Basis und Höhe. — Bezeichnen nämlich g und h Basis und Höhe irgend eines Tetraeders v, so hat man nach der getroffenen Wahl und in Folge von d):

$$v:1=g.h:\frac{1.2}{2}.3 \text{ oder } v=\frac{gh}{3}.$$

II.

Meistens wird den Schülern der Uebergang von den ersten Elementen der Geometrie zu den rechnenden Theilen etwas schwer. Die Erfahrung hat mir nun gezeigt, dass diese Schwierigkeiten am leichtesten dadurch gehoben werden, wenn man ihnen die Formeln nicht nur durch Rechnung ableitet, sondern sie ihnen auch durch Construction näher zu bringen sucht, und ihnen durch Hinweisung auf die gleichen Resultate beider Methoden Zutrauen zu dem für sie neuen Verfahren weckt. Ich füge hier einige solche Constructionen bei, von denen ich mir nicht bewusst bin, sie in geometrischen Werken gefunden zu haben.

a) Es soll die Summe oder Diffenz zweier Sinus oder Cosinus in ein Product verwandelt werden. — Man hat offenbar, wenn $af=ad=1$ und $\angle fac=\angle dac$ (Taf. VI. Fig. 12.).

$$\sin\alpha+\sin\beta=fg+de=2.cb=2.ac.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=fg-de=2.ch=2.cd.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=ag+ae=2.ab=2.ac.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=ag-ae=-2hd=-2cd.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

b) Es soll gezeigt werden, dass sich in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente ihrer halben Differenz verhält. Aus der nach Construction und Bezeichnung für sich klaren Taf. VI. Fig. 3. folgt unmittelbar

$$a+b:a-b=y:x=\frac{y}{z}:\frac{x}{z}=\tang\frac{\alpha+\beta}{2}:\tang\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

III.

Bilden drei Seiten eines Tetraeders rechte Winkel mit einander, so heissen sie *Katheten*, die Gegenseite *Hypotenuse*, das Tetraeder *rechtwinklig*. Für jedes

solche rechtwinklige Tetraeder besteht sodann der dem Pythagoräischen Theoreme analoge Satz: **Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Quadratsumme der Katheten.** — Wenn (Taf. VI. Fig. 14.) $\angle ABDC = \angle DABC = \angle ABCD = 90^0$, so folgt, da zwei zu einer dritten senkrechte Ebenen auch eine zu ihr senkrechte Kante haben müssen, dass $\angle(a,b) = \angle(a,c) = \angle(b,c) = 90^0$, und daher

$$ABC^2 = \frac{a^2 b^2}{4},\ ABD^2 = \frac{a^2 c^2}{4},\ BCD^2 = \frac{b^2 c^2}{4}.$$

Zieht man nun $e \perp d$, so folgt $f \perp d$ und $\angle(a,e) = 90^0$, und da nun $b.c = d.e$, so wird

$$ACD^2 = \frac{d^2 f^2}{4} = \frac{d^2(a^2+e^2)}{4} = \frac{d^2}{4}(a^2 + \frac{b^2c^2}{d^2}) = \frac{a^2d^2+b^2c^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2}{4} = ABC^2 + ABD^2 + BCD^2,$$

w. z. b. w.

XLIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgabe aus der Stereometrie.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den Namen der Archimedischen Körper führen einige Lehrbücher der Stereometrie eine Klasse von Polyedern auf, welche von regelmässigen Polygonen verschiedener Art (z. B. Quadraten und gleichseitigen Dreiecken) dergestalt begränzt werden, dass an jeder Ecke gleichviel Polygone von einerlei Art zusammenstossen. Diese Körper, die mithin einen natürlichen Fortschritt von den sogenannten Platonischen Körpern aus bilden, geben Anlass zur Aufstellung folgender Aufgabe mit mehreren Unbekannten:

Wie viel regelmässige $p$ecke, $q$ecke, $r$ecke etc. wird ein Polyeder enthalten müssen, wenn an jeder Ecke desselben a $p$ecke, b $q$ecke, c $r$ecke etc. zusammenstossen sollen?

Beispielsweise führen wir an, dass aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken sich nur folgende fünf Archimedische Körper bilden lassen:

1)	2	gleichs.	Dreiecke	3	Quadr.,	an	jeder	Ecke	1	gl. Dr.	2	Qu.
2)	8	„	„	18	„	„	„	„	1	„	3	„
3)	8	„	„	6	„	„	„	„	2	„	2	„
4)	8	„	„	2	„	„	„	„	3	„	1	„
5)	32	„	„	6	„	„	„	„	4	„	1	„

Die Netze dieser Körper zu entwerfen, dürfte für Anfänger eine sehr instructive Uebung abgeben.

Aufgabe aus der Integralrechnung.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

In einem Tonnengewölbe (Halbcylinder), dessen Grundfläche horizontal liegt und dessen normaler Querschnitt eine halbe Ellipse bildet, denjenigen Theil der krummen Oberfläche zu berechnen, welcher von zwei Vertikalebenen, die einander in einem Punkte der Achse des Gewölbes durchschneiden, und von der Grundfläche begränzt wird.

Wir theilen diese Aufgabe mit, weil sich das Resultat auf eine für Praktiker sehr bequeme Gestalt bringen lässt. Bezeichnet man mit a die horizontale, mit b die vertikale Halbachse des normalen Querschnitts, und mit F die horizontale Projection der gesuchten krummen Oberfläche, — welche ein Dreieck bildet, — so ist diese krumme Fläche selbst

$$= kF,$$

wo man den Factor k, der nur noch von dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ abhängig ist, durch eine Integration findet, die auf Logarithmen oder Kreisbögen führt, je nachdem man $a > b$ oder $a < b$ hat. Sie vereinfacht sich für $a = b$, d. h. für Kreisgewölbe, wo man das überraschende Resultat $k = 2$ erhält; in dieser einfachsten Gestalt findet sich die Aufgabe bei Moigno, in dessen musterhafter Darstellung der Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie (Calcul différentiel et intégral. Tome II.).

Eine Anzahl Werthe für k haben wir in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$\frac{b}{a}$	k	Diff.	$\frac{b}{a}$	k	Diff.
0,5	1,3802	1142	1,3	2,4102	1387
0,6	1,4944	1201	1,4	2,5506	1404
0,7	1,6145	1249	1,5	2,6925	1419
0,8	1,7394	1287	1,6	2,8358	1433
0,9	1,8681	1319	1,7	2,9801	1443
1,0	2,0000	1346	1,8	3,1254	1453
1,1	2,1346	1369	1,9	3,2715	1461
1,2	2,2715	1387	2,0	3,4184	1469

Diese Aufgabe findet Anwendung sowohl zur Berechnung der Oberflächen von Klostergewölben (welche aus lauter Flächenstücken von der angegebenen Gestalt zusammengesetzt sind), als auch von Kreuzgewölben (wo von jedem der sich durchkreuden Tonnengewölbe Flächenstücke der angegebenen Art zu subtrahiren sind), und möchte sich desshalb besonders für technische Lehranstalten als Rechnungsbeispiel eignen.

L.

Miscellen.

Professor Frisch in Stuttgart hat sich einer vollständigen Ausgabe von Kepler's Schriften unterzogen und den dazu entworfenen Plan bekannt gemacht. Die Schriften sollen in ihrer ursprünglichen Form chronologisch geordnet erscheinen, begleitet von kurzen erläuternden Anmerkungen. Eine Einleitung wird einen Ueberblick über den Zustand der Mathematik und Naturwissenschaften in der Keplern vorausgegangenen Zeit geben und daran sich Kepler's Leben, mit Rücksicht auf dessen wissenschaftliche Thätigkeit, schliessen. Hierzu steht die Benutzung von Kepler's handschriftlichem Nachlasse, welcher in 22 Foliobänden die Concepte der gedruckten Werke und einen reichhaltigen Briefwechsel, so wie mehrere angefangene astronomische Arbeiten und zerstreute Notizen enthält, zu erwarten. Die Geschichte dieses

Nachlasses erzählt v. Murr in seinem Journal für Kunstgeschichte. Thl. 3. S. 727. Dr. Hansch, Collegiat in Leipzig, hatte ums Jahr 1710 die Handschriften um 100 Fl. in Danzig erkauft, und erlangte von dem Kaiser Karl VI. das Versprechen von 4000 Fl. zu der Herausgabe; doch ward ihm nach Ueberreichung des ersten Bandes der Titel eines kaiserlichen Raths und eine goldene Kette verliehen, aber die Unterstützung versagt. In Frankfurt a. M. gedachte er dennoch den Druck zu bewerkstelligen, und verlor darüber seine Collegiatur zu Leipzig. Auch die Ausgabe des liber de calendario Gregoriano. 1726. vermochte nicht die kaiserliche Zusage der Erfüllung näher zu bringen. Die Keplerschen Handschriften waren indessen zu Frankfurt für 828 Fl. versetzt worden, wo sie in Vergessenheit geriethen, bis sie v. Murr im Jahre 1774 für die Akademie in Petersburg erkaufte. Dort ward alsbald ein Plan zur Herausgabe entworfen, blieb aber ohne Ausführung. Vielleicht, dass nun Mitglieder der Akademie in Petersburg mitwirkend eintreten, und das für die Wissenschaft wichtige, das Andenken des grossen Mannes erneuernde Werk vollenden (Jenaische Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 194. S. 775.).

Die mathematische Gesellschaft in London.

Gegen Mitte Juni 1845 fand die Einverleibung der seit 1717 bestehenden „Mathematischen Gesellschaft" in die „Astronomische Gesellschaft" statt. Dieses Ereigniss ist insofern von Interesse, als die Gründung des erstgenannten Vereins eine ganz auf das Volk und seine Bildung berechnete war. Was heutzutage die sogenannten Mechanic institutions und Lyceums in den englischen Fabrikstädten sich nach vielseitigerer Richtung hin zur Aufgabe stellen, das suchte diese Gesellschaft in besonderm Bezug auf mathematische und physikalische Wissenschaften durch gegenseitigen Unterricht, Vorlesungen und dergleichen zu erreichen. Der Grundsatz, welcher an der Spitze der Gesellschaftssatzungen stand, lautete: „Es ist die Pflicht jedes Mitgliedes, wenn es um Auskunft über eine mathematische oder naturwissenschaftliche Frage von einem Andern angegangen wird, Letzterem in der fasslichsten und deutlichsten Weise, deren es fähig, Aufschluss zu ertheilen." Ursprünglich zählte die Gesellschaft 64 Mitglieder, später 81, Quadratzahlen, die als Symbole gelten mochten. Zum grossen Theil bestand sie aus Leuten von niederm Herkommen, die sich aus eigenem Triebe und eigner Kraft zum Denken und Forschen emporgearbeitet, sogenannten Autodidakten, und doch befanden sich Männer darunter, die sich einen europäischen Namen erwarben. So Dollond und Thomas Simpson, welcher Letztere von der Gesellschaft von seinem Webstuhle in Spitalfields hervorgezogen wurde, um in der Woolwich Academy Mathematik zu lehren. Wie heute noch ein grosser Theil der Handwerkervereine in Deutschland, legte man sich bei den Versammlungen.

welche gegenseitigen wissenschaftlichen Austausch und Bildung zum Zweck hatten, nicht den mindesten conventionellen Zwang auf. Jedes Mitglied erschien mit seiner Pfeife, hatte seinen Zinnkrug mit Ale vor sich stehen, und brachte Schiefertafel und Griffel mit. Es schien Grundsatz zu sein, bei Erörterung der schwierigsten Fragen dem Satze: „ex fumo dare lucem" buchstäblich Anwendung zu verschaffen Später kamen andere Elemente hinzu, welche im Sinne der geselligen Verfeinererungen Neuerungen machten. An die Stelle des Zinnkrugs trat das Glas und die Pfeife verschwand allmälig; aber mit dem alten Brauch nahm auch die Zahl der Mitglieder ab, und deren kabbalistische Geviertzahl war bald nur eine geschichtliche Denkwürdigkeit. Endlich zählte sie nur noch 19 Mitglieder, nicht mehr Weber und anderes Gewerbsvolk, sondern Mitglieder anderer mit hochklingenden Namen versehener Gesellschaften. Da ihr Fortbestehen unter solchen Umständen nicht mehr möglich war, machte man der Astronomischen Gesellschaft den Vorschlag zur Vereinigung, die ihn bestens aufnahm, da sie sich dadurch ausser der Zunahme ihrer Mitglieder in Besitz der reichen Sammlungen und anderer Mittel der mathematischen Gesellschaft setzte.

Un nouvel observatoire météorologique vient d'être établi sur le sommet du Vésuve; il a été inauguré à l'occasion du dernier congrès des savants italiens, réunis cette année à Naples. Il est placé à l'endroit de la montagne célèbre que l'on nomme Santissimo Salvatore.

XXV.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Ueber die Beschränkung des mathematischen Unterrichts auf den kurhessischen Gymnasien durch die hohe Ministerial-Verfügung vom 28. Februar 1843, Kurfürstlichem Ministerium des Innern als Denkschrift unterthänig überreicht von Dr. E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Kassel. Marburg 1843. 8.

Die betreffende Ministerialverfügung, von welcher schon im Literarischen Berichte Nr. XVIII. S. 274. die Rede gewesen ist, wird zuerst auf S. 3. vollständig mitgetheilt und dann weiter besprochen, indem der Herr Vf. diese Besprechung auf die drei folgenden Hauptpunkte zurückführt:

„1. Die Beschränkung des mathematischen Unterrichts hinsichtlich der darauf zu verwendenden Zeit steht mit der Beschränkung des äusseren Umfangs durchaus in keinem Verhältniss.

2. Dieses Missverhältniss wird auch durch die Vorschrift über die innere Behandlung der Mathematik nicht allein nicht beseitigt, sondern sogar noch vermehrt.

3. Statt der dermaligen Beschränkung des mathematischen Gymnasialunterrichts hinsichtlich seines äussern Umfangs erscheint vielmehr eine andere im Interesse unserer Gymnasien wünschenswerth; aber auch selbst wenn diese eintreten sollte, bleibt die Wiederherstellung der früheren wöchentlichen Stundenzahl dringendes Bedürfniss.“

Was die unter Nr. 3. angedeutete wünschenswerthe Beschränkung des mathematischen Unterrichts angeht, so betrifft dieselbe die Ausschliessung der Stereometrie, welche nebst der Lehre von den Kegelschnitten und der sphärischen Trigonometrie dem academischen Unterrichte vorbehalten werden soll. Obgleich wir nicht glauben, dass in letzterer Beziehung alle Lehrer der Mathematik dem Herrn Vf. beistimmen werden, da die Stereometrie jedenfalls eine eigenthümliche bildende Kraft besitzt, die nicht leicht jeder Gymnasiallehrer unbenutzt lassen möchte, so ist die Schrift doch

durchgängig mit grosser Besonnenheit verfasst, bekundet überall den erfahrenen Lehrer, der sich zu manchem, namentlich zu dem vorher erwähnten Vorschlage, wohl nur durch die Dringlichkeit der Umstände veranlasst und genöthigt gesehen hat, und verdient von allen Lehrern der Mathematik beachtet zu werden.

Als Resultat der ganzen von dem Herrn Vf. angestellten Untersuchung ergiebt sich, dass derselbe an das Hohe Kurfürstlich Hessische Ministerium die Bitte richten zu müssen glaubt, die Verfügung vom 28. Februar 1843 in mehreren wesentlichen Punkten zu modificiren. Dass dies recht bald geschehen möge, wünschen wir mit dem Herrn Vf. im Interesse des mathematischen Unterrichts überhaupt und zum Besten der Kurfürstlich Hessischen Gymnasien insbesondere. Eine Gewährleistung hierfür, und zwar nach unserer Ueberzeugung eine jedenfalls höchst erfreuliche, liegt schon in dem Umstande, dass der Herr Vf. keinen Anstand nehmen zu müssen geglaubt hat, der ihm unmittelbar vorgesetzten höchsten Behörde zwar, wie es sich gebührt und schickt, in ruhigem und ehrerbietigem Tone, aber doch freimüthig und offen, in einer vor das Forum der Oeffentlichkeit gebrachten Schrift entgegen zu treten, was jedenfalls diese hohe Behörde selbst in einem sehr vortheilhaften Lichte erscheinen lässt, und ein erfreuliches Zeichen der Zeit ist.

Arithmetik.

Poinsot: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. 4. Paris 1845. 8 fr.

(Aus Liouville's Journal besonders abgedruckt.)

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen. Von Dr. Brandis, viertem Lehrer an dem Königlichen Christianeum zu Altona (Programm des Christianeum zu Altona von Ostern 1845). Altona. 1845. 4.

Diese Abhandlung, deren erster Theil jedoch für jetzt nur vorliegt, verdient jedenfalls allgemeiner bekannt und beachtet zu werden. Der Herr Vf. hat in derselben eine Zusammenstellung der verschiedenen allgemeinen Principe, auf welche bis jetzt die Auflösung der numerischen Gleichungen gegründet worden ist, mit deren gehöriger Begründung, zu geben und zugleich die Gränzen ihrer Anwendbarkeit näher zu bestimmen gesucht, namentlich ob dieselben bloss bei der Auflösung der algebraischen oder auch bei der Auflösung der transcendenten Gleichungen anwendbar sind. Dass der Herr Vf. bei den älteren Methoden kürzere Zeit verweilt als bei den neueren, kann nur gebilligt werden, und die ganze Abhandlung wird, wenn sie erst in ihrer Vollendung vorliegt, zugleich eine gute historische Uebersicht über die verschiedenen Auflösungsmethoden der numerischen Gleichungen darbieten. Der

so wichtigen Lehre vom Excess der gebrochenen algebraischen Functionen hat der Herr Vf. mit Recht besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und namentlich in dieser Beziehung enthält die Abhandlung auch manches Eigenthümliche, was wir leider hier zwar nicht Alles einzeln namhaft machen können, aber doch nicht unerwähnt lassen dürfen, dass der Herr Vf. mit Hülfe der Lehre vom Excess einen neuen rein analytischen, und selbst für transcendente Gleichungen gültigen Beweis des wichtigen Theorems von Cauchy über die Gränzen der imaginären Wurzeln der Gleichungen gegeben hat. Wir wünschen, dass der Herr Vf. recht bald Gelegenheit finden möge, die Fortsetzung dieser Abhandlung herauszugeben.

Handbuch der mathematischen Analysis von Doctor Oskar Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena. Erster Theil. Algebraische Analysis. Mit zwei Kupfertafeln. Jena. 1845. 8. 2 thlr. 16 ggr.

Vor dem Jahre 1821, wo Cauchy's „Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Ire Partie. Analyse algébrique" erschien, ist es wohl nur wenigen Mathematikern eingefallen, an der völligen Unfehlbarkeit der Lehren der Analysis, und namentlich auch an der völlig allgemeinen Gültigkeit der in derselben gewonnenen Resultate zu zweifeln; ja es hätte wohl geradezu für ein crimen laesae majestatis gegolten, wenn einer sich so etwas hätte wollen in den Sinn kommen lassen, und vollends wenn er solche gefährliche Ideen öffentlich auszusprechen gewagt hätte. Man denke hierbei nur an die combinatorische Analysis und deren Bearbeiter, und erinnere sich u. A., dass noch der verdienstvolle Klügel den polynomischen Lehrsatz „einen hohen Standort, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann" nannte. Das ist nun freilich seit dem Erscheinen des oben genannten wichtigen, und jedenfalls in der Geschichte der Mathematik wahrhaft Epoche machenden Werks von Cauchy, und mehrerer anderer auf dasselbe gefolgter Schriften desselben tiefsinnigen Mathematikers, jetzt in vieler Rücksicht anders geworden, und der oben genannte hohe Standort, von welchem man die Gefilde der Mathematik übersehen kann, ist aus den Werken Cauchy's und allen deren Richtung folgenden neueren analytischen Schriften gänzlich verschwunden.

Frägt man sich nach dem Grunde dieser bei einer Wissenschaft von so hoch gerühmter Strenge, wie die Mathematik, allerdings sehr merkwürdigen Erscheinung, und will auf diese Frage eine ganz unumwundene, auf keiner Selbsttäuschung beruhende Antwort ertheilen, so muss man kurzweg sagen: „dass diese Erscheinung darin ihren Grund hat, weil Cauchy zuerst völlig klar und deutlich gezeigt hat, dass es mit der früher so hoch gerühmten völligen Allgemeinheit der meisten der von den älteren Analytikern aufgestellten Sätze nichts ist, dass diese Sätze vielmehr sehr häufig wesentlichen Einschränkungen unterworfen und nicht selten in sehr enge Gränzen eingeschlossen werden müssen, wenn ihre Anwendung nicht zu unrichtigen oft völlig widersinnigen Resultaten führen soll; dass daher auf diese Weise der wahre materielle Gehalt der Analysis gegen

früher sehr vermindert worden und die Anzahl derjenigen Sätze, welche gegenwärtig als völlig fest begründet und namentlich auch rücksichtlich der Zulässigkeit ihrer Anwendung als in völlig bestimmte Gränzen eingeschlossen zu betrachten sind, im Verhältniss zu dem früheren Zustande der Analysis eine sehr geringe ist, dass man aber eben deshalb gerade diese Sätze als kostbare Perlen zu betrachten hat, die man sich durch nichts wieder entreissen lassen darf, vielmehr immer sorgfältiger pflegen und weiter auszubilden suchen muss *); dass man endlich, so wie die Sachen jetzt stehen, die früher grösstentheils gewöhnliche, namentlich eine möglichst grosse Allgemeinheit erstrebende Behandlungsweise der Analysis, insbesondere die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten, verlassen, bei Begründung der analytischen Sätze zu mehr speciellen, jedem einzelnen Falle besonders angepassten Methoden seine Zuflucht nehmen, und dabei sein Augenmerk ganz vorzüglich darauf richten muss — gewissermassen nach Art der griechischen Geometer, welche bekanntlich überall mit der ängstlichsten Sorgfalt und Genauigkeit alle möglichen Fälle streng von einander schieden und jeden derselben einer besonderen Betrachtung unterwarfen —, alle einzelnen Fälle, die bei einem Satze vorkommen können, von einander zu unterscheiden, und bei jedem einzelnen derselben die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit des Satzes zu untersuchen, überhaupt also jederzeit die Gränzen, innerhalb welcher der Satz richtig oder unrichtig ist, bestimmt festzustellen.

Mit diesen wenigen Worten habe ich, so viel es hier der Raum gestattete, den Geist der neueren Analysis in der ihr vorzüglich durch Cauchy gegebenen gegenwärtigen Gestalt zu charakterisiren gesucht. Dass dieselbe in Rücksicht auf eine gewisse Eleganz und die Allgemeinheit der Behandlungsweise der älteren Analysis nachsteht, will ich gern zugeben, und auch einräumen, dass überhaupt die wahre Behandlungsweise der Analysis noch nicht gefunden ist, so wie auch, dass es wohl möglich sein dürfte, mehrere der älteren Methoden zu grösserer Strenge zu erheben, welches zu versuchen — was unter allen Bedingungen mit Dank aufzunehmen ist — jedenfalls eine sehr würdige Aufgabe für jeden Mathematiker ist; eben so entschieden muss ich aber behaupten, dass von der neueren Analysis in Rücksicht auf die Feststellung der gewonnenen Resultate auf völlig sicheren Grundlagen, auf gehörige Einschränkung derselben zwischen bestimmten Gränzen und auf die dadurch bedingte vollständige Sicherstellung vor Fehlgriffen in deren Anwendung, überhaupt also auf eine wahrhaft strenge, von jedem

*) Ungefähr mit den letzteren, hier übrigens nur aus dem Gedächtnisse niedergeschriebenen Worten, äusserte sich vor Kurzem gegen den Unterzeichneten in einem Briefe auch ein demselben befreundeter trefflicher schwedischer Mathematiker, Herr Professor Malmsten in Upsala, der mit der älteren und neueren Analysis in gleichem Grade vertraut ist.

Zweifel freie Begründung der Sätze, welche den eigentlichen materiellen Inhalt der ganzen Wissenschaft bilden, die ältere bei Weitem überflügelt wird, und dass in allen diesen Beziehungen die ältere Analysis im Verhältniss zur neueren eigentlich nur als ein Spiel mit Formen zu betrachten ist, welches durchaus keine wahrhaft innere Ueberzeugung von der unumstösslichen Richtigkeit der gewonnenen Resultate zu gewähren geeignet ist, und dieselbe in der That auch fast nie gewährt. Hierbei hat man auch, was die Methode betrifft, nicht zu übersehen, dass die Beweise in der neueren Analysis häufig ein Werk des grössten Scharfsinns sind, dass jeder in seiner Eigenthümlichkeit oft ein besonderes Kunstwerk ist, und eben so sehr wie die Entwickelungsmethoden der älteren Analysis, rücksichtlich ihrer allgemeinen Anwendbarkeit, in seiner eigenthümlichen Gestaltung durch grosse Eleganz sich auszeichnet und anzieht. Man hat diese Beweise hin und wieder nicht mit dem Namen Kunstwerke, sondern mit dem Namen Kunststücke zu benennen beliebt. Dies können sich aber alle diejenigen Mathematiker, denen der in den Schriften der griechischen Geometer herrschende Geist nicht fremd geworden ist, gern gefallen lassen; denn sind die Beweise der neueren Analysis Kunststücke, und entbehren dieselben eines gewissen durchgreifenden Princips, so ist noch vielmehr die ganze griechische Mathematik ein Kunststück zu nennen. Der Geist der neueren Analysis und der Geist der griechischen Mathematik ist nach meiner vollkommensten Ueberzeugung, wie ich schon oben andeutete, im Wesentlichen ganz ein und derselbe, was gewiss bei jedem in der Strenge der Griechen aufgewachsenen und erstarkten Mathematiker der ersteren nur zur Empfehlung gereichen kann.

Ganz in dem so eben näher charakterisirten Geiste der neueren Analysis ist das vorliegende Werk des Herrn Doctor Schlömilch verfasst, und verbreitet sich hauptsächlich über die folgenden Gegenstände. Einleitung. — Von den veränderlichen Grössen und den Functionen im Allgemeinen. (In diesem mit Recht sehr ausführlichen Kapitel hat der Herr Vf. die wichtigsten Grundlagen der ganzen Wissenschaft zusammengefasst und sich dabei der grössten Deutlichkeit und Anschaulichkeit befleissigt, deshalb auch öfters geometrische Darstellungen zu Hülfe genommen. Dass in diesem Kapitel vorzüglich auch von der Continuität und Discontinuität der Functionen, von den Gränzen u. s. w. gehandelt worden ist, versteht sich von selbst.). — Bestimmung der Natur verschiedener Functionen aus gegebenen Eigenschaften derselben (Auflösung der Gleichungen $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $f(x).f(y)=f(x+y)$, $f(x)+f(y)=f(xy)$, $f(x).f(y)=f(xy)$. Die Wichtigkeit der Auflösung solcher Functionsgleichungen, welche zur allgemeinen Charakterisirung der eigentlichen Natur der Functionen sehr geeignet sind, kann nach unserer Meinung nicht genug hervorgehoben werden, und verdient, dass sich die Analytiker noch mehr als bisher geschehen mit derselben beschäftigen. Deshalb hat auch der Herr Vf. mit Recht auf dieselben ein besonderes Gewicht gelegt.). — Bestimmung der Natur der Functionen aus gegebenen speciellen Werthen derselben (Hier vorzüglich auch vom Interpolationsproblem). — Von den endlichen und unendlichen Reihen (Hier natürlich hauptsächlich von der Convergenz und Divergenz der Reihen und von den Rechnungen mit unendlichen Reihen). — Das Bino-

mialtheorem. — Die Exponentialreihe. — Die logarithmischen Reihen. — Die Reihen für den Sinus und Cosinus. — Potenzen mit unmöglichen Grundzahlen (Theoreme von Moivre und Cotes. Auflösung der reinen Gleichungen). — Die Exponentialgrössen und Logarithmen mit imaginären Exponenten. — Die goniometrischen und cyklometrischen Functionen mit imaginären Variabeln. — Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. — Reihen für den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens. — Reihen für die cyklometrischen Functionen. — Die goniometrischen Functionen unter der Form von Producten. — Verschiedene Relationen für goniometrische Functionen (Hier auch von den Bernoullischen Zahlen und den Sekanten-Coefficienten und deren Beziehungen zu einander). — Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche. — Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche (Dass der Herr Vf. in diesen beiden Kapiteln auch die Theorie der Kettenbrüche, wobei zugleich von der Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolphschen Zahl gehandelt wird, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hat, verdient besondere Anerkennung). — Schlussbetrachtung.

Aus dieser Uebersicht des Inhalts ergiebt sich, dass das Werk sich fast über alle Gegenstände der algebraischen Analysis (jedoch mit Ausschluss der allgemeinen Theorie der Gleichungen) verbreitet, und wir können dasselbe einem Jeden, wer sich mit der neueren algebraischen Analysis gründlich bekannt zu machen Beruf und Veranlassung findet, wegen seiner Deutlichkeit aus Ueberzeugung empfehlen, und hegen die Hoffnung, dass dasselbe überhaupt zur weiteren Verbreitung der neueren Ansichten und zu der richtigen Würdigung derselben, zugleich aber auch überhaupt zur Beförderung wahrhaft gründlicher analytischer Studien Vieles beitragen wird. Der Herr Vf. hat nach einer möglichst systematischen Darstellung gestrebt; hat alle Grundbegriffe und Sätze möglichst anschaulich zu machen und durch geeignete allgemeine Betrachtungen, wohin namentlich die Vorrede und die Schlussbetrachtung gehören, ein grösseres Licht über das eigentliche Wesen der Wissenschaft und ihrer Methode zu verbreiten gesucht; hat endlich das Imaginäre überall, wo seine Einmischung als fremdartig erscheint, zu vermeiden sich angelegen sein lassen, und darin öfters zu eigenthümlichen Entwickelungen und Darstellungen Veranlassung finden müssen, welche von seinem, schon durch viele frühere Arbeiten hinreichend bewährten Scharfsinn ein neues erfreuliches Zeugniss ablegen.

Gewünscht hätten wir, dass der Herr Vf. auch die im Geiste der neueren Analysis noch sehr wenig untersuchte Theorie der Facultäten aufgenommen hätte, welche wir bei dieser Gelegenheit überhaupt der Aufmerksamkeit der Mathematiker empfehlen möchten. Denn sobald der Exponent keine positive ganze Zahl ist, sind wir in diesem Theile der Analysis jedenfalls noch sehr im Unklaren. Unter mehreren anderen Fragen, die man sich hier vorlegen kann, wollen wir wegen Beschränktheit des Raumes jetzt nur die eine nach der Anzahl der verschiedenen Werthe, die eine Facultät mit gebrochenem Exponenten haben kann, und nach der vollständigen Bestimmung dieser sämmtlichen verschiedenen Werthe hervorheben, welche sich nach unserer Meinung hier eben so gut wie die analoge Frage bei den Potenzen, die in der Auflösung der

reinen Gleichungen bekanntlich bereits ihre vollständige Beantwortung gefunden hat, aufgeworfen werden kann.

Der Fortsetzung dieses auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Werks sehen wir mit Verlangen entgegen.

Folgende Druckfehler sind noch in demselben zu verbessern: S. 18. Z. 1. v. o. l. AB statt OB. — S. 171. Z. 11. v. o. l. $+m_4$ statt $-m_4$.

G.

Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen. Ein Handbuch für Staatsmänner, Cameralisten, Kaufleute, Juristen, Forstmänner, Oeconomen u. s. w. von Dr. L. Oettinger, Grossherzogl. Badischem Hofrath und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B. Braunschweig. 1845. 8. 1 thlr. 20 ggr.

Der Hauptinhalt dieses neuen Werks über die sogenannte politische Arithmetik ist folgender: Rechnung mit einfachen Zinsen. — Rechnung mit Zinses-Zinsen. — Verhältniss zwischen der Rechnung mit einfachen Zinsen und der mit Zinses-Zinsen und Anwendungen. — Ueber die Berechnung des Interusuriums. — Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. — Ueber Lotterie-Anlehen und Lotterien. — Von der Sterblichkeit. — Berechnung der Leibrenten, Lebensversicherungen, Wittwenpensionen u. s. w. — Taf. I—X.

Unter den jetzigen deutschen Mathematikern ist der Herr Vf. des vorliegenden Werks derjenige, welcher seine Aufmerksamkeit am meisten der sogenannten politischen Arithmetik zugewandt, und diese Wissenschaft auch schon durch verschiedene eigene Untersuchungen gefördert hat. Das vorliegende Werk enthält die wichtigsten älteren Untersuchungen und mehrere der neuen Untersuchungen des Herrn Vfs. in systematischem Zusammenhange und in der Form eines für Vorlesungen bestimmten Compendiums, in welcher Beziehung dasselbe auch nach unserer Ueberzeugung alle Empfehlung verdient. Ueberhaupt aber werden alle auf dem Titel genannte Personen, unter Voraussetzung hinreichender mathematischer Vorkenntnisse, die sich jedoch mit geringer Ausnahme durchaus nicht über die elementaren Theile hinaus zu erstrecken brauchen, vielfache Belehrung und Unterstützung bei ihren praktischen Rechnungen aus demselben schöpfen können. Die Wissenschaft von allen früheren unrichtigen Ansichten sorgfältig zu sichten, hat der Herr Vf. eifrig gestrebt, und hat u. A. auch der Beantwortung der Frage: in welchen Fällen die Rechnung mit einfachen Zinsen oder die Rechnung mit Zinses-Zinsen in Anwendung gebracht werden müsse, besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Die verschiedenen Ansichten über das Interusurium sind im vierten Kapitel mit steter Berücksichtigung des Juridischen bei dieser Frage sehr vollständig entwickelt, und die angehängten Tafeln, unter denen ausser den verschiedenen Sterblichkeitstafeln auch mehrere zweckmässig eingerichtete Tafeln zur Erleichterung der Rechnung mit Zinses-Zinsen sich finden, sind so eingerichtet, dass sie die Rechnung mit Logarithmen grösstentheils überflüssig machen. Das Aeussere dieses Werks, dem wir möglichst grosse Verbreitung unter dem betreffenden Publikum wünschen, ist in jeder Beziehung vorzüglich.

Sammlung von mathematischen, namentlich von Differential- und Integralformeln, nebst den Gleichungen etc. jener krummen Linien, die am häufigsten Anwendung finden. Von Joh. Andr. Schubert, Professor der mathem. Wissensch. an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Zweite unveränderte Ausgabe. Dresden und Leipzig. 1845. 8. 16 ggr.

Diese Sammlung kann neben andern Sammlungen dieser Art beim Unterrichte als Sammlung von Uebungsbeispielen und Praktikern zum Nachschlagen in den gewöhnlichen Fällen der Praxis hin und wieder gute Dienste leisten, ohne dass sie sich durch eine besondere Vollständigkeit oder irgend eine sonstige Eigenthümlichkeit auszeichnete. Die beigebrachten Differentialformeln sind nur die ganz gewöhnlichen und allgemein bekannten, und Beispiele für die so wichtige Bestimmung der Reste der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe fehlen leider auch in dieser Sammlung gänzlich. Auch die in jeder Beziehung so höchst wichtigen allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Reste in ihren verschiedenen Formen sind nicht einmal aufgenommen, was einen neuen, sehr unerfreulichen Beweis liefert, dass die neueren, so überaus wichtigen Fortschritte der Analysis in Deutschland bis jetzt eine verhältnissmässig nur sehr geringe Verbreitung gefunden haben. Ein Grund, warum der Herr Vf. statt des allgemein eingeführten Differentialzeichens d sich überall des Zeichens δ bedient, ist durchaus nicht abzusehen, und muss namentlich deshalb getadelt werden, weil das Zeichen δ bekanntlich schon längst eine andere sehr bestimmte, bereits allgemein recipirte Bedeutung in der Variationsrechnung gefunden hat. Dergleichen Gewohnheiten führen nur zu Verwirrung in der Wissenschaft. Die Sammlung der Integralformeln ist mit Recht die reichhaltigste.

Rühlmann, M., logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. 3te verb. Stereotypausg. 16. Dresden. 1845. 12 ggr.

Geometrie.

Klinkhardt, E., Leitfaden für den Unterricht in den Elementen der ebenen Geometrie und in der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie auf Gymnasien und Gewerbschulen. gr. 8. mit 4 Figurentafeln. Lindau 1845. 16 ggr.

De Sex Första Böckerna af Euclidis Elementa jemte Planimetri och Stereometri, utgifne af P. R. Bråkenhjelm. Örebro 1845. 8. b. 2 Rdr. 16 sk. (Boktr. förl.)

Lefebure de Fourcy, Lehrbuch der descriptiven Geometrie, nebst einer, die Theorie der Ebene und geraden Linie im Raume enthaltenden Einleitung. Aus dem Franz. nach der 4. Ori-

ginalauflage übers. v. Heinrich v. Bünau. gr. 8. mit 34 Figurentafeln in 4. Chemnitz 1845. 1 thlr. 21 ggr.

Hymers, J., Treatise on Conic Sections, and the Application of Algebra to Geometry. 3d edit. revised and enlarged. 8vo. Cambridge 1845. 9 sh.

Mossbrugger, L., analytische Geometrie des Raumes, mit Berücksichtigung der neueren geometrischen Verwandtschaft und der zur grösseren Verständigung des Werkes erforderlichen Entwickelungen aus der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Selbststudium. Mit 8 lith. Tafeln. gr. Lex. 8. Aarau 1845. 4 thlr.
(Eine ausführlichere Anzeige dieses Werks werden wir sogleich geben, wenn es in unsere Hände gelangt sein wird, was jetzt noch nicht der Fall ist.)

Ueber die tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung. Von Dr. Aloys Mayr, Prof. der Mathematik und Astronomie an der Universität zu Würzburg. Würzburg 1845. 4. 16 ggr.

In dem Vorworte zu dieser schon im Literarischen Berichte Nr. XXIV. S. 361. vorläufig angezeigten Schrift sagt der Herr Vf. „dass er diese Untersuchungen über die Flächen (wobei er vorzüglich die noch weniger bekannten Eigenschaften der windschiefen Flächen hervorhebt) nicht sowohl um ihrer Resultate willen angestellt habe, weil diese zum Theil schon bekannt seien, als vielmehr um zu zeigen, welche endlichen geometrischen Grössen das erste, zweite, dritte und die höheren Differenziale der Coordinaten, der Bogen, der Flächen u. s. w. seien, wobei es sich ihm nur um die Wahrheit in der Sache des Differenzial-Calculs handele, die für Einige sehr wenig, für Andere hingegen, die den hohen Sinn für Wissenschaft und Wahrheit bewahrt haben, sehr Viel, ja Alles sei und sein werde. Daher habe er mit der Erklärung des wahren Wesens der Differenzialrechnung diese Untersuchungen begonnen, und die Differenzialien selbst, nicht etwa bloss die Differenzial-Quotienten, als endliche, berechnenbare und construirbare Grössen nachgewiesen, und dies so weit ausgeführt, dass keinem Mathematiker, der in diese wahrlich sehr leichten Ableitungen eindringe, ein Zweifel übrig bleiben könne, wie die übrigen hier nicht untersuchten Differenzialien geometrischer und mechanischer Grössen als endliche und berechnenbare Grössen gefunden und bewiesen werden können."

Praktische Geometrie.

Wünsch, J. L., Sammlung von Beispielen aus der praktischen Geometrie für Real- und Sonntagsgewerbschulen. Nördlingen 1844.

Castle, H. J., Treatise on Land Surveying and Levelling; with copious Field Notes, Plans, and Diagrams, containing the Chain and Theodolite Surveying of this Country, Surveying of Woods by the Circumferentor in New-Countries, a Practical Course

of Railwag Levelling, with Field Notes and Drawings of the requisite Sections and Cross Sections: together with several Practical Formulae for each Work, the Theory and Practice of Running Out Curves, and the Mode of Staking out the Side Stakes, accompanied with Introductory Chapters on the Mathematical Principles of each, and the necessary Tables of Logarithms for Working the Problems; intended as a complete Vade-Mecum of Field-Work to the Young Surveyor. London 1845. 8. cloth 12 sh.

Trigonometrie.

Köcher, Dr. Fr. O., Grundzüge der ebenen Trigonometrie Ein Leitfaden beim Unterricht in derselben. Verbess. Ausgabe. gr. 8. Breslau 1845. 6 ggr.

Mechanik.

Earnshaw, S., Treatise on Statics, containing the Theory of the Equilibrium of Forces, and numerous Examples illustrative of the general Principles of the Science. 3d edit., enlarged, 8. Cambridge 1845. 10 sh.

Ehrenstam, J. F., Första grunderna till Mekaniken. Efter vullständiga Läroböcker sammandragne. Andra Uppl. 4. Gefle. 1845. $\frac{5}{6}$ Rdr.

Praktische Mechanik.

Demme, Der prakt. Maschinenbauer. 20. Liefer. 8. Quedlinburg. 1845. 2 thlr. 16 ggr.

Sonnet, H., Recherches sur le mouvement uniforme des eaux dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts, en ayant égard aux différences de vitesse des filets. 4. Paris 1845.

Moseley, H., Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architektur. Aus dem Engl. von H. Scheffler. 3., 4 Lief. gr. 8. Braunschweig. 1845. 1 thlr.

Optik.

Doppler, A. Chr., Zwei Abhandlungen aus dem Gebiete der Optik. gr. 4. Prag 1845. 8 ggr.

Doppler, A. Chr., Ueber die wesentliche Verbesserung der katoptrischen Mikroskope. gr. 4. Prag 1845. 12 ggr.

Astronomie.

Doppler, A. Chr., Ueber die bisherigen Erklärungsversuche des Aberrationsphänomens. gr. 4. Prag 1845. 8 ggr.

Papanti, Ferd., Soluzione del famoso problema di longitudine chronometrica astronomica.

Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1845, calcolate dall' ab Giov. Capelli e da Curzio Buzzetti. Con appendice, memorie ed osservazioni astronomiche. Mit 2 Tafeln Abbildungen. Mailand 1845. Inhalt des Appendix: Analisi di alcune equazioni trascendenti di Paolo Frisiani; Osservazioni della prima cometa di 1844, da Franc. Carlini.

Physik.

Lehrbuch der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung, von Johann August Grunert. Erster Theil. Mit sechzehn Figurentafeln. Leipzig. 1845.

In dem Lehrbuche der Physik, dessen erster Theil jetzt dem Publikum vorliegt, habe ich eine mathematische Darstellung der Physik zu geben versucht, so weit dies mit Hülfe der Lehren der Elementar-Mathematik möglich ist, und habe mich dabei möglichster Strenge befleissigt. Der Inhalt des ersten Theils ist folgender: Einleitung. — Von den Körpern überhaupt. — Von den mechanischen Wissenschaften im Allgemeinen; Grundbegriffe der Statik oder der Lehre vom Gleichgewichte. — Von dem Gleichgewichte zwischen Kräften, die an einem festen Systeme von Punkten wirken. — Vom Schwerpunkte. — Von der Reibung oder von der Friction. — Von den einfachen Maschinen (Hebel, schiefe Ebene, Rad an der Welle, Keil, Schraube, Seilmaschine, Gelenk oder Kniepresse). Von einigen zusammengesetzteren Maschinen (verschiedene Winden und Haspel, Rollenzug, Flaschenzug, Schraube ohne Ende, Wagenwinde, Räderwerk). — Von der Wage (und deren verschiedenen Arten). — Von der Stabilität. — Von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung (mit Einschluss der zusammengesetzten Bewegung). — Von der stetig gleichförmig beschleunigten Bewegung überhaupt und von den Gesetzen des Falls schwerer Körper insbesondere. — Die Ballistik oder die Lehre von der Wurfbewegung. — Von dem Falle schwerer Punkte auf geraden

und krummen Linien. — Die Lehre vom einfachen oder mathematischen Pendel (wobei in strenger elementarer Darstellung nicht bloss wie gewöhnlich bis zum ersten, sondern bis zum zweiten Gliede der aus der höheren Mechanik bekannten unendlichen Reihe fortgegangen wird). — Von den Quantitäten der Bewegung, von d'Alemberts allgemeinem Princip der Mechanik, und von der Atwoodschen Fallmaschine. — Von der Schwingungsbewegung fester Körper um feste horizontale Axen, von den Momenten der Trägheit und von dem zusammengesetzten oder physischen Pendel. — Versuche mit dem Pendel und Resultate, welche sich aus denselben ziehen lassen. (Anhang: Vom Reversionspendel und einigen bei Pendelversuchen überhaupt nothwendigen Correctionen und Reductionen). — Von der gleichförmigen Bewegung im Kreise und von der Schwungkraft im Kreise. (In einem Anhange zu diesem Kapitel sind einige von gewissen bestimmten Voraussetzungen ausgehende, was man bei diesem Anhange ja nicht unbeachtet lassen darf, elementare Betrachtungen über die Schwere im Allgemeinen und die Pendellängen auf der sphäroidischen Erde, und über deren Abplattung angestellt, welche nur einen Vorschmack von den diese Gegenstände betreffenden höheren Untersuchungen geben sollen, aber in der Art und Weise, wie sie hier angestellt worden sind, und unter den Voraussetzungen, welche denselben ausdrücklich zu Grunde gelegt worden sind, wohl als völlig streng betrachtet werden dürfen. Einen höheren Zweck hat dieser Anhang durchaus nicht.). — Von der Centralbewegung und von den Centralkräften im Allgemeinen. (In diesem Kapitel bin ich bis zu dem Gesetze der allgemeinen Schwere fortgegangen, und habe eine möglichst deutliche und strenge, aber ganz elementare Darstellung desselben zu geben versucht.). — Die Lehre vom Stosse. I. Gesetze des Stosses unelastischer Körper. II. Gesetze des Stosses elastischer Körper. — Von der Wärme. (Allgemeine Wirkungen der Wärme, Thermometer und dessen verschiedene Arten, Correction des Thermometers, Pyrometer und dessen verschiedene Arten, Maximum- und Minimum-Thermometer, Thermometrographen, Ausdehnungs-Coefficienten und deren Bestimmung, rostförmige Compensationspendel und deren Berechnung, Metall-Thermometer von Jürgensen oder Holtzmann, Winnerl und Breguet, Benutzung desselben Princips zur Compensation der Uhrpendel und der Chronometer, Quecksilberpendel und deren genaue Berechnung, specifische und relative Wärme, Mischungsmethode, Schmelzungsmethode mit Einschluss der latenten Wärme und des Eiscalorimeters, Abkühlungsmethode oder Erkaltungsmethode, Benutzung der specifischen Wärme der Metalle zur Bestimmung sehr hoher Temperaturen, Wärmequellen, strahlende Wärme, Differentialthermometer und deren verschiedene Arten, Intensität der Wärme, verschiedene Versuche). — Von dem Gleichgewichte tropfbarer Flüssigkeiten oder die ersten Gründe der Hydrostatik (in ziemlich ausführlicher Darstellung, namentlich auch von schwimmenden Körpern und vom Metacentrum). — Von den Capillaritätserscheinungen. — Einige der wichtigsten Gesetze der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten oder die ersten Gründe der Hydraulik (Stromquadrant). — Von den ausdehnsamen Flüssigkeiten. (Hierbei natürlich in ausführlicher Darstellung von den verschiedenen Arten des Barometers und der Luftpumpe, auch von

den verschiedenen Luftarten und deren Entwickelung, Eudiometer). — Von der Verdunstung. — Von der Hygrometrie. — Von dem Höhenmessen mit dem Barometer. — Von der Bestimmung des specifischen Gewichts. (Völlig strenge und sorgfältige mathematische Darstellung dieser höchst wichtigen Lehre, mit fortwährender Berücksichtigung der nöthigen Correctionen und Reductionen).

Alle diese Gegenstände sind einer so viel als möglich strengen, aber völlig elementaren mathematischen Betrachtung unterworfen worden, und den ganzen übrigen Theil der Physik, nämlich die Lehre von der Electricität, dem Galvanismus, Magnetismus, Electromagnetismus, die Lehre vom Schall und vom Lichte wird nebst einer kurzen Darstellung der Meteorologie und der im Luft-Kreise vorkommenden Licht-Erscheinungen der hoffentlich bald erscheinende zweite Theil dieses Werks enthalten.

Weil ich der Meinung bin, dass Niemand physikalischen Unterricht ertheilen sollte, der sich nicht vorher mit einer solchen streng mathematischen, aber elementaren Darstellung der Physik, wie dieselbe in dem vorliegenden Werke zu geben versucht worden ist, vertraut gemacht hat, worüber ich mich in der Vorrede ausführlicher ausgesprochen habe, so gehört es natürlich nicht zu meinen geringsten Wünschen, dieses Werk namentlich auch von angehenden Lehrern der Physik nicht unbeachtet gelassen zu sehen. Dass in demselben mehr als in den meisten andern Lehrbüchern der Physik über Maschinenlehre u. dgl. vorkommt, hat seinen Grund zum Theil darin, weil dieses Werk zugleich auch die dritte Abtheilung meines Lehrbuchs der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt bildet; ausserdem halte ich aber solche mehr praktische Dinge auch für allgemein lehrreich, und würde dieselben auch ohne den vorher erwähnten, mehr speciellen Zweck nicht von der Aufnahme in dieses Lehrbuch der Physik ausgeschlossen haben. G.

Müller, Dr. F., Grundzüge der Krystallographie. Mit 123 in den Text eingedruckten Holzschnitten. 8. Braunschweig. 1845. 12.ggr.

Haldat, Histoire du magnétisme dont les phénomènes sont rendus sensibles par le mouvement. In 8. plus une pl. Nanci. 1845.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont, Conservator der Königl. Sternwarte bei München.

Jahrgang 1844. XI. Heft. Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Frühlings-Aequinoctiums 1844 von Brüssel, Rennes, Lyon, Valenciennes, Alais, Dijon, Toulouse, Greenwich, Luzern, Utrecht, Amsterdam, Deventer, Leuwarden, Gröningen, Prag, Angers, Thouarcé, Cracau, Lemberg, Marseille, Frankfurt am Main, Parma, Mailand, Genua, Triest, Florenz, Neapel, Aoste, Mästricht, Warschau, Rom, St. Etienne, München. — Meteorologische Beobachtungen in Leipzig im Jahre 1843 von Hrn. Prof. Möbius. — Meteorologische Uebersicht der Witterung in Aschaffenburg 1843 von Hrn. Prof. Dr. Kittel. — Kurze Beschreibung der Sternwarte des

Hrn. Freiherrn v. Senftenberg in Senftenberg, von dem Conservator Hrn. Prof. Hackel. — Température elévée éprouvée à Parme depuis le 8 jusqu' au 17 de Juin 1844, avec les résultats des quatorzes années précédentes 1830—1843. Note communiquée par M. A. Colla, Directeur de l'Observatoire de l'université. — Beobachtungen des meteorologischen Vereins im Grossherzogthume Baden, zusammengestellt und mitgetheilt von Hrn. Ph. Stieffel, Prof. an der Polytechnischen Schule in Carlsruhe. — Magnetische Terminbeobachtungen in Kremsmünster 1842 und 1843 von Hrn. M. Koller, Director der Sternwarte. — Zusammenstellung der im Jahre 1842 in Hohenpeissenberg, Landsberg, München, Dilingen, Gunzenhausen, Burglengenfeld, Ansbach, Neustadt an der Aisch, Würzburg, Hof, Cronberg und Stuttgart beobachteten starken und anhaltenden Winde. — Zusammenstellung der im Jahre 1843 in Hohenpeissenberg, München, Dilingen, Gunzenhausen, Burglengenfeld, Ansbach, Neustadt an der Aisch, Stuttgart, Carlsruhe, Hof, Bensberg und Cronberg beobachteten starken und anhaltenden Winde. — Observationes meteorologicae in Specula Mediolanensi institutae a Joh. Capelli, II. Astronomo Adjuncto. — Vermischte Nachrichten.

Jahrgang 1844. Heft XII. Magnetische und meteorologische Beobachtungen, angestellt an der Königl. Sternwarte bei München während der Monate April, Mai und Juni 1844. — Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Sommer-Solstitiums 1844 von Alais, Dijon, Leuwarden, Utrecht, Deventer, Amsterdam, Gröningen, Frankfurt am Main, Valenciennes, Toulouse, Luzern, Thouarcé, Lyon, St. Etienne, Mont Pilat, Greenwich, Prag, Senftenberg, Parma, Mailand, Genua, Florenz, Triest, Genf, St. Bernard, Aosta, Marseille, Cracau, Lemberg, Warschau, Bern, Gent, Luxemburg, Makerstoun, Kremsmünster, München. — Nachtrag zum Frühlings-Termin 1844 von Genf, St. Bernard, Bern, Gent, Luxemburg, Makerstoun, Kremsmünster. — Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Herbst-Aequinoctiums 1844 von Brüssel, Toulouse, Thouarcé, Alais, Genève, St. Bernard, Parma, Triest, Genua, Florenz, Bologna, Mailand, Luzern, Frankfurt a. M., Cracau, Amsterdam, Gröningen, Deventer, Utrecht, Leuwarden, Faulhorn, Valenciennes, Sexfontaines (haute Marne), Kremsmünster, Prag, Senftenberg, Bern, Gent, Rom, Neapel, Aosta, Madrid, Lausanne, Domaine de Rousseau, München, Marseille. — Nachtrag zum Frühlingstermin 1844 von Lausanne, Kremsmünster, Paris. — Nachtrag zum Sommer-Solstitium 1844 von Brüssel, Rom, Lausanne, Domaine de Rousseau. — Vermischte Nachrichten: Resultate der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen an der Sternwarte in Cracau im Jahre 1844 von Hrn. Prof. Weisse, Director der Sternwarte. — Altitudes géodésiques de quelques points de la Bavière au dessus du niveau moyen de l'océan à Brest etc. Par M. le Commandant Delcros. — Perturbations magnétiques observées dans la déclinaison à l'observatoire de Parme (Italie) pendant les mois d'Avril, Mai, Juin et Juillet 1844. — Temperatur der Quellen in der Umgegend von Dillingen von Hrn. Pollak, k. Lyceal-Professor in Dillingen. — Ueber den Hagel in Steiermark von Dr. Wilh. Gintl, k. k. Professor der Physik zu Grätz. — Beobachtungen angestellt zu Mittenwald vom qu. k. Oberbeamten Wagner, berechnet von Hrn. Prof. Meister im Sep-

tember des Jahres 1844. — Resultate der Barometer- und Thermometer-Vergleichungen, welche auf der im Jahre 1843 durch Kärnten, Istrien, Ober-Italien, Tyrol, Salzburg, Ober-Oesterreich und Böhmen unternommenen Reise ausgemittelt worden sind, von Dr. Wilh. Gintl, k. k. Prof. der Physik in Grätz. — Sechste Fortsetzung der Beiträge des Hrn. Sabine zum Erdmagnetismus. — Magnetische Beobachtungen in Toronto 1840—1843.

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXIII. February 1845. I. On the Theory of Linear Transformations (Cayley). — II. On Magic Squares (Moon). — III. On the Theory of Developments. Part I. (Boole). — IV. Demonstration of a Fundamental Proposition in the Mechanical Theory of Electricity (W. Thomson). — V. On the Reduction of the General Equation of Surfaces of the Second Order (W. Thomson). — VI. On Certain Integral Transformations (Bronwin). — VII. On Certain Continued Fractions (Percival Frost).

Bei der Universität zu Lund sind neuerlich die folgenden akademischen Schriften erschienen:

Första Capitlet af allmän Storhetslära. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i. Math. Resp. Carl Oskar Ruth. Lund 1845. 4.

Prolegomena om Addition. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i. Math. Resp. Corfitz Aug. Beckfriis. II. Lund 1845. 4.

Prolegomena om Multiplication. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i Math. Resp. Carl Erik Schweder III. Lund 1845. 4.

Fortsatta Prolegomena om Multiplication. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i Math. Resp. Gustaf Wilh. Joh. v. Düben. IV. Lund 1845. 4.

Method att utdraga, hwilken rot som helst ur en reel binom. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill. Math. Prof. Resp. Carl Gust. Leijonhufwud. Lund 1845. 8.

Utkast till en allmän theori för binomiska imaginära rötter. Akademisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Professor Resp. Gust. Maur. Posse. Lund 1845. 8.

Om imaginära rötters utdragning. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Math. Elof Wilh. Widegren. Lund 1845. 8.

Om imaginära Cubikrötters utdragning. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill, Resp. Claes August Nerman. Lund 1845. 8.

Arithmetisk Lösning af Casus irreducibilis. Akademisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Christopher Eckerbom. Lund 1845. 8.

Betraktelser öfwer den så kallade Casus irreducibilis. Akademisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Thure Martin Bååth. Lund 1845. 8.

Om Cartesii och Fouriers teckenreglor. Akademisk Afhandling. Praes. Carl Joh. Hill, Resp. Carl Albin Holmberg. Lund 1845. 8.

De Axiomate ad theoriam parallelarum stabiliendam pertinente disputatio. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Math. Prof. Reg & Ord. Resp. Carol. Ad. Th. Lindwall. P. III. Lundae 1845. 4.

Lemmata ad theoriam parallelarum stabiliendam idonea. Präs. Carol. Joh. D:s Hill. Resp. Bened. Nicol. Ad. Lindvall. P. IV. Lundae 1845. 4. med 1 tab.

Conatus Euclidaei axiomatis XII. probandi antiqui. Präs. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Elis Maur. Ullman. P. V. Lundae 1845. 4.

Ueber die Theorie der Parallelen hat Herr Professor Hill zu Lund auch die folgende lesenswerthe Schrift herausgegeben:

Conatus Theoriam linearum parallelarum stabiliendi praecipui, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit Car. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Lundae 1844. 4.

Theoria linearum aequidistantium. Präs. Mag. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Adolph R. Åberg. P. VII. Lundae 1845. 4.

Theoria linearum connormalium. Präs. Mag. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Esaias Laur. Palm. P. VIII. Lundae 1845. 4.

Portatif Apparat för bestämmandet af fasta kroppars längdförändringar till följe af förändrad temperatur. Akademisk Afhandling. Präs. Dr. A. W. Ekelund, Prof. i Fysiken, L. K. W. A.; Förf. J. G. M. v. Gegerfelt. Lund 1845. 8. med 1 plansch.

Ich erlaube mir, die geehrten Leser des Archivs auf den diesem Hefte beigelegten, das Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller, Prof. der Physik und Technologie an der Univ. zu Freiburg i. B. als zweite umgearbeitete und vermehrte Aufl. der Bearbeitung von Pouillet's Lehrbuch der Physik. 2 Bde. betreffenden Prospectus aufmerksam zu machen. G.

XXVI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Elemente der niederen Analysis. Bearbeitet von J. Rogg, Professor der Mathematik am obern Gymnasium in Ehingen. Mit drei Figurentafeln. Ulm. 1845. 1 thlr.

Der Titel dieser Schrift scheint nicht ganz glücklich gewählt zu sein, und könnte leicht einen von dem wirklichen Inhalte derselben verschiedenen Inhalt erwarten lassen. Dieselbe enthält nämlich die gewöhnlichen Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra bis inclusive zu den quadratischen Gleichungen; dann die Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra, sowie auch der gemeinen Arithmetik auf die ebene Geometrie; hierauf die ebene Trigonometrie; und endlich in einem Anhange eine etwas weitere Ausführung der ebenen Trigonometrie, die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, die Lehre von den figurirten Zahlen, das Wichtigste aus der Combinationslehre, die Methode der unbestimmten Coefficienten und deren Anwendung auf die Entwickelung der gewöhnlichen Functionen in Reihen: alles recht deutlich und klar, mehrfach durch Beispiele erläutert, aber ohne besondere Eigenthümlichkeiten, die hier hervorgehoben zu werden verdienten. Druck und Papier sind sehr gut, und ersterer empfiehlt sich namentlich durch seine Zierlichkeit.

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Oldenburg. 1845. 8. 1 thlr. 8 ggr.

Dieses wohl schon aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannte Lehrbuch entspricht nach unserer Ueberzeugung seinem auf dem Titel angegebenen Zwecke auf eine vorzügliche Weise, indem es die Lehren der gemeinen Arithmetik, der Buchstabenrechnung und der Elemente der Algebra mit ungemeiner Deutlichkeit vorträgt und durch eine ziemlich grosse Anzahl zweckmässig gewähl-

ter Beispiele praktisch erläutert, weshalb wir dasselbe auch vorzüglich allen denen, welche die Mathematik zu irgend einem praktischen Zwecke erlernen, empfehlen. In der Lehre von den Gleichungen ist der Herr Verf. mit Recht nur bis zu den quadratischen Gleichungen fortgegangen, da die cubischen Gleichungen doch im Ganzen nur wenige Anwendung finden, und den Beschluss der Schrift macht die Lehre von den Progressionen, von den Logarithmen und die Zinseszinsen-Rechnung. Ungern haben wir die Lehre von den Kettenbrüchen vermisst, da dieselben auch bei praktischen Geschäften oft vortreffliche Dienste leisten können, und eben so wünschenswerth würde uns, schon der sogenannten zusammengesetzten Alligationsrechnung wegen, wenigstens eine kurze Anleitung zur Auflösung unbestimmter Aufgaben gewesen sein, welche der Herr Vf. bei einer wohl zu erwartenden dritten Auflage seiner verdienstlichen Schrift zweckmässig noch einverleiben dürfte. In einem Anhange sind mehrere, vorzugsweise ein theoretisches Interesse in Anspruch nehmende Lehren etwas weiter erläutert worden, nämlich die Lehre von den Zahlensystemen, Einiges aus der Zahlenlehre, die Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine Brüche, die Theorie des Positiven und Negativen, die ausführlichere Theorie der Proportionen, über das sogenannte arithmetisch-geometrische Mittel zweier Zahlen *), eine weitere Ausführung der Lehre von der Elimination, die Theorie des Imaginären mit Rücksicht auf die neueren Ansichten von Gauss über diese Lehre, über das Unendlich-Kleine und Unendlich-Grosse, u. s. w.

Bobillier, Principes d'algèbre. Nouvelle édition. In 8. Chalons-sur-Saône et Paris. 1845. 4. 50.

Entdeckung einer numerischen General-Auflösung aller höhern endlichen Gleichungen von jeder beliebigen algebraischen oder transcendenten Form von A. F. Vogel, Mathematiker zu Leipzig. 1845. 8. 16 ggr.

Der Herr Vf. dieser Schrift scheint mit den neueren, und selbst auch mit den älteren Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen wenig oder gar nicht bekannt zu sein; sonst würde er dieselbe wahrscheinlich nicht geschrieben haben.

Malmstén, C. J., in solutionem aequationum algebraicarum disquisitio. P. 1—4. 4. Upsala. 1845.

(Wir bedauern, diese Schrift noch nicht zu Gesicht bekommen zu haben.)

J Differenziali delle funzioni algebriche e trascendenti si deducono dall'unica legge di derivazione che si manifesta nelle funzioni stresse, pochi cenni di Francesco d. r. Bourelly. Padova. 1844. In 8.

Politische Arithmetik. Anleitung zur Kenntniss und Uebung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen. Ein Handbuch für Staatsbeamte und Ge-

*) M. s. Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. II. S. 824.

schäftsmänner. Von L. C. Bleibtreu, Professor an der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Erste Abtheilung. Heidelberg. 1845. 8. 1 thlr. 4 ggr.

Dieses, wie es scheint, vorzugsweise auf das praktische Bedürfniss berechnete Buch enthält in seiner bis jetzt vorliegenden ersten Abtheilung nach einer kurzen Einleitung über den Begriff der politischen Arithmetik oder Staatsrechenkunst Folgendes: I. Maass- und Gewichtswesen (hier auch vom Nonius, Comparator u. dgl.) II. Finanzwesen. 1. Geldwesen. Erste Abtheilung. Münzen. Erster Abschnitt. Silbermünze. Zweiter Abschnitt. Goldmünze. Dritter Abschnitt. Platinmünze. Vierter Abschnitt. Kupfermünze. Fünfter Abschnitt. Handelswerth der Münzen. Sechster Abschnitt. Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuss. Siebenter Abschnitt. Valvation der Münzen. Zweite Abtheilung. Gold und Silber in Barren. 2. Von den Wechseloperationen. 3. Vom einfachen Zins. 4. Staatsschuldentilgung. 5. Vom Verkehr mit Staatspapieren. 6. Oeffentliche Glücksspiele. III. Zahlenverhältnisse der Bevölkerung. IV. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des menschlichen Lebens. V. Anstalten, welche auf die menschliche Sterblichkeit gegründet sind. 1. Leibrenten und Lebensversicherungs-Anstalten. (Hiermit schliesst die bis jetzt vorliegende erste, bis S. 272. reichende Abtheilung.)

Ueber das bei allen diesen Gegenständen vorkommende eigentlich Praktische oder Technische enthält diese Schrift, wie es uns scheint, viel Lehrreiches, und mehr als sonst in anderen Schriften dieser Art vorkommt. Von analytischen Entwickelungen sind nur die unbedingt nöthigsten gegeben worden. Die letzteren finden aber die Leser unter den neuesten Schriften über politische Arithmetik in hinreichender Vollständigkeit in dem schon im Literarischen Berichte Nr. XXV. S. 371. empfohlenen Buche von Oettinger.

Montag, J. B., Wie mittelst nachstehender höchst einfacher Rechenmaschine oder Rechenscheibe auf mechanischem Wege und ohne die geringste Kenntniss vom Einmal-Eins zu haben das Facit von Additions-, Subtractions-, Multiplications-, Divisions- und Regeldetri-Aufgaben stets richtig und leicht aufgefunden wird. Erfurt 1845. 8. 6 ggr.

Geometrie.

Oppermann, L., Elementair Plangeometri. Copenhagen. 1845. 8. 1 Rbd. 32 Sk.

Laffitte, C., Essai d'une Démonstration du Postulatum d'Euclide, pouvant servir de supplément aux divers cours de géo-

métrie qui fondent la théorie des parallèles sur ce Postulatum. In 8. plus une pl. Paris. 1845.

Lehrbuch der vergleichenden Geometrie oder neue bewährte Methode, die Lehren der Stereometrie in natürlicher Ordnung mit denen der Planimetrie, zugleich in paralleler Weise, darzustellen, von A. Mahistre, Licentiat und Professor der Mathematik an der Normalschule zu Chartres. Aus dem Französischen übersetzt und mit Aufgaben vermehrt von A. Lorey, Kandidat der Theologie und Vorsteher der Realschule zu Weimar. Mit 8 lithogr. Figurentafeln. Weimar 1845. 8.

Dieses Buch ist eine Uebersetzung der folgenden Schrift: Les analogies de la géométrie élémentaire, ou la géométrie dans l'espace, ramenée à la géometrie plane; par A. Mahistre. 2e. édit. Paris 1844. Bekanntlich hat man in neuerer Zeit mehrfach versucht, die zwischen der sogenannten Planimetrie und Stereometrie noch bestehende Scheidewand aufzuheben, und diese beiden Theile der Geometrie als ein wissenschaftlich geordnetes Ganze vorzutragen. Dass man diesen Bemühungen Beifall geben muss, versteht sich von selbst; und eben so leicht ist ersichtlich, dass dieselben, gehörig eingeleitet, zu einem günstigen Resultate führen müssen, da ja doch am Ende die Planimetrie als ein specieller Fall in der Stereometrie, d. h. in der Wissenschaft vom Raume überhaupt, enthalten sein muss. In der in einer deutschen Uebersetzung vorliegenden Schrift des Herrn Mahistre ist, wie man durch deren Titel *) leicht zu glauben veranlasst werden könnte, der so eben kurz angedeutete höhere wissenschaftliche Gesichtspunkt jedoch keineswegs festgehalten worden, indem dieselbe eigentlich nur als ein Lehrbuch der ebenen Geometrie zu betrachten ist, in welchem den einzelnen Kapiteln unter der Ueberschrift von Analogien die entsprechenden Lehren der Stereometrie angehängt worden sind, so dass also in diesem Buche die letztere Wissenschaft nicht als der in wissenschaftlicher Rücksicht höher stehende, die Planimetrie mit umfassende Theil der Geometrie oder der Wissenschaft vom Raume überhaupt, sondern gewissermaassen nur als ein Anhang zur Planimetrie erscheint. Können wir nun auch aus diesen Gründen der vorliegenden Schrift eine höhere wissenschaftliche Bedeutung nicht beilegen, so ist doch auf der anderen Seite nicht zu verkennen, dass bei dem ersten geometrischen Unterrichte es allerdings lehrreich für den Anfänger sein muss, wenn bei dem Vortrage der Planimetrie ihm sogleich gezeigt wird, dass damit die Wissenschaft vom Raume noch keineswegs abgeschlossen ist, sondern dass es noch andere den vorgetragenen analoge Sätze für den Raum überhaupt giebt, welche erstere gewissermaassen in sich schliessen, wobei man sich aber doch auch ja in Acht nehmen mag, dass in den Köpfen der noch rohen Anfänger nicht eine so leicht mögliche Verwirrung entstehe und die Bestimmtheit und

---

*) Der Titel des französischen Originals spricht den Zweck des Verfassers bestimmter aus.

Klarheit der Begriffe verloren gehe. Dieser letztere mehr methodische Zweck scheint dem Verf. auch lediglich bei der Abfassung seiner Schrift vorgeschwebt zu haben, und von dieser Seite muss dieselbe also auch vorzüglich von den Lesern beurtheilt werden.

Ins Einzelne hier einzugehen ist keine Veranlassung vorhanden, da wir viele sonstige Eigenthümlichkeiten oder besonders bemerkenswerthe neue Sätze und Beweise in der Schrift gefunden zu haben uns nicht erinnern, indem dieselbe überhaupt nur die ganz gewöhnlichen Lehren der Planimetrie und Stereometrie enthält. Es fehlen selbst manche Sätze, die zu interessanten Analogien zwischen der Planimetrie und Stereometrie hätten Veranlassung geben können, wie z. B. das Eulersche Theorem von den Polyedern. Gegen die Strenge der Beweise würden wir Manches einzuwenden haben, wenn uns hier ein grösserer Raum verstattet wäre. Bemerken wollen wir daher nur ganz im Allgemeinen, dass wir den strengen Begriff der Gränze und eine durchgreifende Anwendung der Gränzenmethode in dieser Schrift nirgends gefunden haben. Wie man aber ohne diese, für die gesammte Mathematik so höchst wichtige Methode eine strenge Darstellung in der Geometrie und in der Mathematik überhaupt erringen will, ist uns wenigstens unbegreiflich. Natürlich steht und fällt mit derselben auch die strenge Darstellung der Lehre von den Verhältnissen incommensurabler Grössen. Umgangen hat der Vf. die Gränzenmethode durch das gleich zu Anfang eingeschaltete zweite Kapitel: von den unendlich kleinen Grössen und vom Maasse der Grössen überhaupt. Aber gleich der sogenannte Lehrsatz in §. 14.: Zwei endliche Grössen können als einander gleich betrachtet werden, wenn ihr Unterschied unendlich klein ist, und noch mehr der Beweis desselben: In der That wird man zwischen diesen beiden Grössen durchaus keine Ungleichheit aufstellen können, so klein man dieselbe auch annehmen mag, womit die ganze Sache abgethan wird, möchte doch viele Anfänger stutzig machen, und bei manchem weiter Denkenden die so hoch gerühmte Strenge der Geometrie in Misscredit bringen.

Abgesehen hiervon kann aber das Buch seiner oben angegebenen allgemeinen Tendenz wegen minder geübten Lehrern manchen Nutzen und manche Belehrung gewähren, und empfehlen wir es denselben daher zur Beachtung; gehörig mathematisch durchgebildete Lehrer, wie sie in jetziger Zeit zur Freude eines Jeden, der an dem Gedeihen des mathematischen Unterrichts wahrhaften Antheil nimmt, wohl bei Weitem die meisten deutschen höheren Lehranstalten besitzen, werden aber in diesem Buche schwerlich etwas finden, was sie sich nicht selbst auf der Stelle mit Leichtigkeit zu entwickeln im Stande sein sollten. Durch den reichhaltigen Anhang von Formeln und Beispielen zur Berechnung von Linien, Flächen und Körpern (S. 247—S. 332.) hat der Herr Uebersetzer den Werth des Buchs als Unterrichtsmittel, namentlich für die eine mehr realistische Richtung habenden Elementarschulen, erhöhet.

Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie für die obern Klassen höherer Lehranstal-

ten, nebst einem Uebungsaufgaben und Excurse enthaltenen Anhange. Von Dr. August Wiegand, Lehrer der Mathematik und zweitem Collegen an der Realschule im Waisenhause zu Halle. Mit zwei Kupfertafeln. Halle. 1845. 8. 12 ggr.

Die frühern Theile dieses Lehrbuchs sind im Liter. Ber Nr. XIX. S. 289. und Nr. XXII. S. 336. angezeigt. Die dort gerühmte Deutlichkeit gilt auch von dem vorliegenden Theile. Der so leicht zu beweisende Eulersche Satz von den Polyedern ist mit Recht in die Stereometrie selbst aufgenommen, und der Anhang enthält noch manches Lehrreiche und den Zwecken des Unterrichts Förderliche, sowie das Buch überhaupt einen erfahrenen und sich dem Unterrichte mit Liebe hingebenden Lehrer bekundet.

Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive nebst deren Anwendung auf die konstruktive Auflösung von Aufgaben über räumliche Verwandtschaften der Affinität, Collineation etc. Systematisch geordnet und gelöst von Leopold Mossbrugger, Professor an der Kantonsschule zu Aarau. Mit 58 lithographirten Tafeln (in einer besonderen zweiten Abtheilung). Zürich. 1845. 4. 4 thlr. 4 ggr.

In der Vorrede sagt der Herr Vf.:

„Das Ziel, welches ich bei der Bearbeitung dieses Werkchens im Auge hatte, ist ein zweifaches, nämlich:

1. Soll der verhältnissmässig geringe Vorrath von Aufgaben im Gebiete der Géométrie descriptive nicht nur durch neue, bisher noch ungedruckte Aufgaben vergrössert werden, sondern bei deren Auflösung soll immer die rein geometrische Construktion vorherrschend und der mechanische Theil der Zeichnungslehre als untergeordnet erscheinen. 2. Soll dies Werkchen dazu dienen, Resultate und Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes, besonders jene über die neuern Verwandtschaften der Affinität, Collineation, Reciprocität mehr unter construktive Anschauungsformen zu bringen, und so die beiden nach einem Ziele strebenden Zweige der Mathematik, die analytische Geometrie des Raumes und die Géométrie descriptive, welche bisher strenge von einander getrennt wurden, einander näher zu bringen."

Dass man beiden Zwecken seinen vollen Beifall geben muss, versteht sich von selbst, und eben so wenig ist zu verkennen, dass der Herr Vf. namentlich dadurch, dass er die neueren geometrischen Verwandtschaften in den Kreis seiner construktionellen Entwickelungen — man möge uns diesen Ausdruck, der aber in der That nicht ganz unpassend zu sein scheint, verzeihen — gezogen hat, der descriptiven Geometrie in mehrfacher Beziehung eine neue Seite abgewonnen hat, weshalb wir glauben, dass das Werk angelegentlich zu weiterer Beachtung empfohlen zu werden verdient.

Der Druck und die von dem Herrn Zeichnungslehrer Belliger ausgeführten Zeichnungen, die bei einem Werke dieser Art natürlich von besonderer Bedeutung sind, lassen in keiner Beziehung etwas zu wünschen übrig.

Analytische Geometrie des Raumes mit Berücksichtigung der neueren geometrischen Verwandtschaften und zur grössern Verständigung des Werkes erforderlichen Entwickelungen aus der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Selbststudium. Von L. Mossbrugger, Professor an der Kantonsschule in Aarau. Mit acht lithographirten Tabellen. Aarau. 1845. 8. 4 thlr.

Dieses zugleich eine nicht geringe Anzahl dem Herrn Verf. eigenthümlicher Untersuchungen, auf welche in der Vorrede besonders hingewiesen worden ist, enthaltende Handbuch der analytischen Geometrie des Raumes ist jedenfalls eins der ausführlichsten und vollständigsten Bücher dieser Art, welche wir gegenwärtig besitzen, und wird von keinem sich für diese Studien Interessirenden entbehrt werden können. Wir wollen daher im Folgenden den allgemeinen Inhalt desselben etwas näher angeben.

Einleitung. Ueber die Gleichung der Geraden, des Kreises und der Linien des zweiten Grades, nebst deren Discussion. Erstes Kapitel. Betrachtung der Punkte und geraden Linien im Raume. Zweites Kapitel. Von der Ebene und der Verbindung derselben mit Linien und Ebenen. (In diesen beiden Kapiteln kommt ein reicher Schatz von Aufgaben vor, und viele, welche sich in den sonstigen Lehrbüchern der analytischen Geometrie nicht finden; namentlich enthält das zweite Kapitel auch Vieles über die regulären Körper und über die eckigen Körper überhaupt.) Drittes Kapitel. Von der Coordinaten-Veränderung. (Hierbei auch die Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.) Viertes Kapitel. Geometrische Verwandtschaften. *A*. Ebener Systeme. *B*. Betrachtung der geometrischen Verwandtschaften räumlicher Systeme. (Dieses Kapitel ist eins der reichhaltigsten im ganzen Buche.) Fünftes Kapitel. Von den Cylinder-Flächen. Sechstes Kapitel. Von den Kegelflächen. Siebentes Kapitel. Von der Kugelfläche. Achtes Kapitel. Verwandlung der allgemeinen Gleichung der Flächen in solche Formen, die zu Untersuchungen tauglich sind, und von der Beziehung der Oerter der Mittelpunkte zu den Flächen selbst. (Der ganze Inhalt dieses Kapitels kann als dem Herrn Vf. eigenthümlich betrachtet werden.) Neuntes Kapitel. Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades. Zehntes Kapitel. Von den Diametral-Ebenen und der Reduction der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades auf ihre einfachen Formen. (Auch in diesem Kapitel findet sich vieles dem Herrn Vf. Eigenthümliche.) Eilftes Kapitel. Bestimmung der Eigenschaften der Flächen, welche einen Mittelpunkt haben. Zwölftes Kapitel. Ueber die geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Flächen des zweiten Grades. (Auch dieses Kapitel ist dem Herrn Vf. ganz eigenthümlich.) Dreizehntes Kapitel. Geometrische Oerter. Vierzehntes Kapitel. Von den Durchschnitten der Flächen des zweiten Grades, insbesondere in ebenen Curven. Anwendungen dieser Sätze auf Aufgaben und Beispiele. Fünfzehntes Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades, in Beziehung auf ihre gegenseitigen Verwandtschaften.

Wir empfehlen dieses Werk nochmals nicht bloss allen denen, welche sich ausführlicher über die neueren Fortschritte der analytischen Geometrie, belehren wollen, sondern auch allen denen, welche Stoff zu eigenen Uebungen und Untersuchungen suchen.

Praktische Geometrie.

Gaultier, L., Notions de géométrie pratique. Nouvelle édition. In 12. Paris. 1845.

Catonnet, A. J., Traités completes théoriques et pratiques de l'arpentage, de la géodésie moderne etc. Seconde édition. In 12. plus des pl. Amiens. 1845. 3. 50.

Pezelt, Der kleine katadioptrische Kathetometer nebst Anleitung zum Gebrauch desselben. Mit 4 Lithogr. gr. 8. Posth. 1845. 1 thlr. 4 ggr.

Beuther, Fr., Kurze Anweisung zur Linearperspective, mit den nöthigen praktischen Vortheilen, bei deren Anwendung für die ausübende Zeichenkunst. 2. revid. mit 1 Tafel vermehrte Aufl. Kassel. 1845. 18 ggr.

Trigonometrie.

Köller, A. v., Elemente der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Mit einer lithogr. Tafel. Trier. 1845. 8. 8 ggr.

Mechanik.

Die Geostatik als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, sowie zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung von Dr. Moritz Rühlmann, Professor der angewandten Mathematik und Maschi-

nenlehre an der königlichen höheren Gewerbschule zu Hannover. Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit vielen Holzschnitten. Dresden und Leipzig. 1845. 8. 1 thlr.

Dieses die gewöhnlichen Lehren der Statik fester Körper in deutlicher elementarer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Kräftepaare; die Lehre von der Reibung und von den einfachen Maschinen, mit Berücksichtigung der Reibung und der Seilbiegung (wie dies der Vf. nennt); endlich die Lehre von der Festigkeit der Körper enthaltende Werkchen scheint seinem auf dem Titel näher bezeichneten Zwecke recht wohl zu entsprechen, und verdient Praktikern und Lehrern an elementaren technischen Lehranstalten zur Beachtung empfohlen zu werden. Dass in demselben die Anwendung der Differential- und Integralrechnung ausgeschlossen ist, geht schon aus dem Titel hervor. In der Angabe der Quellen, aus denen der Herr Vf. geschöpft hat, hätte derselbe etwas vollständiger sein sollen.

Praktische Mechanik.

Das Dädaleon, eine neue Flugmaschine, vorgeschlagen von Friedrich von Drieberg. Mit 4 Tafeln Abbildungen. Berlin. 1845. 8. 8 ggr.

Die Flugübungen und den ersten freien Ausflug, welche Herr v. Drieberg in §. 35. und §. 36. seiner Schrift den Lesern derselben so angelegentlich und wahrlich mit grosser Zuversicht mit seiner einer Fledermaus ganz ähnlich sehenden Flugmaschine anzustellen empfiehlt, hätte er mit derselben erst selbst anstellen sollen, bevor er dieselbe bekannt machte. Dass dies geschehen, ist wenigstens nirgends ausdrücklich gesagt. Da er seinen Wohnsitz, wenn wir aus seiner früheren berühmten Schrift über den Luftdruck uns recht erinnern, in der uns wohlbekannten Umgegend von Fehrbellin hat, so würde es ihm gewiss an einem See, den er zu diesen Versuchen fordert, nicht gefehlt haben, und eben so wenig ist zu bezweifeln, dass unter seiner Dienerschaft eher als unter dem bescheidenen Hauspersonale eines gemeinen Professors Matheseos vel Physices sich zwei tüchtige Kerle gefunden haben würden, die ihn, in der Maschine steckend, wie er verlangt, durch einen heftigen Wurf von dem an dem Rande des Sees errichteten, etwa 30 Fuss hohen Gerüst in das freie Luftmeer hinaus schleudern, und ihm dadurch den nöthigen Anfang der Schussbewegung mittheilen konnten. Gewiss hätte er sich auch hinreichend in dieser Beziehung erprobten Leuten mit Zuversicht anvertrauen können. Da aber, wie gesagt, nirgends von einer geschehenen Anstellung der Versuche die Rede ist, so müssen wir freilich uns dem Glauben hingeben, dass der Herr Vf. fürchtete, das von ihm selbst S. 6. erzählte Schicksal des Schneiders Berblinger zu Ulm zu theilen, welcher bei den Versuchen mit seiner Maschine, deren Flügel die Gestalt eines hohlen Zuckerhuts hat-

ten, Arme und Beine brach. Da nun andere ehrliche Leute auch nicht gern Arme und Beine brechen, so ersuchen wir den geehrten Herrn Vf. nochmals, selbst nur erst mit wirklich angestellten Versuchen voranzugehen, und geben ihm die Versicherung, dass es, wenn dieselben glücklich ausfallen sollten, an Nachfolgern nicht fehlen wird. Wenn aber der Herr Vf. die Verbindlichkeit, dergleichen Versuche selbst zuerst anzustellen, vielleicht durch die auf S. 6. am Ende sich findende Bemerkung, dass es zunächst hauptsächlich darauf ankomme, eine erweislich richtige Theorie des Menschenflugs aufzustellen, woraus dann die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Menschenflugs leicht zu ersehen sein werde, von sich abzulenken suchen sollte, so müssen wir uns erlauben, ihm bemerklich zu machen, dass es seiner sogenannten Theorie, durch welche er den Nachweis der Möglichkeit des Menschenflugs zu führen sucht, leicht eben so gehen könnte, wie es nach seiner Angabe der Theorie ergangen ist, durch welche Lalande das Gegentheil zu beweisen suchte. Dass die Sache möglich ist, lässt sich am Ende nicht bezweifeln; nur kommt gerade hier Alles auf das Wie? an, und da müssen wir nun einmal auf unserer Forderung wirklich mit Glück angestellter Versuche bestehen

---

Astronomie.

Fladung, J. A. F., Versuch populärer Vorträge über Astronomie ohne Berechnungen. Wien. 1845. gr. 16. 1 thlr. 4 ggr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1848. Auf Veranlassung der Ministerien des Unterrichts und des Handels herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Berlin. 1845. 8. 3 thlr. 8 ggr.

Connaissance des tems ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1848. Publiée par le bureau des longitudes. (Sans additions.) In 8. plus un tableau. Paris. 1845. 5 fr.

Physik.

Buff, Grundzüge der Experimental-Physik, mit Rücksicht auf Chemie und Pharmacie, zum Gebrauch bei Vorlesungen und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Holzschnitten und

ausgeführten Tafeln. 2te Lieferung. Heidelberg. 1845. 8. 16 ggr.
(Die erste Liefer. erschien 1843 und kostet ebenfalls 16 ggr.)

Bouchardat, A., Cours des sciences physiques. Chimie. Seconde édition. In 12. Idem Physique. In 12. Paris. 1845.
Prix du volume de chimie.... 3. 50.
du volume de physique.... 3. 50.

Heussi, Der physikalische Apparat, insbesondere als Lehrmittel in Gymnasien, Realschulen und anderen Unterrichtsanstalten. Parchim. 1845. 8. 8 ggr.

Ueber die Existenz des Luft- und Wasserdrucks. In Beziehung zu den dagegen gemachten Einwürfen des Herrn Baron von Drieberg. Ein Beitrag zur neueren Physik. Von S. Sachs, Königl. Regierungs-Bau-Inspector zu Berlin. Berlin. 1845. 8. 8 ggr.
Bloss die Existenz dieser mit einer sehr devoten Dedication an Seine Hochgeboren den Königl. Preuss. Kammerherrn und Ritter u. s. w. Herrn Baron von Drieberg versehenen Schrift wollten wir hier anzeigen; denn gelesen haben wir dieselbe nicht, das gestehen wir offen. Ueber Dinge, über welche Jeder schon aus seinem physikalischen Gymnasial-Unterrichte in Tertia richtige Begriffe mitbringen muss, und deren Richtigkeit sich handgreiflich nachweisen und im eigentlichen Sinne ad oculos demonstriren lässt, so viel Redens zu machen, scheint uns wahrlich nicht der Mühe werth. Möge der Himmel nur die Lehre von der Luft vor jeder Drieberg-Literatur bewahren!

Röttger, J. L., Falschheit der Lehre vom Drucke der Luft im Gefolge der Beweisführung des Kammerherrn von Drieberg. 8. Halberstadt. 1845. 8 ggr.
(Diese mit der Schrift von Sachs schon den Anfang einer Drieberg-Literatur bildende Schrift ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen.)

Sanson, A. J., Navigation atmosphérique. Explications complémentaires sur le système physique, mécanique etc. de Sanson père et fils; précédees de l'Aéronautique des dames, lettre en prose et en vers libres etc. In 8. plus 2 pl. Paris. 1845.

Biot, Instructions pratiques sur l'observation et la mesure des propriétés optiques appelées rotations, avec l'exposé succinct de leur application à la chimie médicale, scientifique et industrielle. In 4. Paris. 1845.

Daniell, J. F., Elements of Meteorologie; being the Third Edition, revised and enlarged, of Meteorological Essays. 2 vols. 8vo, plates, cloth. 32 s.

Voyage autour du monde, entrepris par ordre du roi par M. Louis de Freycinet, capitaine de vaisseau etc. — Météorologie. 1 vol. in 4. 25. Magnétisme terrestre. 1 vol. in 4. 15.

Vermischte Schriften.

Templeton, W., Taschenbuch für Mühlen- und Maschinenbauer, enthaltend: Decimalbruchrechnung, Tafeln von Quadrat- und Kubikwurzeln, angewandte Geometrie, Ausmessung, Festigkeit versch. Materialien, mechanische Potenzen, Wasserräder, Saug- und Druckpumpen, Dampfmaschinen, Tafeln über das specifische Gewicht u. s. w. Nebst einem Anhange, enthaltend: Umfang, Quadrat, Kubus und Flächeninhalt von Kreisen, Kugeln. — Nach der fünften vermehrten und verbesserten Aufl. aus dem Englischen übersetzt. Nebst einem Anhang zum Gebrauch des Schiebmaassstabes. Mit Holzschnitten und lithogr. Tafeln. Brünn. 1845. 8.

(Enthält viele für den praktischen Gebrauch recht brauchbare Notizen.)

The Mathematician. Number III. On the Transformation of Algebraic Equations. — On the Variation of Parameters. — Approximate Rectification of the Circle. — Fundamental Functions of Two Arcs. — Propositions on the Conic Sections. — On the Theory and Application of Poles and Polars. — Horner on Algebraic Transformation. — Equation of the Parabola referred to two Tangents. — On the Function $\Gamma(x+1)$. — Solutions of Mathematical Exercises. — Mathematical Exercises (*continued*). — Note on Probability. — On the Formation of Numerical Equations having nearly equal Roots. — On the Theory of Coordinates.

Number IV. Modern Geometry. Anharmonic Ratio. Section of Involution. — On a case of Elimination. — Properties of the Spherical Triangle. — On a Principle in the Theory of Probabilities. — On the Transformation of Algebraic Equations. — On Definite Integrals. — Properties of the Parabola. — Mathematical Exercises (*continued*). — Solutions of Mathematical Exercises.

Number V. Solutions of Mathematical Exercises (*continued*). — On the Imaginary Expressions for $\sin x$ and $\cos x$. — Poles and Polars in Space. — Modern Geometry (*continued*). — Mathematical Note. — Application of Algebra to the Modern Geometry. — Decomposition of Rational Fractions and Summation of Infinite Series. — Mathematical Exercises (*continued*). — Solutions of Mathematical Exercises.

Number VI. Poles and Polars in Space. — Propositions on the Conic Sections. — Application of Algebra to the Modern Geometry. — On the Transformation of Algebraic Equations. — On the Equilibrium of Roofs. — On the Reduction of certain Integrals to more simple Forms. — Developement of Poisson's method of finding the Resultant of two equal Forces. — Horner on Algebraic Transformation. — Mathematical Notes. — Formulae for Right-Angled Spherical Triangles deduced in succession. — Solutions of Mathematical Exercises. — Mathematical Exercises (*continued*). — Collection of Miscellaneous Exercises in Geometry for the use of Seminaries and private Students.

(Nr. I. und II. s. m. Literar. Ber. Nr. XXIII. S. 356.)

XXVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Simon Stevin. Par Mr. A. Quetelet.

Durch diese kleine Schrift über seinen Landsmann Simon Stevin hat Herr Quetelet einen sehr dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik geliefert, weshalb ich die Leser des Archivs auf dieselbe aufmerksam zu machen nicht verfehle. Besonders interessant ist aber auch die nächste Veranlassung zu der Herausgabe dieser Schrift, welche ich im Folgenden Herrn Quetelet selbst erzählen lassen werde, weil dabei die Leser des Archivs nur gewinnen können.

Je visitais un jour — sagt Herr Quetelet am Anfange seiner Schrift — en compagnie d'un des savants les plus destingués de notre epoque, la magnifique salle de réception de l'université de Gand. Nous en admirions les proportions élégantes; mais nous exprimions en même temps nos regrets que la sculpture ne fût pas encore venue en aide à l'habile architecte, pour compléter son beau monument. L'imagination, après avoir erré librement sur un ensemble harmonieux, a besoin de s'arrêter aux détails, et surtout de trouver des objets qui soutiennent son essor par de grandes pensées. On n'aime point à trouver un palais désert; et les hommes qui peuvent mieux en faire les honneurs sont ceux qui, dans la succession des temps, ont répandu le plus d'éclat sur leur patrie. „Je regrette, dit M. Arago, car c'était le noble visiteur que j'avais l'honneur d'accompagner, je regrette qu'une aussi belle salle ne soit pas animées par les statues de vos hommes les plus distingués dans les sciences et les lettres; ce serait ici leur place, et je vois avec plaisir que l'architecte y a pensé.“ — „Il nous serait peut-être difficile de peupler cette salle comme vous l'entendez, dit en souriant la personne qui voulait bien nous servir de guide.

Dans les sciences physiques et mathématiques, par exemple, qui prendrions nous pour représentant?" — „Qui? repartit vivement l'astronome français, qui? mais Simon Stevin, le véritable auteur d'une des belles découvertes dont on fait honneur à l'un de mes compatriotes les plus illustres, à Pascal! N'eût il trouvé que la loi des pressions des liquides sur les parois des vases, le savant brugeois devrait avoir sa statue dans ce palais."

Cette statue s'élèvera en effet. Simon Stevin, malgré ce qu'en ont dit les étrangers, n'a point été oublié de ses compatriotes. Sa statue fera l'ornement et l'orgueil de sa ville natale, dont luimême était fier, car c'était le seul titre qu'il prit dans ses ouvrages, sur la première page desquels on lit ces mots si remarquables dans leur simplicité: Par Simon Stevin de Bruges.

Nachdem Herr Quetelet nach dieser Einleitung die verschiedenen Arbeiten und Entdeckungen Simon Stevins namhaft gemacht und näher charakterisirt hat, sagt er gegen das Ende der Schrift:

Tant de travaux et de succès dans des branches si diverses, tant de découvertes scientifiques et d'inventions utiles expliquent suffisament la reconnaissance des compatriotes du géomètre brugeois, et justifient l'honneur insigne que lui fait sa ville natale en lui erigeant une statue sur l'une de ses places publiques. Cet honneur décerné plus de deux siècles après sa mort, l'a été spontanément et pendant que l'étranger croyait que jusqu'au nom Simon Stevin avait été oublié dans sa patrie.

Bruges s'est montrée digne d'avoir donné le jour aux deux plus grands géomètres qu'ait produits la Belgique, à Stevin et à Grégoire de Saint-Vincent. Le monument qu'elle érige non loin de la statue de l'inventeur de la peinture à l'huile montre qu'elle apprécie les sciences à l'égal des beaux-arts, et qu'elle a su puiser avec un égal succès à ces deux sources d'illustration.

Eine sehr dankenswerthe Zugabe zu der kleinen sehr splendid gedruckten Schrift bilden die wohl gelungenen Bildnisse Stevins und des Fürsten Moriz von Nassau, in dessen Diensten bekanntlich Stevin stand, so dass es gewiss Niemandem gereuen wird, sich in den Besitz dieser Schrift gesetzt zu haben, wobei wir jedoch bemerken müssen, dass wir freilich nicht wissen und auch aus ihr selbst nicht entnehmen können, ob sie überhaupt auf dem Wege des Buchhandels zu beziehen ist. G.

Arithmetik.

Boltshauser, H.: Die Grundlehren der Algebra, theoretisch entwickelt, mit Beispielen und Aufgaben. Mit besonderer Rücksicht auf den Gebrauch in Schulen bearbeitet. gr. 8. Solothurn. 1845. 1 Thlr.

Boltshauser, H.: Resultate der im Vorstehenden enthaltenen Beispiele und Aufgaben. gr. 8. Ebend. 9 ggr.

Organon der gesammten transcendenten Analysis. Von Dr. E. H. Dirksen, ordentlichem Professor an der Friedrich - Wilhelms - Universität und ordentlichem Mitgliede der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin. Erster Theil. Transcendente Elementarlehre. Berlin. 1845. 8. 4 Rthlr.

Ueber ein Werk, welches, wie das vorliegende, offenbar nur die Frucht eines langjährigen angestrengten Nachdenkens sein kann, und den wissenschaftlichen Eifer seines Verfassers in dem schönsten Lichte erscheinen lässt, in einem Blatte, wie dieser Literarische Bericht ist und sein soll, ein in jeder Beziehung gehörig begründetes Urtheil abgeben zu wollen, würde anmaassend sein, weshalb wir uns mit den folgenden allgemeinen Andeutungen begnügen müssen, welche bloss den Zweck haben, die Leser des Archivs einigermaassen auf den richtigen Standpunkt zu stellen, aus welchem sie dieses Werk zu beurtheilen haben.

Auf den ersten Blick stellt sich im Allgemeinen heraus, dass, so wie einige andere neuere Schriften, auch dieses Werk aus dem tief und lebhaft gefühlten Bedürfniss einer strengeren Begründung der Analysis, insbesondere aber, und zunächst, der Theorie der Reihen, hervorgegangen ist, und in seiner ganzen eigenthümlichen Fassung mehr noch als die meisten andern Werke von ähnlicher Tendenz dem alten, leider nur noch zu häufig herrschenden Schlendrian kräftigst entgegen tritt. Freilich werden die eifrigen Anhänger vieler sogenannter eleganter analytischer Theorien, wie z. B. der Methode der unbestimmten Coefficienten, des allgemeinen polynomischen Lehrsatzes oder gar des Infinitinomiums, des allgemeinen Reversionsproblems und verschiedener dahin gehörender Theoreme, so wie überhaupt fast der ganzen sogenannten combinatorischen Analysis, dieselben in diesem Werke vergeblich suchen, dagegen aber fast auf jeder Seite mit dem ihnen unleidlichen — aber dessenungeachtet für die gesammte Analysis im höchsten Grade wichtigen und ganz unentbehrlichen — Begriffe der Gränze gequält werden, und daher, wie wir im Geiste voraussehen, bei der Durchsicht desselben hin und wieder bedenklich den Kopf schütteln. Wer es aber wagt, wie wir — ursprünglich ganz im Geiste der combinatorischen Analysis gebildet — es vor nun ungefähr zwanzig Jahren in der That selbst gewagt haben, den grössten Theil des früher Erlernten auf einige Zeit von sich zu werfen, und das Studium der Analysis in einem Werke wie das vorliegende gewissermaassen von vorn anzufangen — was freilich in Betracht der früher schon aufgewandten Zeit und Anstrengung keine Kleinigkeit ist, und eine nicht geringe moralische Kraft erfordert — wird zwar der ihm ganz ungewohnten Betrachtungsweise wegen anfangs auf Hindernisse und Schwierigkeiten mancherlei Art stossen, am Ende aber gewiss mit der grössten Achtung vor den Bestrebungen der neueren Analysis, und, was die Hauptsache ist, wahrhafter Bereicherung und Berichtigung seiner analytischen Anschauungsweise und Kräftigung seines analytischen Scharfsinns von dem Werke scheiden.

Nur solche völlig vorurtheilsfreie Leser, die den redlichen Willen haben, sich mit der neueren Darstellungsweise der Analysis vertraut zu machen, wünschen wir diesem Werke, und nur solche

Leser verträgt dasselbe seiner Natur nach. Da es übrigens durchaus nur elementare Kenntnisse voraussetzt, so bietet sein Studium auch keine andern Schwierigkeiten dar, als solche, die von der Natur der Sache unzertrennlich sind. Eine scharfe Bestimmung und Zergliederung der Begriffe in ihre kleinsten Theile gehört zu den wesentlichsten Vorzügen desselben, und dass der Begriff der Gränze und die Lehre von den unendlichen Reihen, namentlich von deren Convergenz und Divergenz und den Rechnungsoperationen mit denselben, so wie auch die Lehre von den imaginären Grössen, in ihm eine Hauptrolle spielen, versteht sich für die Kenner der neueren Analysis von selbst. Um aber denselben eine genauere Uebersicht seines reichen Inhalts zu geben, theilen wir im Folgenden die Ueberschriften der Kapitel und einzelnen Abschnitte mit.

Erstes Kapitel. Von den Progressionen, dem Progressionsact und den Reihen. *Zweites Kapitel.* Von den unendlichen Reihen. I. Von den unendlichen Reihen überhaupt, den möglichen, den gegebenen und den vollständig bestimmten unendlichen Reihen, Gleichheit und Ungleichheit der unendlichen Reihen. II. Eintheilung der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. III. Lehrsätze in Betreff der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. *Drittes Kapitel.* Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen der unendlichen Reihen. I. Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen der unendlichen Reihen überhaupt. II. Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen, mit Rücksicht auf näher bestimmte unendliche Reihen betrachtet. *Viertes Kapitel.* Von den allgemeinen Gliedern und den Gränzen der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. Transcendente Grundbestimmungsform der Analysis. I. Von den allgemeinen Gliedern der unendlichen Reihen. II. Von den Gränzen der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. III. Von der transcendenten Grundbestimmungsform der Analysis und den einfachen Transcendenten überhaupt. *Fünftes Kapitel.* Von den convergirenden unendlichen Reihen. I. Von den convergirenden Reihen überhaupt und deren gegenseitigen Beziehungen. II. Lehrsätze in Betreff der hinreichenden Bedingungen der Convergenz und der Divergenz unendlicher Reihen. III. Besondere Erörterungen. *Sechstes Kapitel.* Von einigen expliciten einfachen Transcendenten. I. Von der hyperbolischen Exponentialgrösse. II. Von dem Sinus und dem Cosinus. III. Von den Argumenten der hyperbolischen Exponentialgrösse, des Sinus und des Cosinus, insofern diese selbst als bestimmend angesehen werden. *Siebentes Kapitel.* Von einigen expliciten zusammengesetzten Transcendenten. I. Von dem hyperbolischen Logarithmus. II. Von dem Arcus-Sinus. III. Von dem Arcus-Cosinus. IV. Von der Tangente. V. Von der Arcus-Tangente. VI. Von der Cotangente. VII. Von der Arcus-Cotangente. VIII. Von der Gleichung $w^n = a + bi$ und den Potenzen negativer oder imaginärer Wurzeln. *Achtes Kapitel.* Erörterung einiger anderweitigen Beziehungen zwischen den bisher besprochenen Transcendenten. Den Hauptinhalt dieses Kapitels bilden die Transcendenten $\sin \mu\alpha$, $\cos \mu\alpha$, $\sin^{\mu}\alpha$, $\cos^{\mu}\alpha$, $\operatorname{arc}\sin\alpha$, $\operatorname{arc}\cos\alpha$ und die bekannte Gaussische

Reihe. In eine nähere Angabe des Inhalts desselben können wir aber nicht eingehen, weil wir uns dazu einiger nicht für sich verständlicher Zeichen, die der Herr Verfasser in demselben anwendet, bedienen müssten.

Jedenfalls ist dieses Werk ein sehr wichtiger Beitrag zur der bessern Begründung der Analysis, welcher von Keinem unbeachtet gelassen zu werden verdient; und der aus dem sorgfältigen Studium desselben hervorgehende Gewinn wird unter allen Verhältnissen ein sehr reeller sein, weshalb wir auch dem Erscheinen des zweiten Theiles mit Verlangen entgegen sehen.

Cournot, A. A.: Elementarlehrbuch der Theorie der Funktionen oder der Infinitesimalanalysis. Mit besonderer Beziehung auf ihre Anwendung in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben. Deutsch bearb. von Dr. C. Schnuse. 1. Lief. gr. 8. (mit 8 Figurentafeln). Darmstadt. 1845. 8. Geh. 2 Rthlr. 12 ggr.

Minsinger: Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen der Zahlen, von 1 bis 1000, die Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 100, mehrere oft vorkommende Zahlen, die Primzahlen der Zahlen von 1 bis 1000 etc. 2te verm. Ausgabe. Augsburg. 1845. 4. 9 ggr.

De Aequatione Differentiali $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^m y$, per Integralia definita integranda, Disputatio. P. I. Praes. Mag. Carolus J. Malmsten, Mathem. Inferior. Professor Reg. et Ord. Regiae Acad. Scient. Holm. atque Reg. Societ. Scient. Upsaliensis Membrum et Societ. Philomat. Paris. Correspond. Resp. Ericus Edlund. Upsaliae. 1845.

Geometrie.

Die Probleme der Geraden Linie, des Winkels und der Ebenen Fläche. Von Heinrich Erb, Grossherzogl. Badischem Finanzrath. Heidelberg. 1845. 8. 1 Rthlr.

Als die Haupttendenz dieser philosophisch-mathematischen Schrift ist wohl ein neuer Versuch zur Begründung der Lehre von den Parallelen, und dabei der Grundlehren der Geometrie überhaupt anzusehen. Im Allgemeinen trägt dieselbe mehr den Charakter eines philosophischen Raisonnements, als einer strengen, dem von den griechischen Geometern für alle Zeiten vorgezeichneten Wege folgenden geometrischen Untersuchung. Auf S. 12. sagt der Herr Verfasser, dass er in dieser Schrift mitunter Winken gefolgt sei, die in einer

im Jahre 1821 unter dem Titel: „Zur Mathematik und Logik. Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung. Von Karl Augustus Erb“ erschienenen Schrift enthalten sind.

Schon mehrmals ist in dem Literarischen Berichte erwähnt worden, dass wir uns in demselben der Beschränktheit des Raums wegen auf ausführliche Kritiken von Parallelentheorien u. dergl. nur unter besondern Umständen einlassen können, ein Princip, welches wir auch bei der obigen Schrift um so mehr in Anwendung bringen müssen, weil dieselbe, wie schon erwähnt, zu sehr in's Gebiet des blossen philosophischen Raisonnements hinüber streift.

Darstellende Geometrie von J. Adhemar. Deutsch bearbeitet und bereichert mit den neuesten Fortschritten der isometrischen Projectionslehre, nebst einer allgemeinen Begründung dieser Wissenschaft, von O. Möllinger, Professor an der höheren Lehranstalt zu Solothurn. Solothurn. 1845. 8. mit 1 Atlas 7 Rthlr. 8 ggr.

Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung bei dem Zeichnen technischer Gegenstände, insbesondere jener der Baukunst, der praktischen Geometrie und des Maschinenwesens. Von Johann Hönig, öffentl. ordentl. Professor der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Mit 26 Kupfertafeln. Wien. 1845. 8. 5 Rthlr. 8 ggr.

So wie das in dem Literarischen Berichte Nr. XXVI. S. 386. angezeigte Werk von Mossbrugger, welches sich aber durch verschiedene dort näher angedeutete Eigenthümlichkeiten auszeichnet, liefern auch die beiden vorstehenden, mit demselben fast gleichzeitig erschienenen Werke den erfreulichen Beweis, dass das Studium der darstellenden oder descriptiven Geometrie auch in Deutschland immer mehr Eingang gewinnt, und vorzüglich auf Gewerbschulen und polytechnischen Lehranstalten immer eifriger betrieben wird, wovon der wohlthätige Einfluss auf Künste und Gewerbe sich schon hinreichend gezeigt hat und künftig sich gewiss immer noch mehr zeigen wird. Auch bei dem stereometrischen Unterrichte auf Gymnasien haben wir immer die Anknüpfung der Grundlehren der Perspective und der descriptiven Geometrie sehr zweckmässig und für das Gedeihen des stereometrischen Unterrichts überhaupt sehr erspriesslich gefunden.

Elementare Sätze aus der Coordinaten-Geometrie für zwei Dimensionen nebst ihrer Anwendung bei den Beweisen der interessantesten Theoreme von Rutherford und Fenwick. Aus dem Englischen übersetzt und mit einem Nachtrage versehen von Dr. August Wiegand. Halle. 1845. 8.

Wenn dieser Schrift der Herren Rutherford und Fenwick eine besondere Eigenthümlichkeit soll zugesprochen werden können, so besteht dieselbe, wie es uns scheint, einzig und allein darin, dass die Gleichungen der geraden Linie und der Ebene nicht in der sonst meistens gebräuchlichen Form

$$Ax + By + C = 0$$

und

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

sondern in der Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

und

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

in Anwendung gebracht werden, was aber bekanntlich nicht neu, und wohl zuerst von Lamé in seinem Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie. p. 89. geschehen ist. Nach unserer Ueberzeugung wird der Vorzug der einen oder der andern Methode immer durch die besondere Natur der jedesmaligen Untersuchung bedingt werden, wobei wir aber zugleich im Allgemeinen den älteren Formen

$$Ax + By + C = 0$$

und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

den Vorzug einzuräumen geneigt sind, weil dieselben in der That allgemeiner sind, als die neueren, und nicht auf das Unendliche führen, wenn man den einen oder den andern Coefficienten verschwinden zu lassen genöthigt ist. Dabei verdient aber immerhin die vorliegende kleine Schrift zur Beachtung empfohlen zu werden, weil in der That die besonderen Bequemlichkeiten, welche die in derselben vorzugsweise in Anwendung gebrachten Formen in einzelnen Fällen gewähren, nicht so allgemein bekannt zu sein scheinen, wie sie es verdienen, und die Schrift zur näheren Erläuterung dieses bemerkenswerthen Gegenstandes allerdings ganz geeignet ist.

Lamezan, Gustav, Frhr. v.: Eine in ihren Principien und Resultaten neue Methode zur Auffindung von Curven, welche Eigenschaften eines Grössten und Kleinsten besitzen. gr. 8. Würzburg. 1845. 8 ggr.

(Diese Schrift ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen und wird späterhin weiter besprochen werden.)

Praktische Geometrie.

Die Anfangsgründe des geometrischen Zeichnens. Eine Reihe der wichtigsten im Praktischen vorkommenden Elementarconstructionen. Für den Unterricht in Volks- und Gewerbschulen zusammengestellt von J. H. Knonauer. Zweite Auflage. Zürich. 1846. 4.

Nicht bloss den auf dem Titel genannten Schulen, sondern auch den beiden untersten Klassen der Gymnasien, in denen der geometrische Unterricht meistens noch keine streng wissenschaftliche Form annehmen darf, aber eine Vorbereitung auf denselben doch wünschenswerth und nothwendig ist, glauben wir diese Vorlegeblätter zum geometrischen Zeichnen empfehlen zu dürfen. Die Figuren sind in einer zweckmässigen Grösse ausgeführt und bieten eine hinreichende Mannigfaltigkeit dar, indem sie sich nicht bloss auf gerade, sondern auch auf krumme Linien beziehen. Ein Jeder, wer diese sämmtlich nicht schwierigen Constructionen auszuführen gelernt hat, wird sich dadurch, auch abgesehen von allen sonstigen Zwecken des Unterrichts, eine in vielen Fällen des gemeinen Lebens recht nützliche Uebung erworben haben, welche in keiner Schule, selbst auch in gewöhnlichen Landschulen, ganz unberücksichtigt gelassen werden sollte. Freilich mag dabei die Anschaffung der nöthigen Instrumente hin und wieder hindernd in den Weg treten, wobei aber die vorgesetzte Behörde hülfreiche Hand bieten müsste.

Godebski: Géométrie du Jalon, ou l'art de résoudre les problèmes usuels de géométrie pratique, à l'aide de simples alignements; contenant de plus la théorie élémentaire des transversales rectilignes ainsi que la description des instruments et des moyens ordinaires pour tracer et mesurer des lignes droites, ouvrage consacré à la pratique, in 8vo, accomp. de 5 pl. Brux. 1845. 1 Rthlr. 8 ggr.

Guy, M. P. G.: L'art du géomètre arpenteur, ou Traité de géométrie pratique. Paris 1845. 3 Fr. 50 C.

Stampfer, S., Prof. der prakt. Geometrie am k. k. polyt. Institute in Wien: Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren und zu andern damit verwandten, beim Eisenbahnbau vorkommenden geometrischen Arbeiten. (nebst 3 Kupfert.). Wien. 1845. gr. 8. Geh. 1 Rthlr. 8 ggr.

Lehrbuch der höheren Geodäsie. Von August Decker. Mit drei Figurentafeln. Neue Ausgabe. Mannheim. Verlag von Heinrich Hoff. 1845. 8. 1 Rthlr.

Wir müssen die Leser des Archivs darauf aufmerksam machen, dass ihnen hier unter dem Aushängeschilde einer neuen Ausgabe nichts weiter geboten wird, als ein längst bekanntes, schon

vor mehreren Jahren erschienenes Buch, welchem ein neuer Titel vorgedruckt worden ist. So wenig wir ein solches Verfahren des Verlegers billigen können, so soll es uns doch auf der andern Seite freuen, wenn auf diese Weise ein grösseres Bekanntwerden des Buches bewirkt wird, weil dasselbe, ohne Neues zu enthalten und auf eine gewisse Vollständigkeit Anspruch machen zu dürfen, diejenigen in verschiedenen grösseren Werken und einzelnen Abhandlungen zerstreuten Lehren der höheren Geodäsie, welche für die gewöhnlichen topographischen Messungen am unentbehrlichsten sind, in einer deutlichen Zusammenstellung enthält.

Trigonometrie.

Scott: Plane Trigonometry and Mensuration, for the use of the Royal Military College. London. 1845. 8vo. bound 9 s. 6 d

Thomson, J.: Elements of Plane and Spherical Trigonometry; with the First Principles of Analytic Geometry. 4th edition, with various additions and improvements. London. 1845. 8vo. cloth. 4 sh.

Praktische Mechanik.

Poncelet: Industrielle Mechanik, deutsch von A. Hallbauer. Complet. Nürnberg. 2 Bände. 5 Rthlr. 12 ggr.

Poncelet, J. V.: Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. 2 Bd. 1. Lief. gr. 8. (nebst 2 lithogr. Taf.). Darmstadt. 1845. Geh. 1 Rthlr. 8 ggr.

Weisbach, J.: Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Ohne Anwendung des höhern Calculs für den Unterricht an technischen Lehranstalten etc. In 2 Theilen. Mit gegen 1000 eingedruckten Holzschnitten. 1. 2. Lieferung gr. 8. Braunschweig. 1845. 1 Rthlr.

Astronomie.

Mädler, J. H.: Der Wunderbau des Weltalls oder populäre Astronomie. 2te vermehrte Aufl. 1 Lief. Berlin. 8 ggr.

Mädler, Dr., J. H.: Ueber die Fixstern-Systeme. Eine Rede. gr. 8. Berlin. 1845. Geh. 4 ggr.

Theoretiska Astronomiens Grunder för Begynnare af J. Bredman, Astronomiae Professor. Med 7 Tabeller in Stentryck. Upsala. 1845. 8. h. 2. R:dr 40 sk.

Ny Tabell för Lunar-Distansers Corrigerande, af J. J. Åstrand. Götheborg. 1845. 1 ark 4:o. h. 8 sk.

Benzenberg, J. F.: Versuche über die Umdrehung der Erde. Aufs Neue berechnet. Düsseldorf. 1845. gr. 8. 8 ggr.

Block: Die gregorianische Zeitrechnung vom Jahre 1845 bis zum Jahre 2000 in einem Tableau dargestellt. gr. Fol. Berlin. 8 ggr.

Sur les corrections de la lunette méridienne, par M. Liagre, capitaine du génie, ancien élève de l'école militaire de Belgique. 4.

Die in dieser aus den Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Brüssel (T. XVIII. des Mém. cour. et Mém. des savants étrangers) abgedruckten Abhandlung gegebene elegante Behandlung des Mittagsrohrs empfehlen wir der Aufmerksamkeit der Astronomen. Wenn auch über diesen wichtigen und interessanten Gegenstand schon viel Vorzügliches geschrieben worden ist, so scheint sich doch die vorliegende Abhandlung durch ihre Eigenthümlichkeit in mehrfacher Beziehung auszuzeichnen.

Sammlung von Hülfstafeln. Herausgegeben im Jahre 1822 von H. C. Schumacher. Neu herausgegeben und vermehrt von G. H. L. Warnstorff, Dr. Phil. und Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften am Progymnasio zu Harburg. Altona. 1845. 8. 2 Rthlr. 12 ggr.

Herrn Dr. Warnstorff ist man grossen Dank schuldig, dass er eine neue Ausgabe des im Jahre 1822 erschienenen, aber schon seit längerer Zeit völlig vergriffenen, ersten Theils der vortrefflichen Schumacherschen Hülfstafeln, welche jedem Beobachter unentbehrlich sind, veranstaltet hat. Dabei darf aber nicht unbemerkt bleiben, dass durch Hinzufügung einer grösseren Anzahl ganz neuer Tafeln das Werk jetzt eine völlig veränderte Gestalt erhalten hat, wie für die Besitzer der älteren Ausgabe aus der folgenden ausführlichen Inhaltsanzeige ersichtlich sein wird.

I. Tafel zur Verwandlung der Sternzeit. — II. Tafel zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit. — III. Bessel's Refractions-Tafeln. — IV. Tafeln zur Reduction auf den Meridian. — V. Tafel der Logarithmen von $m = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ und $n = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^4}{\sin 1''}$. — VI. Logarithmen der Höhenparallaxe der Sonne von 10 zu 10 Tagen. — VII. Tafeln um aus der beobachteten Zenithdistanz des Nordsterns die Polhöhe des Beobachtungsorts zu finden, von A. C. Petersen. — VIII. Tafel für die Mittagsverbesserung von Gauss. — IX. Tafel für die Mitternachtsverbesserung. — X. Tafel die mittlere gerade Aufsteigung der Sonne zu finden, für Par. Mer. — XI. Allgemeine Tafeln für Aberration und Nutation mit der Constante der Aberration = 20″,4451, der Constante der Nutation = 9″,2235 und der Schiefe der Ekliptik für 1850 berechnet von Herrn Hofrath Nicolai. — XII. Längen und Breiten der Hauptsternwarten. — XIII. Tafel zur Verwandlung des Bogens in Zeit. — XIV. Tafel zur Verwandlung der Zeit in Bogen. — XV. Tafel zur Verwandlung der Zeit in Decimaltheile des Tages. — XVI. Längen der Kreisbogen, den Halbmesser = 1 gesetzt. — XVII. Verbesserung des aus correspondirenden Höhen abgeleiteten Mittags, wenn die Höhen des Vormittags und des Nachmittags nur nahe gleich sind. — XVIII. Zeitbestimmung aus Zenithdistanzen, mit der an das Mittel der Zeiten anzubringenden Correction. — XIX. Zeitbestimmung mit dem Passageninstrumente. — XX. Zeitbestimmung aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben Vertikalkreis. — XXI. Reduction der nahe am Meridian beobachteten Zenithdistanzen auf den Meridian. — XXII. Reduction der nahe am Meridian beobachteten Zenithdistanzen der Sonne auf den Meridian. — XXIII. Methode die Breite aus dem Mittel mehrerer von der Culmination entfernten Zenithdistanzen eines Sternes zu finden (Mittheilung des Herrn Hofraths Gauss.) — XXIV. Methode, die Polhöhe aus einer beobachteten Höhe des Nordsternes zu finden. — XXV. Berechnung der Zenithdistanz und des Azimuths aus dem Stundenwinkel. — XXVI. Grundformeln und Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie. — XXVII. Interpolationsmethode für halbe Intervalle der Argumente von Gauss. — XXVIII. Tafel, um für eine bestimmte Polhöhe aus dem Stundenwinkel und der Declination, Azimuth, Höhe und parallactischen Winkel zu berechnen. — XXIX. Tafeln, um Höhenunterschiede aus Barometerbeobachtungen zu bestimmen von Gauss. — XXX. Dieselben von Bessel. — XXXI. Dieselben von Carlini. — XXXII. Verwandlung der Barometerscalen und Thermometerscalen, für Pariser Zoll, Englische Zoll und Millimeter. Ebenso für Réaumur, Centigrad und Fahrenheit. — XXXIII. Tafeln zur Reduction des altfranzösischen Barometers auf 0° Réaumur. — XXXIV. Reduction des metrischen Barometers auf 0° Centigrad. — XXXV. Reduction des englischen Barometers auf 32° Fahrenheit. — XXXVI. Reduction des altfranzösischen Barometers, wenn Scale und Quecksilber eine verschiedene Temperatur haben. (Alle diese Tafeln setzen Scalen von Messing voraus.) — XXXVII. Logarithmen von vier Decimalstellen für Zahlen und trigonometrische Functionen, mit Hinzufügung der Gauss'schen Tafel für Summen und Differenzen.

Man sieht hieraus, wie viel des Nützlichen diese auch äusserlich gut ausgestattete, und mit einer deutsch und fran-

zösisch verfassten Einleitung versehene Sammlung von Tafeln und Formeln enthält, welche kein Beobachter fernerhin wird entbehren können.

Herr Staatsrath v. Struve hat den systematischen Catalog der Bibliothek der Sternwarte Pulkowa aus der Beschreibung der Sternwarte, die bis auf einige Correcturen der Kupfer vollendet ist, besonders abdrucken lassen, und damit den Astronomen ein angenehmes Geschenk gemacht.

Librorum in Bibliotheca Speculae Pulcovensis contentorum Catalogus Systematicus. Ex opere descriptionis speculae seorsim excudi curavit, indice alphabetico et praefatione auxit F. G. W. Struve. Petropoli typis Academ. Scient. 1845. 8vo. (437 Seiten, Vorrede XLVIII.).

Schon des Formats wegen ist dieser Catalog bequemer zu gebrauchen als der in dem grossen Werke abgedruckte, aber noch wesentlicher ist der Vorzug, den er durch das hinzugefügte alphabetische Namenverzeichniss aller darin enthaltenen Schriftsteller, mit Rückweisung auf die Seiten, wo ihre Werke vorkommen, erhalten hat.

Die Bibliothek enthielt im Anfange dieses Jahres

2242 Werke, 3109 Dissertationen, und 60 Himmelskarten, sowohl einzelne als Sammlungen von Karten.

Unter den Werken befinden sich Kepplers Manuscripte in 16 Bänden. Die ganze Sammlung bestand ursprünglich aus 20 Bänden, von denen aber Th. 6, 7, 8 und 12 sich in der Kaiserlichen Bibliothek in Wien befinden. Diese Theile enthalten die 1718 von Hansch herausgegebenen Briefe, und sind nach dem Abdrucke dort deponirt.

Der Vorrede ist ein vollständiges Verzeichniss aller Schriften, die Keppler herausgegeben hat, beigefügt, das 41 Nummern enthält. Sie schliesst mit Berichtigungen zu Lalandes Bibliographie.

Physik.

Die Reform der Naturwissenschaften. Aufforderung zu einer gründlichen Kritik, namentlich der Naturlehre. Von einem Lehrer der Naturwissenschaften. 8. Hamburg. 1845. 12 ggr.

Anfangsgründe der Physik. Von Andreas von Ettingshausen. Zweite Auflage. Mit fünf Kupfertafeln. Wien. 1845. 8. 3 Rthlr. 8 ggr.

Wir freuen uns sehr, aus dem so baldigen Erscheinen einer zweiten Auflage dieses empfehlenswerthen Lehrbuchs der Physik den Schluss ziehen zu können, dass die Zahl der Liebhaber einer

mathematischen Darstellung der Hauptlehren der Physik in Deutschland immer noch gross genug ist, dass ein Werk wie das vorliegende, in welchem die mathematische Seite der Darstellung vorwaltet, sich Bahn zu brechen im Stande ist. Obgleich Verbesserungen überall, wo sie nöthig waren, angebracht sind, so hat der Verf. doch zu vielen wesentlichen Veränderungen keine Veranlassung gefunden; nur wurde es in dem chemischen Abschnitte für zweckmässig erachtet, durchgehends nur von Aequivalenten, nicht aber von Atomgewichten zu sprechen, und auch die Bezeichnung damit in Einklang zu bringen, welchem gemäss statt der in der ersten Auflage gebrauchten Doppelatome H_2, N_2, Cl_2 in der zweiten Auflage bloss die einfachen Buchstaben H, N, Cl als Zeichen der Mischungsgewichte stehen.

Wir können uns daher hier auch begnügen, auf unsere beifällige Anzeige der ersten Auflage im Literarischen Berichte. Nr. XV. S. 237. zu verweisen, und wünschen dem empfehlenswerthen Buche nur immer noch grösseren und allgemeineren Eingang.

Hessler: Handbuch der Naturlehre nach dem Bedarf der Techniker, Künstler und Gewerbtreibenden, und zum Gebrauch beim Unterricht in technischen Schulen, so wie beim Selbstunterricht für praktische Techniker und Gewerbtreibende und Industrielle überhaupt. Mit 500 Holzschnitten. Wien. 1845. 3 Rthlr. 8 ggr.

Handwörterbuch der Chemie und Physik. 2r Band 2te Hälfte. (H—K). Herausgegeben von E. F. August, F. W. Barentin, W. H. Dove, L. F. Kämtz, K. F. Klöden, R. F. Marchand, F. Minding, F. W. G. Radicke, J. A. W. Roeber, L. F. W. A. Seebeck. Mit eingedruckten Holzschnitten. Berlin. 1845. gr. 8. 1 Rthlr. 8 ggr.

Menzzer, Dr. C. L.: die Lehre vom Luftdruck, in ihrem Princip als unlogisch erwiesen, nebst einer Fundamentaltheorie über das Barometer und die Schwere. Halberstadt. 1845. 8 ggr.

Poulsen, Dr. Chr. H.: die Contact-Theorie, vertheidigt gegen Faraday's Abhandlung: „über die Quelle der Kraft in der Volta'schen Säule." Inaugural-Dissertation. gr. 8. Heidelberg. 1845. 6 ggr.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. Herausgegeben von K. Kreil. 5r. Jahrgang. gr. 4. Prag. 1845. 3 Rthlr. 8. ggr.

Simonin, père: Résumé des observations météorologiques faites à Nanci pendant l'année 1844, et de la constitution médicale de la même année. In 8. plus un tableau. Nanci. 1845.

Observations des Phénomènes périodiques. Extrait du Tome XVIII. des Mémoires des l'Académie Royale de Bruxelles. 4.

Diese Abhandlung des Herrn Quetelet enthält die Zusammenstellung der Resultate der bekanntlich von der Akademie der

Wissenschaften zu Brüssel in einem sehr grossen Maassstabe unternommenen und veranlassten Beobachtungen der periodischen Phänomene für 1845.

Pouillet: Note sur le météore de Malaunay. Paris. 1845. 55 Cent.

Bertrand, Alex.: Lettres sur les révolutions du globe. Enrichies de nouvelles notes par Arago etc. Mit 4 Taf. Paris 1845. 6 Fr.

Der physikalische Apparat, insbesondere als Lehrmittel in Gymnasien, Realschulen und anderen Unterrichtsanstalten. Von Dr. J. Heussi, Oberlehrer am Grossherzogl. Friedrich Franz Gymnasium zu Parchim. Parchim und Ludwigslust. 1845. 8. 8 ggr.

Diese kleine Schrift, welche ursprünglich als Abhandlung des Schulprogrammes des Gymnasiums zu Parchim für 1845 gedient hat, ist angehenden Lehrern der Physik an höheren Unterrichtsanstalten, namentlich solchen, deren erstes amtliches Geschäft, wie dies namentlich jetzt bei neuen Anstellungen häufig der Fall ist, in der Anschaffung eines neuen oder wenigstens vollständigeren physikalischen Apparats besteht, zu empfehlen, weil sie in derselben manche beherzigungswerthe Andeutungen finden werden. Mit den in dieser Schrift ausgesprochenen Ansichten über die Stücke, aus denen ein für eine höhere Lehranstalt bestimmter physikalischer Apparat vorzugsweise bestehen muss, erklaren wir uns im Allgemeinen völlig einverstanden. Da die zu Gebote stehenden Mittel meistens beschränkt sein werden, so wird immer vorzüglich der Grundsatz festgehalten werden müssen: Wenig, aber das Wenige gut, was auch ganz die Ansicht des Herrn Verfassers zu sein scheint. Natürlich müssen so viel als möglich alle Hauptlehren und unter denselben wieder vorzugsweise diejenigen bedacht werden, welche besonders eine Begründung auf experimentalem Wege erfordern. Aber auch für die einer mehr mathematischen Begründung fähigen Lehren sind einige zweckmässig eingerichtete Apparate sehr wünschenswerth, weil es immer für die Schüler höchst anregend und belehrend sein muss, wenn ihnen die genaue Uebereinstimmung der auf rein theoretischem Wege gefundenen Resultate mit dem Ergebniss unmittelbarer Erfahrung vor Augen gelegt werden kann. Auch auf einige weniger allgemein bekannte Apparate, wie z. B. auf das Monochord und den Orgelapparat von Lange in Berlin ist in dieser Schrift anfmerksam gemacht worden, was derselben ebenfalls zur Empfehlung gereicht.

Vermischte Schriften.

Die drei neuesten Theile von

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. New Haven.

enthalten ausser vielen anderen bemerkenswerthen naturwissenschaftlichen, vorzüglich auch chemischen Abhandlungen die folgenden mathematischen und physikalischen Aufsätze.

Vol. XLVI. 1844. Nro. I. Art. I. On the Action of Yellow Light in producing the Green Color, and Indigo Light the Movements of Plants; by D. P. Gardner, M. D. p. 1. — Art. XIV. On the Mode of Formation of the Tails of Comets, by Prof. William A. Norton. p. 104. — Art. XVIII. Te Variation and Dip of the Magnetic Needle at Nantucket, Mass.; by William Mitchell. p. 157. — Art. XXII. Notice of Travels in the Alps of Savoy, and other parts of the Pennine Chain, with observations on the phenomena of Glaciers; by James D. Forbes, F. R. S. p. 172.

Nro. II. Art. V. Statement of Elevations in Wisconsin; by J. A. Lapham. p. 258. — Art. VII. Abstract of a Meteorological Journal for the year 1843, kept at Marietta, Ohio; by S. P. Hildreth, M. D. p. 277. — Art. VIII. A Week among the Glaciers; by Dr. H. Allen Grant. p. 281. — Art. XIV. On the Parallelogram of Forces; by Prof. Alexander C. Twining. p. 324. — Art. XVII. On the possible Variation in the Length of the Day, or of the Times of Rotation of the Earth upon its Axis; by Prof. W. W. Mather. p. 344.

Vol. XLVII. 1844. Nro. I. Art. II. Researches in Elucidation of the Distribution of Heat over the Globe, and especially of the Climatic Features peculiar to the Region of the United States; by Samuel Forry, M. D. p. 18. — Art III. A new Method for computing Interest; by Geo. R. Perkins, A. M. p. 51. — Art. VI. Observations upon the Dip of the Magnetic Needle; by Prof. Thomas Hobart Perry. p. 84. — Art. VII. Astronomical Observations performed at the Imperial Observatory of Pulkova; translated from the Bibliothèque Universelle, of October 1843; by Jas. Nooney, Jr., A. M. p. 88.

Nro. II. Researches in Elucidation of the Distribution of Heat over the Globe, and especially of the Climatic Features peculiar to the Region of the United States; by Samuel Forry, M. D. (concluded). p. 221. — Art. II. On the Condition of Equilibrium between Living and Dead Forces; by Robert Henry Fauntleroy. p. 241. — Art. IV. Comparison of Gauss's Theory of Terrestrial Magnetism with observation, by Prof. Elias Loomis; p. 278. — Art. VI. Abstract of a Meteorological Register for 1832—43, kept at Rio de Janeiro; by John Gardner,

Esq. p. 290. — Art. IX. Secular Acceleration of the Moon's Mean Motion; by James H. Coffin. p. 324. — Art. XIII. On the Measure of Polygons; by Prof. George C. Whitlock. p. 380.

Vol. XLVIII. 1845. Nro. I. Art. III. Magnetical Investigations; by the Rev. William Scoresby, B. D. p. 33. — Art. IV. A new way of obtaining the Exponential and Logarithmic Theorems; by Prof. Theodore Strong; p. 36. — Art. XII. New Experiments on the Solar Spectrum; communicated by Prof. Olmsted. p. 137. — Art. XV. Effect of a contracted space in obstructing the Vibrations of a Mercurial Pendulum; by George Baker; p. 156.

Nro. II. Art. II. Remarks by Dr. Hare, on a recent speculation by Faraday on electric conduction and the nature of matter. p. 247. — Art. VII. Abstract of a Meteorological Journal, for the year 1844, kept at Marietta, Ohio; by S. P. Hildreth, M. D. p. 287. — Art. X. Observations made at New Haven, Conn., on the Shooting Stars of the August Meteoric Period, in 1844; communicated by E. C. Herrick. p. 316. — Art. XIII. Idea of an Atom, suggested by the phenomena of weigth and temperature; by James D. Whelpley. p. 352.

Den beiden Nummern eines jeden Bandes sind immer reichhaltige bibliographische Notizen und Miscellen beigegeben, so dass dieses längst bekannte treffliche Journal für einen Jeden, wer sich mit den Fortschritten der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in der neuen Welt bekannt machen, und in fortwährender Bekanntschaft erhalten will, ganz unentbehrlich ist. Wir hoffen ununterbrochen im Stande zu sein, den Hauptinhalt der einzelnen Nummern bald nach ihrem Erscheinen in dem Literarischen Berichte anzugeben, und, was uns besonders bemerkenswerth und unsern Zwecken förderlich zu sein scheint, in dem Archive mittheilen zu können.

Druckfehler.

S. 261. des Archivs setze man Z. 7. hinter olitendra ein Colon und verwandle Z. 8. „on" in „ou".

XXVIII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

In dem neuesten Bande der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien (Drei und zwanzigster Theil. Neuer Folge Dritter Band.) hat Herr Director C. L. von Littrow einige interessante Notizen über Kepler mitgetheilt, welche wir hier ausheben, da die trefflichen Annalen der Wiener Sternwarte, die nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben werden, wohl nicht vielen Lesern des Archivs zu Gesicht kommen dürften.

In der zu Linz erscheinenden Zeitschrift des Museum Francisco-Carolinum für 1842 finden sich mehrere Aufsätze von Herrn G. Kapp über einige Kepler's Aufenthalt in Linz betreffende sehr interessante Urkunden, die man im Archive der ob der ennsischen Stände aufgefunden hat. Ein Facsimile eines Theils einer dieser Urkunden theilt Herr Director von Littrow in dem genannten Bande der Annalen mit, und bemerkt zu besserem Verständniss desselben vorher Folgendes:

Kepler bekleidete die Professur der Mathematik an der Landschaftsschule, seine Hauptbeschäftigung blieb aber die Verfertigung der Rudolphinischen Tafeln, und nebenbei der Landmappen von Oberösterreich. Auf die letztere Arbeit scheinen die Stände besondern Werth gelegt zu haben, weil die vorhandenen Karten von Lazius und Hirsvogel unrichtig und unvollkommen waren. Die Fortschritte, die Kepler seit dem Jahre 1614 in deren Verbesserung gemacht, dünkten den Ständen zu gering, und es scheint, dass sie es an Betreibungen nicht fehlen liessen. Kepler fühlte die Schwierigkeit, zwei so weitläufige Arbeiten, deren eine die andere ausschloss, neben einander zu fördern. Natürlich lag ihm

selbst vorzüglich sein astronomisches Werk am Herzen; der Verfertigung der Landmappen hatte er sich aus schuldigem Gehorsam, wie er sich an mehreren Stellen ausdrückt, unterzogen. Auf eine wiederholte Betreibung der Stände gab er endlich die Antwort in einem Berichte, aus welchem das mitgetheilte Facsimile entlehnt ist. Nachdem er vorausgeschickt, dass die Vornahme der einen Arbeit nothwendig die Vernachlässigung der andern zur Folge habe, handelt er von dem Umfange jeder einzelnen, und spricht sich nun über die Rudolphinischen Tafeln insbesondere in der folgenden jedenfalls sehr charakteristischen Weise aus.

„Von den Tabulis Rudolphj."

„Euer Gnaden werden selber wissen, oder von andern Mathematicis berichtet sein, das in re literaria die Tabulä astronomicae ein wohlbedächtliches Hauptwerkh sein müssen, vnd gar nit wie ein Comedj über nacht anzustellen, oder wie ein poëma auff blossen einfällen bestehe, oder wie ein Commentarius super Aristotelem auß dem Ermel zu schüttelen: sondern man sich vil Jahrlang zu besinnen vnd mit Observationibus vnd calculationibus zu bemühen habe, will man die rechnung also verfassen, das sie auff vil hundert ja tausent Jahre hinder sich vnd für sich gelten solle. Copernicus hat 27 Jahr zugebracht, ehe er sein opus Revolutionum vnd Tabulae ans liecht gebracht. An den Tabulis Rudolphj hatt Tycho Brahe albereitt 38 Jahr, nämlich biß in seine gruben, vnd zwar jederzeit mit Hülff 10. 20. 30. studiosorum gearbeitet. Seine Verrichtung ist dise: Erstlich hatt Er das werkh mit Observationibus (wölche gleichsam vnser Zeug, stein vnd holtz zum gepeu seind) überflüssig versehen; fürs ander die fixas stellas über ein Tausent außgerechnet, vnd jeden stern seinen ort, weil Er denselben jeder Zeit behelt, aufgezeichnet. Drittens hatt Er an den Planeten, wölliche wegen ire vilfaltigen verwirten Bewegung das meiste Kopffbrechen verursachen, auch angefangen, vnd bey son vnd Mond überhaupt das seinige gethan, vnd den bau an dieser seitt auffgeschlagen.

Die übrigen fünff planeten, nit weniger an Son vnd Mond, so vil vnd mehr denn Ich oder Er jemahls gemeint hatt, seind mir gepliben.

An der Sonnen, als dem Eckstein vnd grundfeste zu allen Planeten vnd an dem Planeten Marte hab Ich 9 Jahr gearbeittet, da Ich noch zimliche Hülff von Tauglichen studiosis gehabt, biß ich meine Commentaria de Marte ans liecht gebracht.

Derjenige gelehrte Mathematicus, David Fabricius, der mich vor einem Jahr wegen meines langen Verzugs starrkh angezäpfft vnd je vermeint, Er wolte mit seinen Tabulis fertig sein, der zeucht diß Jahr die schnauppen wider ein, vnd meldet, das sich bey den Sonnenfinsternüssen noch ein anderer merrklicher defectus finde, der biß dahero noch vnerörtert gepliben, ist gewißlich wol an den rechten Knopff kommen."

Die Unterschrift dieses Berichts lautet wörtlich so:

Johan Keppler.

Die Aufschrift ist folgende:

Johan Keplers Mathematici gehorsamstes anpringen.

Hier hat also, was jedenfalls höchst bemerkenswerth ist, unser berühmter Landsmann selbst seinen Namen in derselben Schrift einmal Keppler, und einmal Kepler geschrieben. Daher bemerkt Herr Director v. Littrow mit Recht, dass hiernach die Schreibweise dieses gefeierten Namens der Willkühr anheim gestellt zu sein scheine.

Man ist Herrn Director v. Littrow für diese Mittheilungen grossen Dank schuldig, so wie überhaupt dergleichen Beiträge zur Geschichte der Mathematik sehr dankbar aufzunehmen sind. Bei einem Manne, der wie Kepler ein so sehr bewegtes Leben geführt hat, und seinen Wohnsitz an so vielen verschiedenen Orten aufzuschlagen genöthigt gewesen ist, würden sorgfältige Nachforschungen über sein Leben an diesen verschiedenen Orten gewiss zu manchen nicht unwichtigen Resultaten führen und zu interessanten Mittheilungen Veranlassung geben können. So ist z. B. Kepler bekanntlich auch kurz vor seinem am 15. November 1631 zu Regensburg erfolgten Tode Professor der Mathematik zu Rostock gewesen. Ueber diesen freilich nur sehr kurzen Abschnitt seines Lebens ist, so viel uns bekannt ist, bis jetzt nichts Genügendes veröffentlicht worden. Daher möchten wohl einige Nachforschungen in dem dortigen Universitätsarchive über die nächste Veranlassung seiner Berufung und über sein ganzes dortiges Wirken wünschenswerth sein, welche gern in das Archiv der Mathematik und Physik von uns aufgenommen werden würden.

In Nro. 43. und 44. (ausgegeben den 1. Mai 1845), und Nro. 46—49. (ausgegeben den 10. Juni 1845) der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern hat der Archivar der Gesellschaft, Herr Rudolf Wolf,

> Auszüge aus Samuel Königs Briefen an Albrecht von Haller, mit literarisch-historischen Notizen

mitgetheilt, welche auch in einem besondern Abdruck als für sich bestehende Schrift erschienen sind.

Samuel König, welcher 1712 zu Büdingen geboren wurde und nach mancherlei Schicksalen im August 1757 als Hofrath und Bibliothekar des Prinzen-Statthalter von Holland und Professor der praktischen Philosophie an der Ritterakademie im Haag starb, gehört zwar nicht zu den grössten Mathematikern des vorigen Jahrhunderts, nimmt aber neben denselben keine unwürdige Stelle ein. Am meisten ist er durch seinen mit Maupertuis mit grosser Heftigkeit geführten Streit über das Princip der kleinsten Wirkung und seine in dieser Streitsache unter dem Titel Appel au public erschienene Schrift, seine Elémens de Géométrie, contenant

les six premiers livres d'Euclide. A la Haye. 1758. 4.*) und verschiedene einzelne Abhandlungen bekannt geworden. In den von Herrn Wolf mitgetheilten Briefen giebt König seinem berühmten Landsmanne Albrecht v. Haller unausgesetzt Nachricht über seine Schicksale und wissenschaftlichen Arbeiten und Bestrebungen, vorzüglich natürlich über die erwähnte Streitsache. Dieselben lassen einen sehr hellen Blick in das Treiben der Gelehrten der damaligen Zeit und einiger gelehrten Gesellschaften thun, und sind jedenfalls ein sehr dankenswerther Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Die Sprache ist nicht selten etwas derb, wie z. B. in dem Franequer. 3. juin 1748 datirten Briefe, wo König u. A. Folgendes an Haller schreibt: „On me mande qu'on songe sérieusement à établir à Berne une profession de mathématique, cela est admirable; mais je vois que cela va dans l'ancien train, puisque dans le Gutachten du sénat académique, Mr. Engelhard, par le canal apparement de quelques amis, est mis en avant comme fort capable de poste. De grâce, mon cher Monsieur, puisque Vous avez vu ce que c'est que mathématiques mélez Vous un peu de cette affaire là, puisque Vos amis qui ont du credit s'en rapportent à Votre jugement. Que savent ces Messieurs du Gutachten de Mr. Engelhard et de ses mathématiques, qui sont aussi peu son fait que la médecine est le mien: il ne s'y est jamais appliqué et ne se donne pas pour cela. Il en est de même de Blauner que je connais particulièrement; c'est un très-pauvre diable, absolument sans génie et sans science et absolument incapable d'un tel poste **). Je n'en dis pas autant d'un certain homme du pays de Vaud, nommé Mr. Mégard, qui fait le métier d'avocat à Berne; celui-là est fort habile, au point que j'ai cru pouvoir le recommander à Pétersbourg en qualité de géomètre, mais il n'a pas voulu y aller u. s. w." Von einer andern Art ist der schöne von einem tiefen Gemüth zeugende Brief Franequer. 15. décembre 1747, in welchem er Hallern den Tod seines von ihm erzogenen Bruders anzeigt.

Jedenfalls hat Herr Wolf durch die Sammlung dieser Briefe einen dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik überhaupt und der Geschichte der Mechanik insbesondere geliefert, in welcher letzteren der Streit zwischen König und Maupertuis über das Princip der kleinsten Wirkung, wenn auch die wissenschaftlichen Resultate desselben nicht gross genannt werden dürfen, immer eine nicht ganz unbedeutende Rolle spielen wird.

Sollte sich Herrn Wolf noch Gelegenheit zu ähnlichen Mittheilungen darbieten, so verdient er alle Aufmunterung, dieselben dem mathematischen Publikum nicht vorzuenthalten.

---

*) Es giebt auch eine Ausgabe von 1762.

**) Gerade aber dieser pauvre diable erhielt nach Herrn Wolfs Bemerkung im Jahre 1749 die neue Professur, und war in derselben der Vorgänger des verdienten Tralles, welcher später Akademiker zu Berlin wurde, und als solcher im Jahre 1822 auf einer Reise zur Besorgung eines Pendelapparats in London plötzlich starb.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Wörterbuch der angewandten Mathematik. Ein Handbuch zur Benutzung beim Studium und praktischen Betriebe derjenigen Künste und Gewerbe, welche Anwendungen der reinen Mathematik erfordern. Zugleich als Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik. Im Vereine mit mehreren Gelehrten und Praktikern herausgegeben von G. A. Jahn, Dr. Philos., Lehrer der Mathematik und Astronomie, u. s. w. zu Leipzig. Zweiter Band. M—Z. Mit vier Tafeln Abbildungen. Leipzig. 1845.

Mit dem vorliegenden zweiten Bande, der auch einige Zusätze zu beiden Bänden enthält, ist dieses Wörterbuch der angewandten Mathematik geschlossen. Was in dem Literarischen Berichte Nro. XXII. S. 329. zur Empfehlung des ersten Bandes gesagt worden ist, gilt auch von diesem ganz in derselben Weise bearbeiteten zweiten Bande. Denn wir sind fortwährend der Meinung, dass dasselbe, ohne tiefer in die Wissenschaft einzugehen und überhaupt höhere Ansprüche zu machen, in dem auf dem Titel näher bezeichneten Kreise recht nützlich wirken wird, und als Hülfsmittel zum Nachschlagen gute Dienste leisten kann, wenn man über irgend einen Gegenstand der angewandten oder technischen Mathematik eine augenblickliche nicht tiefer eingehende Belehrung und einige Nachweisungen über die betreffende Literatur verlangt.

Arithmetik.

Lehrbuch der Arithmetik für höhere Bildungsanstalten. Aus historischen und psychologischen Grundlagen für die Zwecke des Unterrichts neu entwickelt von Dr. Theodor Wittstein. Erste Abtheilung. Die Operationen an einfachen rationalen Zahlen. Hannover. 1846. 8 ggr.

In der Vorrede macht der Herr Verfasser vorzüglich auf zwei Eigenthümlichkeiten aufmerksam, durch welche sich dieses neue Lehrbuch der Arithmetik vor andern Lehrbüchern auszeichnet, von denen die erste die wissenschaftliche Systematik, die zweite die Methode der Darstellung, welches Ausdrucks wir uns hier fürs Erste bedienen, nachher aber den eigentlichen Zweck des Herrn Verfassers näher bezeichnen wollen, betrifft.

In der ersteren Beziehung wird das folgende Princip aufgestellt: Jeder Schritt vorwärts im Gebiete der Arithmetik muss entweder ein *Fortschritt in der Reihe*

der Rechnungsarten, oder ein *Fortschritt in der Reihe der Zahlengattungen* sein.

Als die zweite Eigenthümlichkeit bezeichnet der Herr Verfasser die räumliche Auffassung, welcher von ihm durchgängig die arithmetischen Objecte unterworfen werden, worunter er aber keineswegs eine Benutzung der Geometrie für die Zwecke der Arithmetik verstanden wissen will, sondern vielmehr das Charakteristische einer gewissen Klasse von Formen, die Herbart sehr passend Reihenformen nennt, und zu denen auch die Zahl gehört, darin erkennt, dass sich in ihnen der Uebergang von irgend einem Elemente A zu irgend einem andern C nur durch Vermittelung eines zwischenliegenden Elements B ausführen lasse, wozu noch komme, dass diese Form nur eine Dimension habe oder eine einfache Reihe bilde, wenn der Uebergang von A zu C nothwendig stets durch das nämliche B hindurchgehen muss, wie z. B. bei der Zeit und der (reellen) Zahl, dagegen im entgegengesetzten Falle mehrere Dimensionen habe oder Reihen von Reihen bilde.

Wir müssen uns der Beschränktheit des Raumes wegen leider mit diesen wenigen allgemeinen Andeutungen begnügen, wünschen aber, dass diese Schrift, insbesondere auch ihre lesenswerthe Vorrede, von den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten nicht unbeachtet gelassen werde. Besonders begierig sind wir auf die Art und Weise, wie der Herr Verfasser späterhin die Lehre von den imaginären Zahlen seiner räumlichen Auffassung der Zahl überhaupt unterordnen und in sein System einreihen wird, wodurch er sich das wichtige Verdienst erwerben wird, diese Lehre nach den neueren Ansichten von Gauss, welche, wie er selbst sagt, ein Herausgehen aus einer Zahlenlinie in eine Zahlenebene verlangt, in das System der Arithmetik und in ein elementares Lehrbuch derselben zuerst aufgenommen und mit dem ersteren gehörig verflochten zu haben.

Wir empfehlen daher dieses Lehrbuch nochmals zu besonderer Beachtung.

Wiegand: meine Methode, die Sätze der Addition, Subtraction, Multiplication und Division durch Beispiele zu veranschaulichen. Halle. 1845. $4\frac{3}{4}$ ggr.

Heyne: die Vortheile des Gebrauchs der dekadischen Ergänzungen beim Rechnen. Naumburg. 1845. 4 ggr.

Vorlesungen über die Integralrechnung. Vorzüglich nach den Methoden von A. L. Cauchy bearbeitet von Moigno. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Braunschweig. 1846. 8. 3 Rthlr. 8 ggr.

Observations sur la Transformation des Integrales multiples. Par A. F. Svanberg. A Upsal. 1845. 4.

Diese allen denen, welche sich mit der Theorie der bestimmten Integrale beschäftigen, sehr zur Beachtung zu empfehlende Abhandlung ist aus Vol. XIII. der Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsal. besonders abgedruckt. Ueber den Zweck derselben können wir uns nicht besser als mit den folgenden eigenen Worten des Herrn Verfassers aussprechen: „Dans les transformations des intégrales multiples il y a deux espèces distinctes de difficultés, qui

se présentent, dont l'une, savoir la substitution à faire pour le produit des différentielles, a dépuis long-tems été considérée; l'autre relative aux limites, n'ayant jamais été bien discutée, féra l'objet du mémoire présent. En examinant une intégrale multiple, prise entre des limites constantes et finies, on trouve, qu'elle ne peut pas en général après sa transformation être représentée par une seule autre, mais que pour une intégrale double p. e. il en faut quatre, prises entre des limites différentes, pour réproduire la valeur de la proposée. La matière étant abstraite, il nous semble bon d'aborder la question par des considérations géométriques, qui féront voir au lecteur au premier coup d'oeil les difficultés nouvelles et le chemin, qu'il lui faut suivre pour les surmonter. La transformation des intégrales multiples d'un nombre quelconque de variables, prises entre des limites constantes et finies, se faisant d'une manière parfaitement semblable à celle des intégrales doubles, nous croyons pas nécessaire d'y faire application spéciale." Unter mehreren bemerkenswerthen Formeln, zu denen der Herr Verfasser gelangt, befindet sich auch das von Herrn Dr. Schlömilch in diesem Archiv. Thl. V. S. 211. entwickelte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\beta^2+x^2}dx,$$

welches Herr Professor A. F. Svanberg mit Hinweisung auf Herrn Dr. Schlömilchs Arbeit auf folgende Art ausdrückt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{h^2+x^2}dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{-mh}\frac{ds}{s}e^{-s} - \frac{e^{mh}}{2h}\int_\infty^{mh}\frac{ds}{s}e^{-s},$$

woraus mittelst einer leichten Transformation das von Herrn Dr. Schlömilch a. a. O. angegebene Integral folgt.

Wir empfehlen diese Abhandlung nochmals zu besonderer Beachtung.

Geometrie.

Ueber die Methode des geometrischen Unterrichts. Nebst Erläuterungen zu dem Leitfaden für den ersten Unterrricht in der Geometrie. Von Bernhard Becker, Oberlehrer an der höheren Bürgerschule zu Oldenburg. 8. Frankfurt a. M. 1845. 16 ggr.

Diese Schrift ist gegen die Euklidische Methode gerichtet. Wenn der Herr Verfasser auf S. 72. in einer Note sagt: „Freunde und Verehrer der Euklidischen Methode werden das hier vom pädagogischen Standpunkt aus gefällte Urtheil vielleicht etwas wegwerfend finden. Dass die Euklidische Methode vortrefflich wirken kann, wo sie, von einem tüchtigen Pädagogen gehandhabt, wirklich

in das Seelenleben der Jugend eingreift, das soll nicht geleugnet werden," so stimmen wir ihm darin vollkommen bei. Wenn er dann aber hinzufügt: „Allein die Erfahrung bestätigt nur zu sehr, dass diess höchst selten der Fall ist," so müssen wir uns erlauben, ihm bemerklich zu machen, dass, um kurzweg ein solches Urtheil ohne alle Anmaassung fällen zu dürfen, eine sehr grosse, an sehr vielen Orten in verschiedenen Ländern — und zwar nicht bloss in den Ländern deutscher Zunge, sondern z. B. auch in England, Holland, Schweden u. s. w., wo doch auch Mathematik, namentlich Geometrie, sehr viel gelehrt und getrieben wird — gemachte Erfahrung und eine genaue Kenntniss der Individualität sehr vieler Lehrer der Mathematik erforderlich ist, die wir uns in dem Maasse, wie sie um einen solchen Ausspruch geradezu für richtig oder unrichtig erklären zu dürfen, uns erforderlich zu sein scheint, nicht beilegen können.

Abgesehen hiervon ist aber das Schriftchen, von dem Standpunkte des Herrn Verfassers aus, verständig abgefasst und bekundet den erfahrenen, kenntnissreichen und seinem Lehrgegenstande mit der wärmsten Liebe ergebenen Lehrer. Eine Lehrmethode im Allgemeinen charakterisiren zu wollen, hat immer seine eigenthümliche Schwierigkeit, was auch hier der Fall ist. Wir können nur sagen, dass die Methode des Herrn Verfassers eben die ist, welche in neuerer Zeit der alten Euklidischen Methode mehrfach gegenüber gestellt worden ist, und sich wohl zuerst in den Schriften und der Lehrweise Thibaut's — den wir aber hier bloss anführen, um die Methode in der Kürze zu charakterisiren, womit wir übrigens nicht sagen wollen, dass der Herr Verfasser gerade ein besonderer Anhänger desselben sei — am meisten ausgeprägt hat. „Die Grundgedanken," sagt der Herr Verfasser auf S. 73., „die den Lehrer beim Unterrichte in der Geometrie leiten müssen, beruhen einerseits auf der Forderung der Wissenschaft, dass man in das Wesen und Werden des Gegenstandes eindringt und die wesentlichen Gesetze der Geometrie genetisch ableiten müsse, andererseits auf der Forderung der Pädagogik, dass die Seele in ihrer Totalität als Einheit vom Denken und Anschauen aufgefasst, und namentlich die mathematische Phantasie als das eigentliche Element aller mathematischen Thätigkeit geübt werden müsse," worin wir ganz mit ihm übereinstimmen, aber glauben, dass es verschiedene zu diesem Ziele führende Wege gebe.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie von Bernhard Becker, Oberlehrer an der höheren Bürgerschule zu Oldenburg. 8. Frankfurt a. M. 1845. 8 ggr.

Wir halten diesen einfach, aber doch systematisch gegliederten, auf die fortwährende Anschauung und die praktische Anwendung gerichteten Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie, eben für diesen ersten geometrischen Unterricht in den untersten Klassen, also etwa für zehnjährige Knaben, sehr zweckmässig abgefasst, und sind stets der Meinung gewesen, dass dieser erste Unterricht, wenn er einige Frucht tragen soll, vernünftigerweise kaum anders ertheilt werden kann und darf. Für die höheren Klassen von Tertia an machen wir aber andere wissenschaftliche Ansprüche, und halten, wie sehr auch in der vorhergehenden

Schrift und in der Vorrede zu der vorliegenden der Verfasser dagegen sprechen mag, eine Methode, die im Wesentlichen sich an die griechischen Muster anschliesst, in den Händen eines tüchtigen Lehrers für diejenige, welche am sichersten zum Ziele führt, und für die gesammte wissenschaftliche Bildung der Schüler unter allen Umständen die meiste Frucht bringt. Von den Schätzen, welche uns die sogenannte neuere Geometrie darbietet, kann und muss man auch bei der Anwendung dieser Methode allen nur möglichen Gebrauch machen, worauf in diesem Archive schon mehrmals hingewiesen worden ist. Mehrere in demselben mitgetheilte Aufsätze, z. B. von Arndt, Schlömilch u. A., arbeiten darauf hin, und besonders sind den Lehrern, die nicht auf die Quellen zurückgehen wollen, auch die bis jetzt erschienenen, ebenfalls im Wesentlichen in Euklidischem Geiste abgefassten drei Schriften von Adams über die Transversalen, über die harmonischen Verhältnisse und über das Dreieck zu empfehlen, in denen schon ein sehr reiches Material niedergelegt ist. Auch verdient von Neuem auf das im Literar. Berichte. Nr. III. S. 53. angezeigte Schriftchen von R. Wolf, ferner auf die Lehrbücher der Geometrie von Kunze, Müller, Bretschneider u. A. aufmerksam gemacht zu werden.

Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Von C. Adams. Mit zwei Kupfertafeln. Winterthur. 1846. 8. 1 Rthlr. 6 ggr.

Diese Schrift kann als eine Fortsetzung der beiden in Nro. XV. S. 230. und Nro. XXIII. S. 350. des Literarischen Berichts angezeigten Schriften desselben Verfassers über die Lehre von den Transversalen und über die harmonischen Verhältnisse betrachtet werden, und hat auch ganz denselben, namentlich am letzteren Orte ausführlich von uns angegebenen, sehr löblichen Zweck, worüber wir uns daher hier nicht weiter zu verbreiten brauchen. Dieselbe ist in fünf Abschnitte getheilt, welche die folgenden Ueberschriften führen: Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks. Der umschriebene und die vier berührenden Kreise. Die Höhenperpendikel. Die Distanzen der wichtigsten Punkte im Dreieck. Aufgaben. — Die Darstellung ist überall dem Gegenstande völlig angemessen: einfach, deutlich und klar. Die Einmischung der Trigonometrie ist ganz vermieden worden, was nur völlig gebilligt werden kann. Eben so zweckmässig erscheint es bei einer Schrift, wie die vorliegende, dass die Lehrsätze und Aufgaben von einander getrennt worden sind. Jeder Lehrer wird in derselben ein reiches Material von Sätzen finden, von denen er auch häufig sehr zweckmässige Anwendungen als Uebungsaufgaben machen können wird.

Anger: über den Einfluss der Projektionslehre auf die neuere Geometrie. Danzig. 1845. $4\frac{1}{2}$ ggr.

Jacobs: ausführliches Lehr- und Uebungsbuch der Anfangsgründe der ebenen analytischen Geometrie. Braunschweig. 1845. 1 Rthlr. 16 ggr.

Praktische Geometrie.

Heusinger, K. L.: Abhandlungen aus dem Gebiet der Feldmesskunst. Friedberg. 1845. 18 ggr.

Bourns, C.: Principles and Practise of Land Engineering, Trigonometrical, Subterraneous and Marine Surveying, with an Appendix. 2d. edition 1845. 15 s.

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1844. Nro. 26. Nr. 36—38. findet man interessante Notizen zur Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von Herrn Rudolf Wolf. Nro. 36—38. betreffen vorzüglich die von Johann Georg Tralles in den Jahren 1788 bis 1798 ausgeführten Arbeiten. In dem ersteren Jahre maass er eine Standlinie bei Thun. Eine zweite Basis maass er vom 5. bis 13. September 1791 mit einer Ramsden'schen Stahlkette von 100 Pariser Fuss auf dem grossen Moose bei Aarberg zur Belehrung und auf Kosten seines Schülers Hassler, welcher, 1770 zu Aarau geboren, am 21. November 1843 als Chef der amerikanischen Küstenvermessung starb. Durch das Einrücken der Franzosen in Bern im März 1798 wurden die ganzen Arbeiten unterbrochen, und erst in den Jahren 1801 und 1802 dachte man daran, sie durch Tralles fortsetzen zu lassen. Aber bald brach die Helvetik zusammen, der ängstliche Tralles flüchtete nach Neuenburg und kehrte nicht wieder (s. oben S. 412.).

Die erste Periode der Vermessungsarbeiten in der Schweiz schloss sich somit ohne grosse Resultate; aber das eine Verdienst bleibt ihr, das Bedürfniss geweckt zu haben und so die Mutter aller folgenden Arbeiten in diesem Fache geworden zu sein.

Der Herr Verfasser dieser Notizen verdient alle Aufmunterung, dieselben bis zu den neuesten Zeiten, wo bekanntlich so grosse und ausgezeichnete geodätische Operationen in der Schweiz ausgeführt worden sind (m. s. z B. Literar. Bericht Nro. II. S. 32.), fortzusetzen.

Lehrbuch der höheren Geodäsie von Dr. Philipp Fischer, Lehrer der praktischen Geometrie und Mathematik an der Gewerbschule zu Darmstadt. Erster Abschnitt. Enthaltend: die Theorie der Beobachtungsfehler und ihre Ausgleichung durch die Methode der kleinsten Quadrate. Darmstadt. 1845. 8. 20 ggr.

Diese Schrift ist nichts mehr und nichts weniger als ein bei Weitem dem grössten Theile nach ganz wörtlicher Auszug aus Encke's, wie wir wenigstens meinen sollten, unter allen Leuten von Fach sehr bekannt gewordenen *) Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate in den Jahrgängen 1834, 1835,

*) Der Herr Verfasser scheint freilich nach S. VI. der Vorrede das Gegentheil zu glauben.

1836 des Berliner astronomischen Jahrbuchs, mit verschiedenen nicht selten ziemlich willkührlichen und dem richtigen Verständniss eben keinen Vorschub leistenden Auslassungen, und einigen Zusätzen aus ein Paar kleineren Aufsätzen von Bessel und Jacobi, also, wie wir leider nicht anders sagen können, eine ganz unselbstständige Arbeit. Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie kommt auch fast gerade nur das vor, was sich darüber in Encke's Abhandlung findet, und von einem Verhältniss seiner (d. h. des Herrn Verfassers) Arbeit zu der in Nro. XII. S. 183. des Literarischen Berichts angezeigten, nun wohl, wie wir wenigstens hoffen und wünschen, bekannt genug gewordenen trefflichen Schrift Gerlings über denselben Gegenstand, welche, wie jeder Kundige weiss und bei näherer Ansicht sogleich finden wird, als das nicht leicht zu gewinnende Resultat einer langjährigen geodätischen Praxis zu betrachten ist, kann daher gar keine Rede sein, wie ausführlich sich der Herr Verfasser auch in der Vorrede über ein solches Verhältniss verbreiten mag. Wenn der Herr Verfasser aber in der Vorrede S. VI. sagt, dass er ohne die ihm durch Encke's Abhandlung gewährte Erleichterung gar nicht im Stande gewesen sein würde, etwas so ziemlich Vollständiges, und jedenfalls nicht in der Kürze der Zeit, welche er auf seine Arbeit verwenden konnte, zu liefern, so können wir ihm darin nach der vorliegenden Probe nur vollkommen beistimmen.

Kolbe, F.: Sehnentafel, enthält die zur Bestimmung aller Winkel von 0° bis 180° von Minute zu Minute erforderlichen Sehnen für den Halbmesser = 100. Halberstadt. 1845. 4. 8 ggr.

Trigonometrie.

Lauteschläger: Trigonometrische Aufgaben mit vollständigen Auflösungen. Ein Hülfsbuch für Lehrer der Physik. Darmstadt. 1845. 16 ggr.

Mechanik.

Migout und Bergery: theoretisch praktische Anleitung zur Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen. Deutsch von Schnuse und W. Bornhardt. Braunschweig, 1845. 2 Rthlr. 16 ggr.

Optik.

In dem Literarischen Berichte Nro. XIII. S. 200. ist über die optischen Arbeiten des Herrn Professors Joseph Petzval in Wien Bericht erstattet worden. Seit jener Zeit ist über den weiteren Fortgang dieser Arbeiten uns nur erst vor ganz kurzer Zeit eine aus der Wiener Zeitung vom 11. December 1845 entlehnte Nachricht zugegangen, welche wir den Lesern des Archivs, denen wohl nicht allen die genannte Zeitung zu Gesicht kommen dürfte, im Folgenden mittheilen:

„Wissenschaftliche Nachrichten."

„Schon im Jahre 1843 setzte ich das wissenschaftliche Publicum in einer Schrift, betitelt: „Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischen Untersuchungen" in Kenntniss von den unter meiner Leitung stehenden optischen Arbeiten, und versprach darin, wenigstens einige der, die vornehmsten optischen Gebilde: Fernrohr, Mikroskop, Camera obscura, angehenden Berechnungen praktisch ausführen zu lassen, und über die Eigenthümlichkeiten dieser Linsen-Combinationen einen Bericht hinzuzufügen. — Der Ausführung dieses Vorhabens stemmten sich jedoch mancherlei unvorhergesehene Schwierigkeiten entgegen, und ich bin erst jetzt im Stande meinem Versprechen nachzukommen, wünsche jedoch für diese Verzögerung das Publicum dadurch schadlos zu halten, dass ich, den Aufschwung eines edlen Industriezweiges in Oesterreich als Zweck stets im Auge behaltend, nicht nur Sorge trage für die immer gleiche Güte und wo möglich Veredlung der unter meiner Leitung zu Stande kommenden Erzeugnisse, sondern auch von nun an Einfluss nehme auf die Billigkeit der Preise, in so fern wenigstens, als solche mit der Gediegenheit der Arbeiten vereinbar ist. Die hierauf abzielenden Massregeln sind bereits getroffen, und ich habe als zu denselben gehörig nur noch hinzuzufügen: dass ich selbst das Publicum in einfacher und präciser Sprache bei jedem unter meiner Leitung ausgeführten optischen Instrumente in Kenntniss zu setzen gesonnen bin von dem Zwecke, den Eigenschaften und Leistungen desselben, welche Letztere, so oft diess thunlich ist, ohne der Verständlichkeit Eintrag zu thun, genau bestimmt, und in Zahlen ausgedrückt werden sollen; dass ferner (um dem Missbrauche meines Namens vorzubeugen) nur diejenigen Instrumente oder Apparate als nach meiner Angabe ausgeführt zu betrachten seien, die ich in geeigneter Art als solche anerkenne.

Als ersten der auszuführenden Gegenstände habe ich einen solchen gewählt, der einerseits keines grossen mechanisch-optischen Etablissements bedarf, und doch andererseits sich als der interessanteste und edelste der Optik beurkundet, durch seine besonderen Eigenschaften sowohl als auch durch den Umstand, dass er Tugenden eines optischen Instrumentes; Schärfe, Lichtstärke, Gesichtsfeld, die die Anderen nur theilweise benöthigen, seiner Natur nach im vollsten Maasse besitzen muss. Ich meine das Lampen- oder Hydrooxygen-Gas-Mikroskop. Hiermit ist aber

unzertrennlich das optische Beleuchtungs-Problem verknüpft, so dass zu gleicher Zeit dieses einer befriedigenden Lösung entgegengeführt werden musste. — Auch begte ich die Absicht, gleichzeitig die theoretischen Resultate meiner mehrjährigen Untersuchungen zu veröffentlichen. — Allein diesem Vorhaben trat jedoch eine schwere Krankheit, an deren Folgen ich noch leide, hindernd in den Weg, und ich sehe mich jetzt genöthigt, dem wissenschaftlichen Publicum einstweilen dasjenige, was wirklich fertig geworden ist, zu übergeben, nämlich den Beleuchtungsapparat mit einem mikroskopischen Objective grösserer Art. Es ist dieser Beleuchtungsapparat als solcher ein selbstständiges Ganzes, und geeignet zu verschiedenen, dem in photographischer oder optischer Technik Bewanderten leicht einleuchtenden, Anwendungen, unter anderen auch zur Erzeugung der sogenannten Nebelbilder. Ich hoffe, ja ich bin überzeugt davon, dass, gleichwie das von mir angegebene Daguerreotypen-Objectiv zu mehreren nützlichen Entdeckungen die erste Veranlassung wurde, auch dieser Apparat zu neuen Fortschritten in mehreren Kunst- und Industriezweigen, namentlich im Gebiete der technischen Beleuchtungs-Industrie, Gelegenheit geben wird, welche Fortschritte ihrerseits wieder der Wissenschaft zu Gute kommen werden. Obwohl ich nun diesen Apparat als das erste Glied eines wissenschaftlichen Werkzeuges, nämlich der Lampen-Mikroskope, betrachte, so empfängt doch in ihm das Publicum ein Instrument, welches zur Verschönerung jedes socialen Lebens vorzüglich geeignet ist.

Die Ausführung dieser Apparate ist dem Herrn Optiker Waibl (Mariahilfer Hauptstrasse Nr. 40.) übertragen. Er besteht wesentlich aus zwei Theilen, dem bildmachenden und beleuchtenden. Ersterer muss die Eigenschaft haben, von dem abzubildenden Gegenstande ein-achromatisches, genügend scharfes und perspectivisch richtiges Bild zu liefern, d. h. eine gerade Linie an keiner Stelle des Gesichtsfeldes in eine krumme zu verwandeln. Der Andere soll die Eigenschaft haben, nicht etwa Licht zu erzeugen, — wie keine Maschine Kraft erzeugt, — sondern das von irgend einer Lichtquelle, etwa einer Lampe, ausströmende Licht auf das zweckmässigste zu verwenden, und eben dadurch gewissermassen zu vervielfältigen. — Der Quantität nach hängen nun die Leistungen eines solchen Apparates von den Dimensionen desselben ab; der kleinste derjenigen, die bei Herrn Waibl verfertigt werden, hat die Eigenschaft, das Licht einer Lampe, bei welcher der Durchmesser des Brenners einen Zoll nicht überschreitet, zu versechsfachen, oder da bei dieser Grösse die Lampe eine Lichtstärke von etwa 16 Millikerzen besitzt, auf eine dem Apparate gegenüberstehende Wand ein solches Licht zu werfen, wie es von der Stelle aus, wo der Apparat steht, aber ohne denselben 6 Lampen oder 96 Kerzen werfen würden. Mit den Dimensionen des Apparates aber steigt die Lichtstärke desselben im kubischen Verhältnisse, d. h. ein zweimal grösserer Apparat hat achtmal so viel Licht. Verwendet man den Beleuchtungs-Apparat zur Erzeugung von Nebelbildern, so verhält er sich zu den frühern Erzeugnissen dieser Art, wie sich das von mir angegebene Daguerreotypen-Objectiv zu den früheren Erzeugnissen jener Art verhielt: Er leistet nämlich mit der einfachen Oellampe bei gleichen Dimensionen ungefähr dasselbe, was sonst mit dem in Hydrooxygengas glühenden Kalkcylin-

der erzeugt wurde, und liefert mit letzterem Effecte, die, wenn man will, der Intensität des Tageslichtes gleich kommen, ja dieselbe überbieten können. — Zudem erfordert die Handhabung dieses Instrumentes weder besondere Geschicklichkeit, noch aussergewöhnliche Vorsicht.

Herr Waibl, der durch ein k. k. ausschliessl. Privilegium geschützt ist, hat diese Apparate in dreierlei Dimensionen verfertigt, und ist bereit, selbe nach Wunsch in jeder beliebigen Grösse zu liefern. Prof. Dr. Jos. Petzval."

Gewiss würde es vielen Lesern des Archivs angenehm sein, auch die Preise der Apparate, auf welche in der vorhergehenden Anzeige aufmerksam gemacht worden ist, kennen zu lernen, weshalb wir uns erlauben, Herrn Prof. Petzval oder Herrn Waibl hier um deren gefällige Mittheilung zu ersuchen, und werden dann nicht unterlassen, dieselben in diesem Literarischen Berichte zu allgemeiner Kenntniss zu bringen.

Astronomie.

Biot: Traité élémentaire d'astronomie physique. Tom. III. Paris. 1845.

Karsten: kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1846. Rostock. 1845. 8. ggr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte, und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. Drei und zwanzigster Theil. Neuer Folge Dritter Band. Mit drei lithographirten Beilagen. 4. Wien. 1845.

Der Inhalt dieses Bandes ist folgender: Beobachtung der Sonnenfinsterniss vom 8. Juli 1842 zu Oedenburg in Ungarn. Von Herrn Dr. C. Bremiker. — Meteorologische und astronomische Beobachtungen, angestellt zu Prag in den Jahren 1828—1832 von Herrn F. C. Hallaschka, Probst zu Alt-Bunzlau, k. k. wirkl. Hofrath und Director der philosophischen Studien. — Facsimile einer Handschrift von Johann Kepler. — Facsimile eines Fragments aus P. M. Hell's astronomischem Tagebuche auf Wardoe. — Beschreibung des neuen Regulators am Uhrwerke des Refractors und einer Einrichtung zum Einstellen am Stundenkreise bei fortwährendem Eingriffe der Uhr. Von Herrn Chr. Starke, leitendem Werkmeister am k. k. polytechnischen Institute in Wien. — Resultate der Planeten-Beobachtungen am Meridiankreise im Jahre 1842. — Reducirte Beobachtungen des Mondes am Meridiankreise im Jahre 1842. — Beobachtete Mondsterne 1842. — Resultate der Planeten-Beobachtungen am Meridiankreise im Jahre 1843. — Reducirte Beobachtungen des Mondes am Meridiankreise im Jahre 1843. —

Beobachtete Mondsterne 1843. — Sternbedeckungen beobachtet in den Jahren 1843 und 1844. — Berichtigung. — Beobachtungen am Meridiankreise. — Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1843. — Verzeichniss der Werke, welche der k. k. Sternwarte vom September 1843 bis Ende 1844 als Geschenke zugekommen sind. — Verzeichniss der Anstalten des Auslandes, welche alljährlich mit einem Exemplare der Annalen betheilt werden. — Preis-Tarif der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts zu Wien. — Preis-Tarif von Herrn S. Plössl.

Man wird hieraus den reichen Inhalt dieses Bandes und den Eifer und die Umsicht, womit die Herren Herausgeber der Sternwarte zu Wien vorstehen, erkennen.

Physik.

Gehlers physikalisches Wörterbuch. II. Bd. Sach- und Namenregister mit ergänzenden Zusätzen v. G. W. Muncke. Nebst Nachtr. zu dem Verz. geogr. Ortsbestimmungen von C. L. v. Littrow. Leipzig. 1845. 4 Rthlr.

Littrow, C. L. v.: Nachträge zu dem Verzeichniss geogr. Ortsbestimmungen. Leipzig. 1845. 4 ggr.

Notice sur l'art aérostatique par un aéronaute. Lille. 1845.

Herger, die Systeme der magnetischen Curven, Isogonen und Isodynamen nebst anderweitigen empirischen Forschungen über die magnetisch-polaren Kräfte. Erläutert von Ernst Herger. 2—4te Lief. mit 22 Taf. Leipzig. 1845. 9 Rthlr. (S. Literar. Bericht Nro. XXII. S. 343.)

Pohl: der Elektromagnetismus und die Bewegung der Himmelskörper in ihrer gegenseitigen Beziehung. Breslau. 1846. 18. ggr.

Die periodisch wiederkehrenden Eiszeiten und Sindfluthen und die wichtigsten Folgerungen aus diesen wechselnden Ueberschwemmungen der südlichen und nördlichen Kontinente von W. v. Bruchhausen. 8. Trier. 1845. 1 Rthlr.

Vermischte Schriften.

J. J. v. Littrow's vermischte Schriften. Herausgegeben von C. L. v. Littrow, Director der Sternwarte zu Wien. Drei Bände. Erster Band. Stuttgart. 1845. 8. 1 Rthlr. 18 ggr.

Mit dieser Sammlung der vermischten Schriften seines verstorbenen Vaters hat Herr Director C. L. v. Littrow gewiss vielen Lesern ein sehr angenehmes Geschenk gemacht. Ausser mehreren anderen Aufsätzen enthält dieser erste Band auch Manches, was von allgemeinem mathematischen und physikalischen Interesse ist und unter den populären Schriften dieser Art immer eine vorzügliche Stelle einnehmen wird, da J. J. v. Littrow's Talent für wahrhaft populäre Darstellungen bekannt genug ist. Wir erlauben uns die Leser in dieser Beziehung nur auf Folgendes aufmerksam zu machen: Unrichtigkeit der christlichen Zeitrechnung. Der Winter. Ueber das Nordlicht. Witterung des Cholerajahres 1831. Regulirung der öffentlichen Uhren. Wittwen-Institute im Allgemeinen. Ueber eine Verbesserung der Fernröhre durch einen vaterländischen Künstler (ein sehr klar geschriebener Aufsatz über Fernröhre im Allgemeinen, namentlich aber über das achromatische Fernrohr und das dialytische Fernrohr insbesondere). — Die mitgetheilten Recensionen sind immer selbst gemeinverständliche Aufsätze über die betreffenden Gegenstände, namentlich die folgenden hierher gehörenden: Babbage, Economy of Machinery. Babbage, on the Decline of science in England. Brewster, the life of Newton. Brewster, natürliche Magie. Garthe, Heiligenschein. — Wir sehen der Fortsetzung dieser Sammlung mit Verlangen entgegen.

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. New Haven. (S. Literar. Bericht Nro. XXVII. S. 407.)

Vol. XLIX. 1845. Nro. I. Art. II. Account of some new Articles of Philosophical Apparatus; by Prof. E. S. Snell. p. 20. — Art. VIII. Singular case of Parhelion, with a statement of the Theory of ordinary Halos; by Prof. E. S. Snell. p. 73. — Art. XI. Practical observations on the Generation of Statical Electricity by the Electrical Machine; by Lieut. George W. Rains, U. S. A. p. 93. — Art. XIV. New Electro-Magnetic Engine; by Prof. Char. G. Page. p. 131. — Art. XV. Axial Galvanometer, and Double Axial Reciprocating Engine; by Prof. Charles G. Page. p. 136. — Art. XVI. Report of Observations on the Transit of Mercury, Mai 8th., 1845; by Prof. Olmsted. p. 142.

Druckfehler.

Thl. VII. Heft IV. S. 348. muss die Nummer der Abhandlung nicht LX, sondern „XL“ heissen.

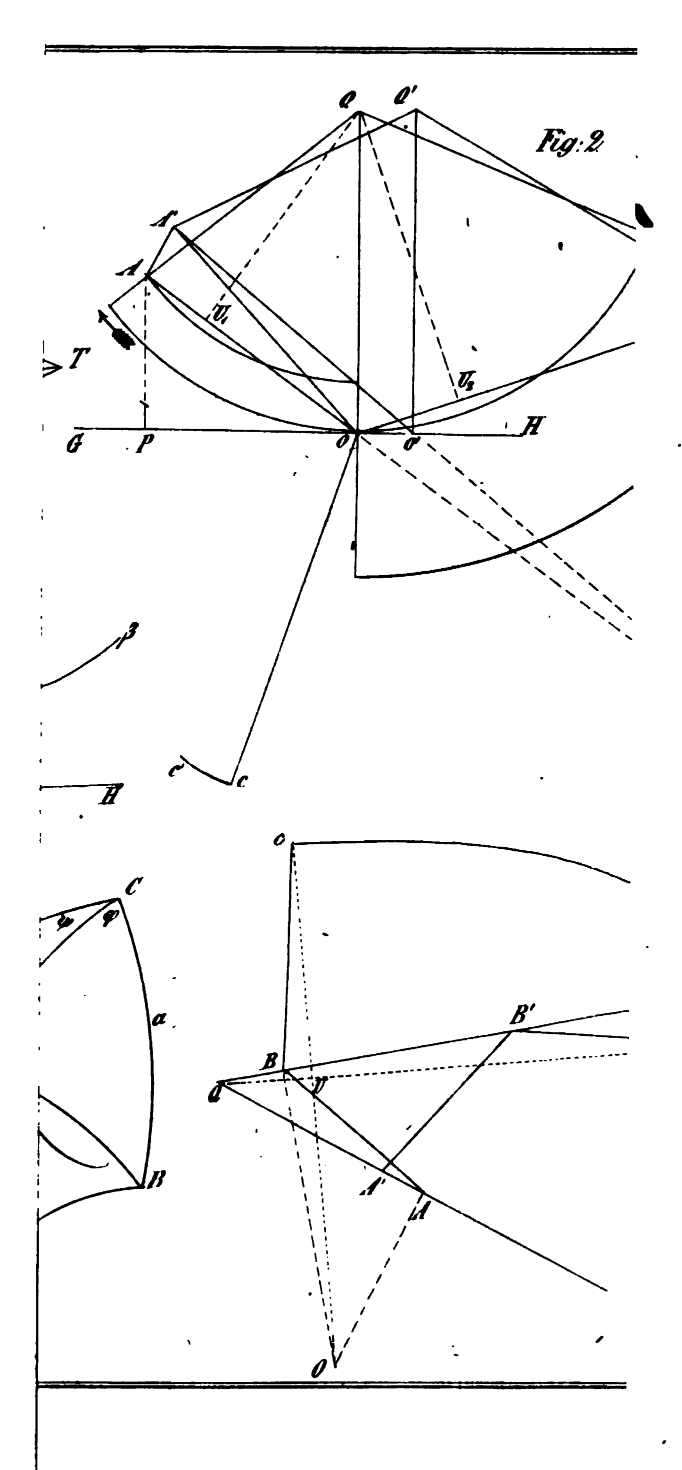
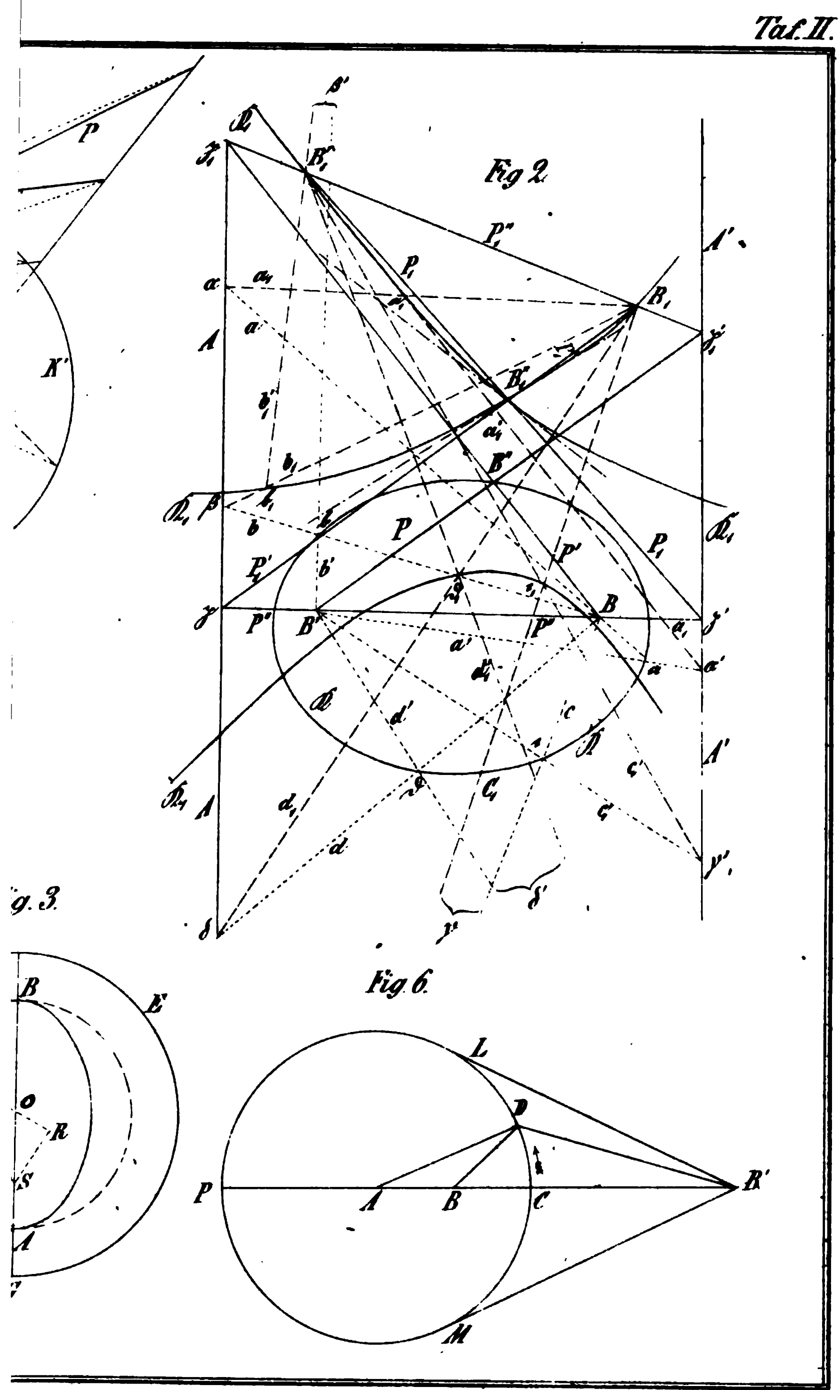
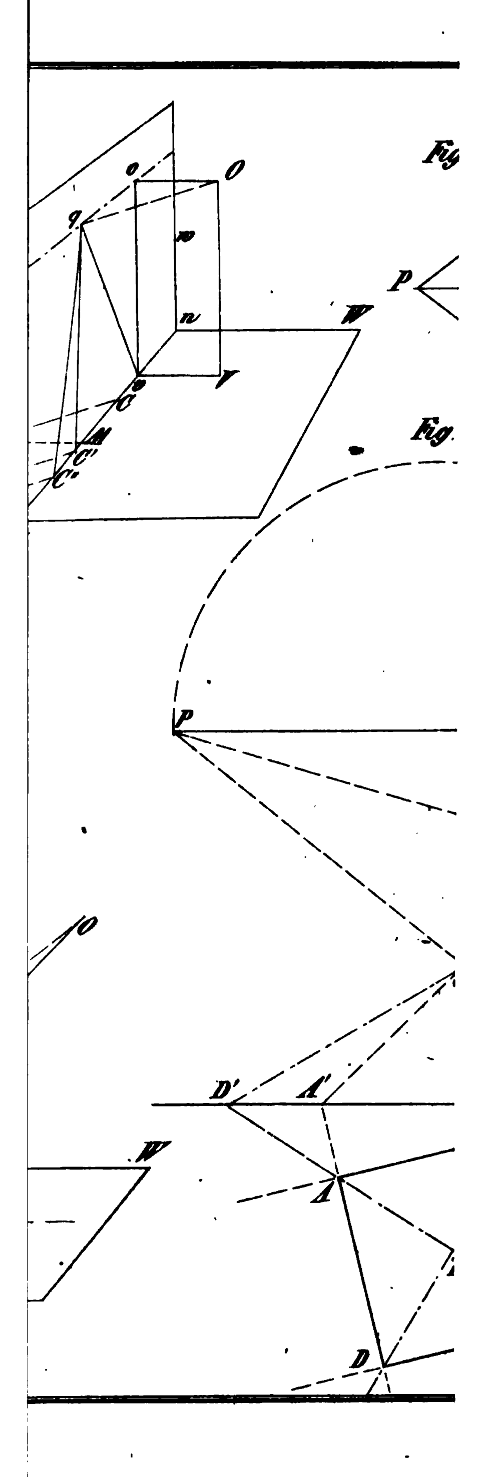


Fig: 2
Q
Q'
A'
A
T
U₁
U₂
G
P
O
σ
H
β
c'
c
H
C
ω
φ
a
B
c
B'
B
Q
V
A'
A
O

Taf. II.




Fig
Fig.
o
O
q
w
n
W
V
C
M
C'
C"
P
P
O
D'
A'
W
A
D

B

b. Fig. 3.

A

Fig. 4.

b

b_1

2

a_1

Fig. 6.

x

c_1

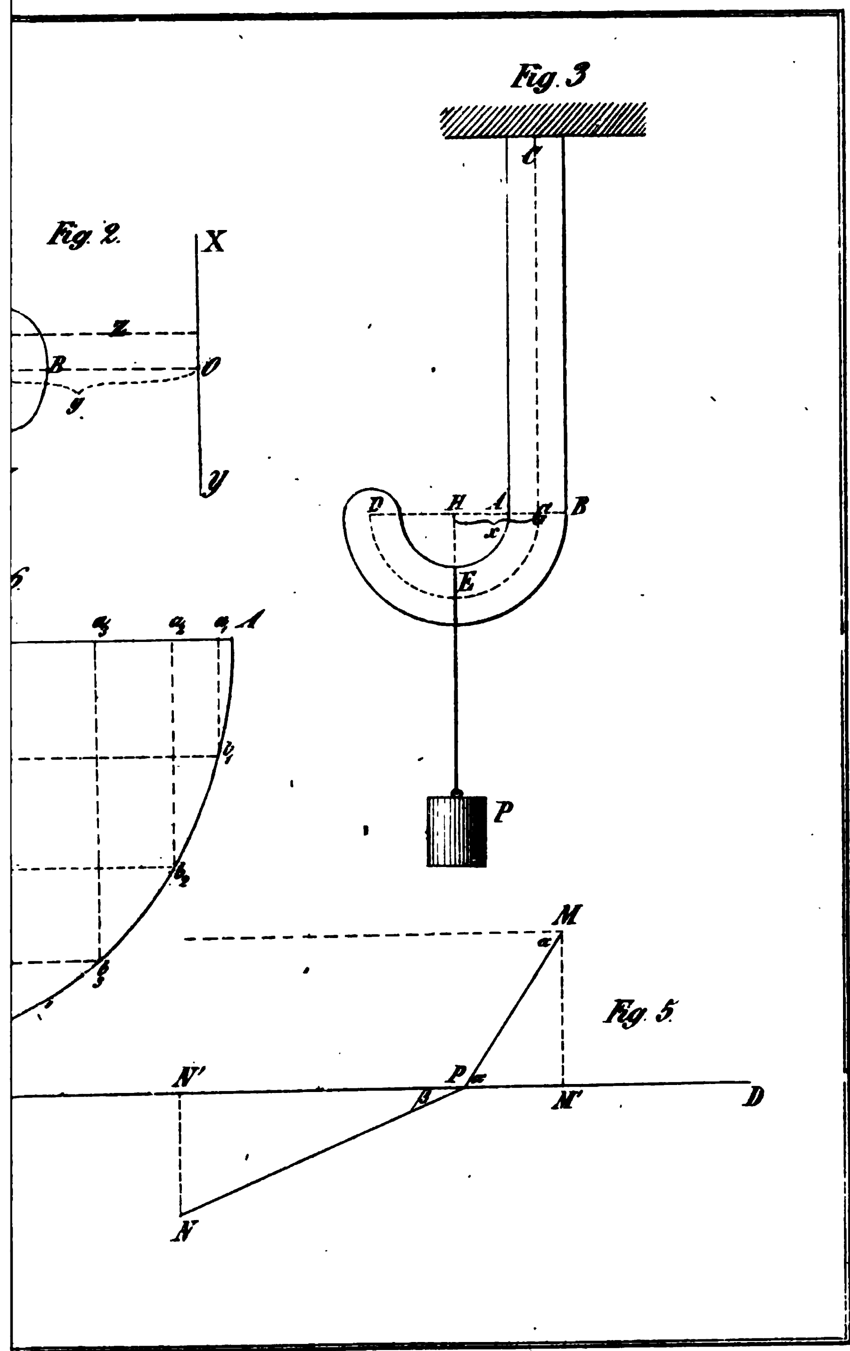
z_1

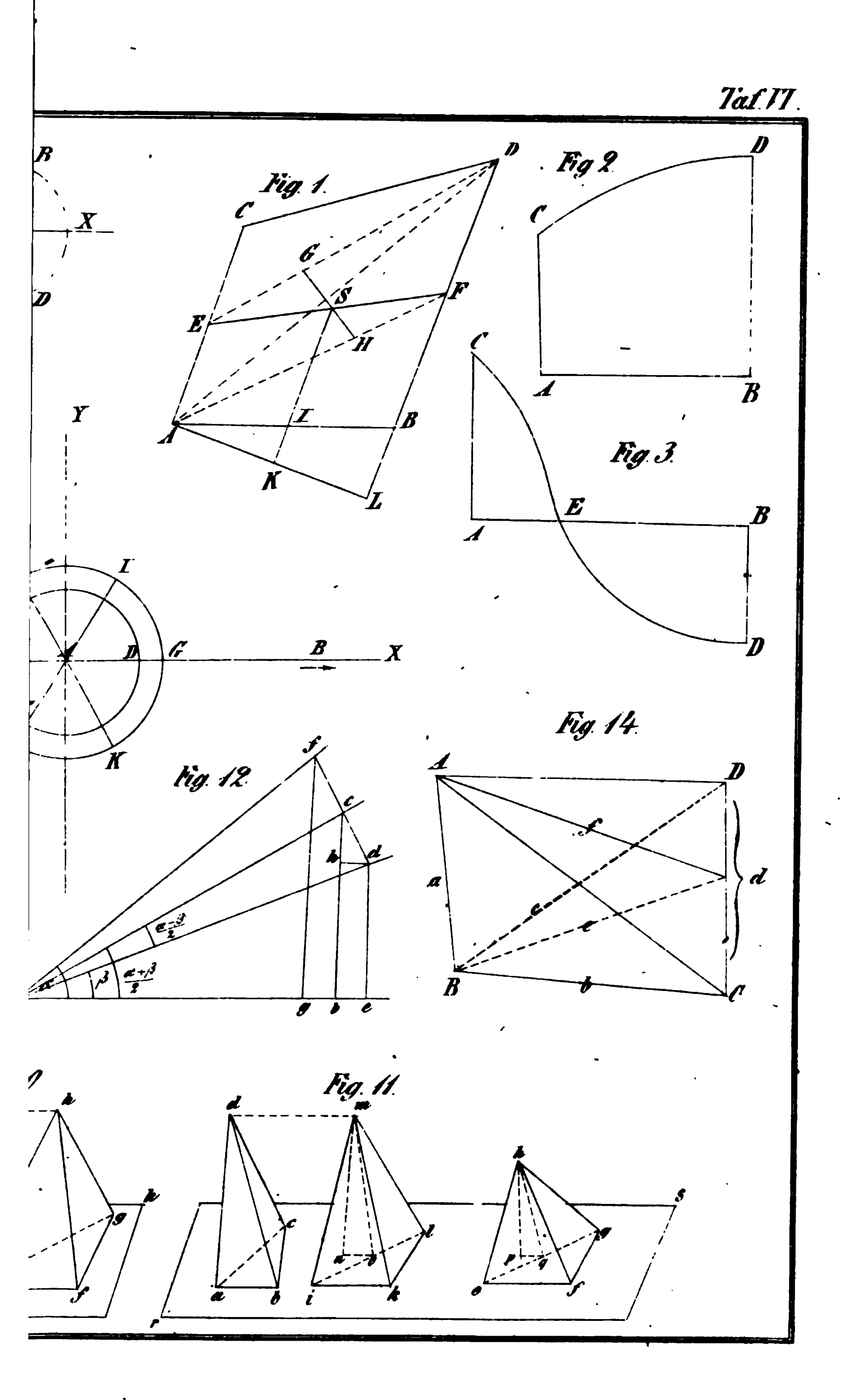
z_1 Fig. 5.

c_1

x_1

Taf. V




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.





